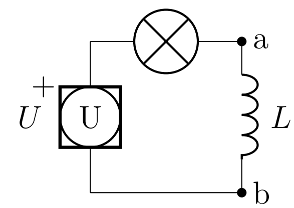
Tentamen i Elkretsanalys för EI1100/EI1102 20101213 kl. 8-13

Hjälpmedel: Miniräknare. Examinator: Lars Jonsson
Endast en uppgift per blad. Godkänt vid 50%. Namn och personnummer på varje blad.

Förståelseuppgifter



1) (5p) Vi har en växelspänningskälla med frekvens f, vi betraktar spänningskällan som riktfas. Dess effektivvärdesamplitud är U. **Fall 1:** Lampan lyser med en viss intensitet, lampan är rent resistiv, och vi antar att ljusintensiteten är proportionell mot förbrukad aktiv effekt i lampan. **Fall 2:** Vi ansluter en ideal strömkälla mellan ab (parallellt med spolen).
a) Hitta en fas och amplitud på strömkällan så att lampan slocknar helt i fall 2.
b) Om vi behåller amplituden men ändrar fasen erhållen i a) genom att addera π radianer hur förhåller sig då lampans intensitet i Fall 2 till lampans intensitet i Fall 1? Notera: Om du inte löst a) räkna då utifrån en ansatt strömamplitud och fas vad som händer i med ljusintensiteten om du adderar π radianer till strömmens fas.

Motivationen är viktig för poängerna.

2.A (2p) Eftersom det är Lucia idag och strömmen tyvärr gått måste vi baka lussebullar med hjälp av en bakmaskin och ett bilbatteri. Bakmaskinen behöver normal växelström från ett vägguttag. Batteriet ger 12V likspänning. Vi har två komponenter, en likström till växelströmsomvandlare och en spänningstransformator. Likström till växelströmsomvandlaren består av operationsförstärkare och kondensatorer, medan spänningstransformatorn består av ett par spolar som är fast kopplade till varandra. Vi bryr oss inte om detaljerna på hur dessa två komponenter faktiskt ser ut, vi ser dem som två fyrpoler. **Spelar** det någon roll i vilken ordning vi kopplar in komponenterna? Rita upp hur de respektive fyrpolerna är kopplade till varandra och till batteriet och bakmaskinen.

Motivationen är viktig för poängen.

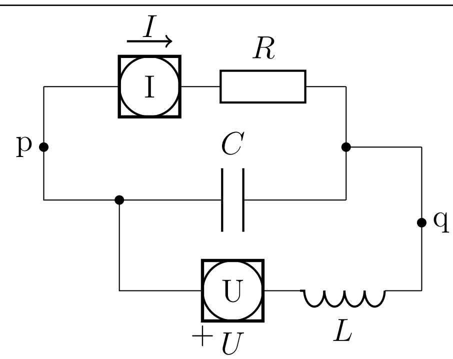
2.B) (1p) Vad är energiprincipen? Rita en krets och visa att energiprincipen håller för kretsen.

Beräkningsuppgifter

2.C (2p) Givet en Thévenintvåpol med spänning $u(t) = 3.0\sin(\omega t + 2\pi/3)$V, vars komplexa impedans är $1.0 + 2.0\mathrm{j}\Omega$, vad är motsvarande strömkälla i en Nortonekvivalent. Svara i tidsdomän med en cosfunktion.

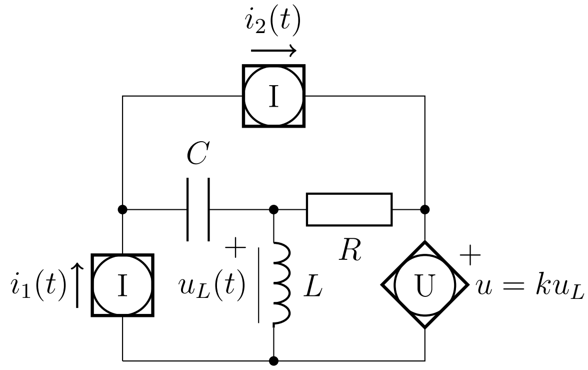
---

3) (5p). Betrakta följande växelströmskrets. Givet den komplexa strömmen I och spänningen U, båda i effektivvärdesskala och med frekvens f.
Bestäm den komplexa spänningen U_{pq} som funktion av vinkelfrekvensen och lämpliga andra storheter, samt den komplexa strömmen genom kondensatorn.
Verifiera att de erhållna uttrycken har rätt dimension.



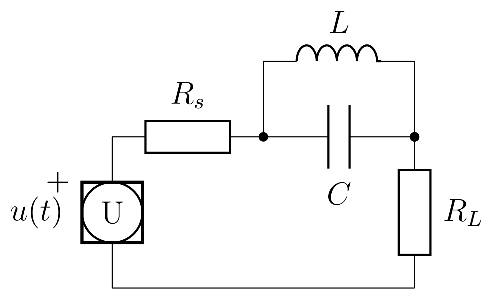
Fortsättning på nästa sida.

4) (5p) I kretsen finns en beroende spänningskälla som beror av spänningen över spolen, $u_L(t)$. Här är $i_1(t) = \sqrt{2} I_0 \cos(\omega t)$A, kalla den korresponderande komplexa effektivvärdesströmmen för I_1. Kalla den komplexa effektivvärdesströmmen motsvarande $i_2(t)$ för I_2. Låt $I_2 = e^{j\pi/2} I_1$. Vidare gäller: $\omega L = R = (3\omega C)^{-1}\Omega$, $k = 3$.
Bestäm $u_L(t)$ i termer av R, I_0, ω och t.
Ledning: Använd maskanalys.



---

5) (5p) En student som inte läst elkrets har googlat en krets som enligt uppgift ska filtrera bort en störsignal vid vinkelfrekvensen som är given av resonansvillkoret $\omega_0^2 LC = 1$. Kontrollera om detta är möjligt genom att **beräkna** aktiv och reaktiv absorberad effekt i lasten R_L och i kondensatorn vid $\omega = \omega_0/2$ och vid $\omega = \omega_0$. *Förklara* vad det är som händer. Det är viktigt att förenkla uttrycket, använd den givna relationen till att eliminera C i svaret. Givet $u(t) = \sqrt{2} U_0 \cos(\omega t + \alpha)$V.
Motivationen är viktig för poängen.

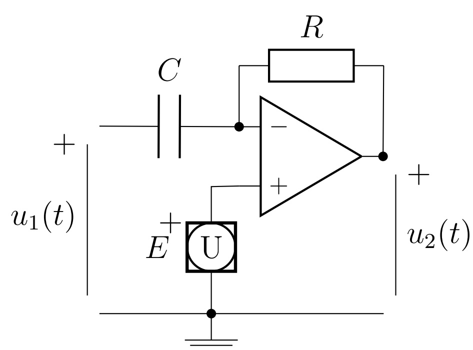


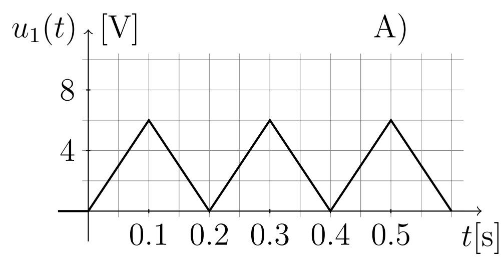
---

6) (5p) En student som läst elkrets vill skapa lite Luciastämning och samtidigt tillämpa sina kunskaper i elkrets, och bestämmer sig för att mata Lucias ljuskrona med kretsen till höger. Här är E en ideal likspänningskälla.

a) För en godtycklig insignal $u_1(t)$ bestäm hur uppkopplingens respons ser ut, dvs bestäm $u_2(t)$ i termer av $u_1(t)$ och de okända storheterna, R, C och E.

b) Antag att operationsförstärkaren är matad med 12V och 0V. Bestäm R, C och E så att utsignalen utnyttjar det maximala området som operationsförstärkaren kan leverera. Gör detta för insignalen i figur A). Rita utsignalen med graderade axlar, var noggrann så att rätt utsignal motsvarar rätt del på insignalens kurva. Utsignalens max ska vara så stor som möjligt då den används till att driva ljuskronans lampor.

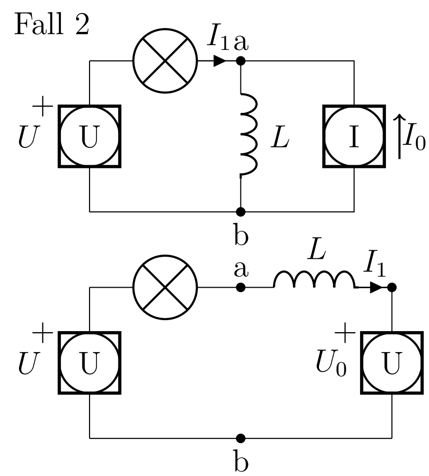




Lösningsförslag 2 till tentamen i Elkretsanalys 20101213

Lösningen till uppgift 6b är rättad.
Examinator: Lars Jonsson

Förståelseuppgifter



1a) Låt lampan ha resistansen R Vi bestämmer effekten i Fall 1: Strömmen i kretsen är $I = U/(R + \mathrm{j}\omega L)$, där $\omega = 2\pi f$. Effekten förbrukad i lampan är rent aktiv och blir

$$P = R|I|^2 = \frac{R|U|^2}{|R + \mathrm{j}\omega L|^2} = \frac{R|U|^2}{R^2 + (\omega L)^2}. \tag{1}$$

Fall 2: Vi kopplar in den ideala strömkällan, I_0. Se övre kretsen. Vi omvandlar Nortontvåpolen $(I_0, \mathrm{j}\omega L)$ till en Théveninvåpol och får den undre kretsen med spänningen $U_0 = \mathrm{j}\omega L I_0$. Vi söker när lampan slocknar helt. Dvs vi måste bestämma ström eller spänning i lampan, låt oss börja med strömmen I_1.

Potentialvandring i den andra kretsen från b genom U till a och ned till b genom U_0 med introducerad strömriktning ger

$$U - (R + \mathrm{j}\omega L)I_1 - U_0 = 0 \Rightarrow I_1 = \frac{U - U_0}{R + \mathrm{j}\omega L} = \frac{U - \mathrm{j}\omega L I_0}{R + \mathrm{j}\omega L} \tag{2}$$

Vi söker när lampan slocknar dvs när $I_1 = 0$, vilket inträffar när

$$I_0 = \frac{U}{\mathrm{j}\omega L}. \tag{3}$$

Vi söker fas och amplitud för I_0. Vi har använt U som riktfas, så vi ser att vi får amplitud och fas som [Notera: $\mathrm{j} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/2}$].

$$|I_0| = \frac{|U|}{\omega L} = \frac{|U|}{2\pi f L}\ \mathrm{A},\ \arg I_0 = \arg U - \arg \mathrm{j}\omega L = 0 - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}\ \mathrm{rad} \tag{4}$$

eftersom U är riktfas. Om Nortontvåpolens ekvivalenta spänning är lika stor som spänningen U går ingen ström och lampan slocknar. **Svar**

1b) Vi har strömmen ovan, vi ska addera π radianer till strömmens fas. *Notera* att $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha+\mathrm{j}\pi} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi} = -\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha}$. Vi får att den nya strömmen blir $\tilde{I}_0 = -I_0 = -U/(\mathrm{j}\omega L)$ och därför blir strömmen genom lampan: (samma argument som för beräkningen av I_1).

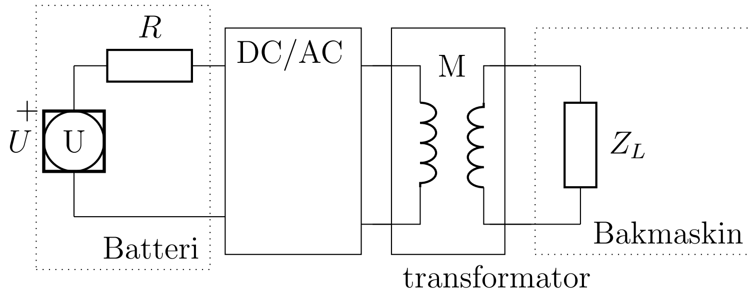
$$\tilde{I}_1 = \frac{U - \mathrm{j}\omega L\tilde{I}_0}{R + \mathrm{j}\omega L} = \frac{2U}{R + \mathrm{j}\omega L} \tag{5}$$

den aktiva effekten i lampan P_2 blir

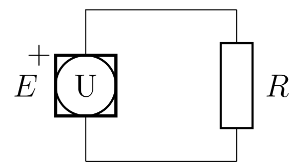
$$P_2 = R|\tilde{I}_1|^2 = \frac{4R|U|^2}{R^2 + (\omega L)^2} \tag{6}$$

Vi får $P_2/P_1 = 4$. **Svar** .

2.A **Svar**. Ordningen blir batteri med här med explicit inre resistans, likström/växelströmsomvandlare till transformator till bakmaskin. Ordningen spelar stor roll eftersom spolarna i transformatorn endast kopplar med ömsesidig induktans (jωM) vid förändring av strömen (spänningen), i detta fall växelströmmen $u = Ldi/dt$. Nedan finns en schematisk bild av kretsen.



2.B) Energiprincipen är att summan av effekten skapad i en krets förbrukas i kretsen. Kom ihåg $\sum_{grenar} p_{jk} = 0$. Vi tar enklast möjliga krets till höger. Strömmen är $I = E/R$. Vi får att effekten förbrukad i generatorn $p_1 = -E^2/R$, effekten förbrukad i resistansen är $p_2 = E^2/R$ och vi får $p_1 + p_2 = 0$, kretsen uppfyller energiprincipen. **Svar**



Beräkningsuppgifter

2.C Här är $u(t) = 3.0\sin(\omega t + 2\pi/3)$V, vi har $\cos(a - \pi/2) = \sin a$, så vi får

$$u(t) = 3.0\cos(\omega t + 2\pi/3 - \pi/2) = 3.0\cos(\omega t + \pi/6). \tag{7}$$

Ansätt effektivvärdesspänningen $U = A\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha}$. Vi använder omvandlingsformeln:

$$\mathrm{Re}(U\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}) = \mathrm{Re}(\sqrt{2}A\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\alpha)}) = \sqrt{2}A\cos(\omega t + \alpha) = u(t) \tag{8}$$

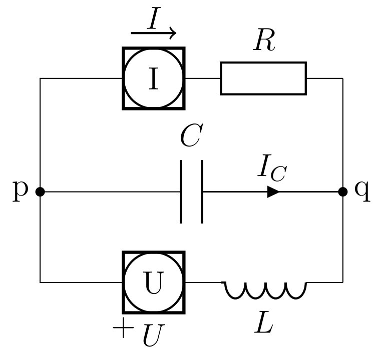
till att identifiera att $A = 3.0/\sqrt{2}$, $\alpha = \pi/6$. Vi får $U = (3.0/\sqrt{2})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/6}$V. Nortonströmmen blir $I = U/Z = U/(1.0 + 2.0\mathrm{j})$ vilket ger

$$I = \frac{3.0}{\sqrt{2}(1.0+2.0\mathrm{j})}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/6}\ \mathrm{A}. \Rightarrow |I| = \frac{3.0}{\sqrt{2}|1.0+2.0\mathrm{j}|} = \frac{3.0}{\sqrt{10}}\ \mathrm{A},$$
$$\text{och } \arg I = \pi/6 - \arg(1.0+2.0\mathrm{j}) = \pi/6 - \arctan 2 \approx -0.58 \text{ rad} \tag{9}$$

Vi får alltså $I \approx (3.0/\sqrt{10})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}0.58}$A vilket i omvandlingsformeln ger $i(t) \approx 1.3\cos(\omega t - 0.58)$A.**Svar**. Där vi fick $3.0/\sqrt{5} = 1.34$. Notera att vi endast har två värdesiffror i svaret.

---

3) Vi börjar med att rita om kretsen. Vi får kretsen till höger. Nu är det rättframt att räkna ut ström och spänning över kondensatorn. Vi kan använda superposition men nodanalys blir kortare. Det är här viktigt att definiera strömriktning, och vi har därför introducerat I_C i kretsen.



Vi väljer q som referens. och räknar i noden p med spänning V_p:

$$\frac{V_p - U}{j\omega L} + j\omega C V_p + I = 0. \Rightarrow V_p(\frac{1}{j\omega L} + j\omega C) = \frac{U}{j\omega L} - I \quad (10)$$

Vi får att

$$V_p = \frac{U - j\omega L I}{1 - \omega^2 LC} \quad (11)$$

Notera att $U_{pq} = V_p - 0$. **delsvar**. Här är $\omega = 2\pi f$. Låt $Z_C = 1/(j\omega C)$. Vi får nu direkt att $I_C = V_p/Z_C = j\omega C V_p$. **delsvar**.

Vi ska också kontrollera dimensionen. Notera att $j\omega C$ har dimension Ω^{-1}. Så om V_p är av dimension volt så blir $[I_C] = \Omega^{-1}V = A$ från Ohms lag vilket ger korrekt dimension.

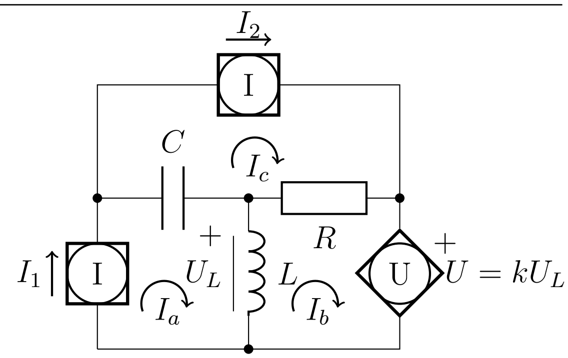
Om vi nu tittar på V_p här har vi att $[\omega L] = \Omega$ och $[U] = V$ vi får

$$[V_p] = \frac{V + \Omega A}{(\text{dimlöst}) + [\omega C][\omega L]} = \frac{V + \Omega A}{(\text{dimlöst}) + \Omega^{-1}\Omega} = (V + \Omega A) = V \quad (12)$$

Uttrycket är dimensionsmässigt korrekt.

---

4) Vi använder maskanalys som rekommenderat, se kretsen, vi har också infört de komplexa storheterna för källorna. I maska a har vi att $I_a = I_1$ i maska b har vi att $I_c = I_2$ och i maska b måste vi sätta upp ekvationen:



$$-j\omega L(I_b - I_a) - R(I_b - I_c) - U = 0 \quad (13)$$

Men $U = kU_L$ och $U_L = j\omega L(I_a - I_b) = -j\omega L(I_b - I_a)$. Om vi nu sätter in våra givna strömmar I_a och I_b samt U får vi

$$-j\omega L(I_b - I_1) - R(I_b - I_2) + j\omega L k(I_b - I_1) = 0$$
$$\Rightarrow (k-1)j\omega L(I_b - I_1) - R(I_b - I_2) = 0 \Rightarrow$$
$$((k-1)j\omega L - R)I_b = ((k-1)j\omega L I_1 - RI_2 \Rightarrow I_b = \frac{(k-1)j\omega L I_1 - RI_2}{(k-1)j\omega L - R} \quad (14)$$

Om vi nu sätter in de givna uppgifterna $I_2 = e^{j\pi/2} I_1 = jI_1$ och $\omega L = R$ samt $k = 3$ får vi att

$$I_b = \frac{2jRI_1 - jRI_1}{2jR - R} = \frac{j}{2j - 1} I_1 \quad (15)$$

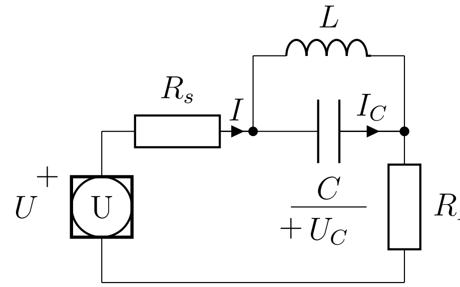
Men från $i_1 = \sqrt{2} I_0 \cos \omega t$ får vi att $I_1 = I_0$ (se uppgift 2.C för detaljerna). Vi vill ha

$$U_L = j\omega L(I_a - I_b) = jR(1 - \frac{j}{2j-1})I_0 = jR\frac{j-1}{2j-1}I_0, \text{ så } |U_L| = R\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}|I_0|,$$
$$\arg U_L = \frac{\pi}{2} + \arg(-1 + j) - \arg(2j - 1) + \arg I_0 = \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{4} - (\pi - \arctan 2) = \frac{\pi}{4} + \arctan 2 \quad (16)$$

Rita vektorerna så blir vinklarna klara. Notera att $\tan^{-1}$ har lite problem om vinkeln är större än $\pi/2$. Vi får att $u_L(t) = (2R|I_0|/\sqrt{5})\cos(\omega t + (\pi/4 + \arctan 2))$V. **Svar**.

---

5) Låt U vara den komplexa effektivvärdesspänningen. Vi börjar med att bestämma strömmen I i kretsen. Notera $Z_L = \mathrm{j}\omega L$, $Z_C = 1/(\mathrm{j}\omega C)$ och $Z_L//Z_C = \mathrm{j}\omega L/(1-\omega^2 CL)$. Vi får



$$I = \frac{U}{R_s + R_L + Z_L//Z_C} = \frac{U(1-\omega^2 LC)}{\mathrm{j}\omega L + (R_s+R_L)(1-\omega^2 LC)}. \quad (17)$$

Vi ser direkt att vid resonansfrekvensen är $I = 0$ och därför får vi att den komplexa effekten i lasten är noll. Dvs $P_L(\omega_0) = U_{R_L} I^* = 0$. (Både aktiv och reaktiv). **delsvar**.

Vid $\omega = \omega_0/2$ får vi ur $\omega_0^2 LC = 1$ att $C = 1/(\omega_0^2 L)$. Detta ger att strömmen blir

$$I(\omega_0/2) = \frac{U(1-\omega_0^2 LC/4)}{\mathrm{j}\omega_0 L/2 + (R_s+R_L)(1-\omega_0^2 LC/4)} = \frac{3U}{2\mathrm{j}\omega_0 L + 3(R_s+R_L)} \quad (18)$$

Vi får nu den komplexa effekten i lasten som

$$P(\omega_0/2) = UI^* = R_L |I(\omega_0/2)|^2 = \frac{9|U_0|^2 R_L}{4(\omega_0 L)^2 + 9(R_s+R_L)^2} = \textbf{delsvar} \quad (19)$$

där vi utnyttjat att den komplexa spänningen motsvarande $u(t)$ är $U = U_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha}$ och $|U| = |U_0|$. Ovan får vi rent aktiv effekt (ingen imaginärdel).

För kondensatorn blir det hela lite mer klurigt. I resonansfallet är strömmen $I = 0$ dvs inga spänningsfall över resistanserna och vi får hela spänningsfallet över spolen och kondensatorn. Notera att $I_C \neq 0$ (varför). $U_C = U$, vi får därför den komplexa effekten som $[C = 1/(\omega_0^2 L)]$

$$P_C(\omega_0) = U_C I_C^* = \frac{|U_C|^2}{Z_C^*} = -\mathrm{j}\omega_0 C |U_0|^2 = -\mathrm{j}\frac{|U_0|^2}{\omega_0 L} = \textbf{delsvar}. \quad (20)$$

dvs en rent reaktiv effekt.

I fallet när $\omega = \omega_0/2$ får vi genom strömdelning att

$$I_C(\omega_0/2) = [\text{strömdelning}] = I\frac{\mathrm{j}\omega_0 L/2}{\mathrm{j}\omega_0 L/2 + 2/(\mathrm{j}\omega_0 C)} = I\frac{-\omega_0^2 LC/4}{1-\omega_0^2 LC/4} = -I\frac{1}{3} = \frac{-U}{2\mathrm{j}\omega_0 L + 3(R_s+R_L)} \quad (21)$$

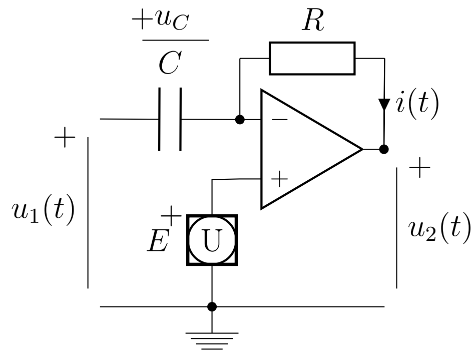
Och vi får den komplexa (här rent reaktiva) effekten till

$$P_C(\omega_0/2) = U_C I_C^* = \frac{2|I_C(\omega_0/2)|^2}{\mathrm{j}\omega_0 C} = -2\mathrm{j}\omega_0 L \frac{|U_0|^2}{4(\omega_0 L)^2 + 9(R_s+R_L)^2} = \textbf{delsvar} \quad (22)$$

Förklaring: När vi har resonans kommer reaktiv effekt att ligga och svänga mellan spolen och kondensatorn men ingen effekt kommer till lasten, störsignalen är utfiltrerad. När ω_0 är iväg från resonansfrekvensen kommer en del av effekten fram till lasten resten av den aktiva lasten förbrukas i R_s.

---

6) Notera att vi har godtycklig signal vi måste räkna i tidsdomän. Vi potentialvandrar i kretsen, från jord till u_1 och vidare till - ingången. Vi får med virtuell jord



$$u_1(t) - u_C(t) = V_- = E, \Rightarrow u_C = u_1 - E \qquad (23)$$

Potentialvandrar vi från - ingången till utgången får vi

$$E - Ri(t) = u_2(t) \qquad (24)$$

Vi notera att strömmen i också går genom kondensatorn eftersom vi har en ideal operationsförstärkare där ingen ström går in på ingångarna. Så $i(t) = C(du_C/dt)$i Då E är konstant får vi $u_2 = E - RC(du_1/dt)$. **delsvar a**.

Matningen är 12V och 0 volt. Op-ampen kan alltså på utgången leverera max 12V och minimum 0V.

I grafen ser vi att derivatan av insignalen är (för uppgången) $du_1/dt = 6/0.1 = 60$ V/s, och för nedåtflanken $du_1/dt = -60$ V/s.

Vi vill att max är 12 V och minimum är 0V så $E = 6$V och $RC = 1/10$s. Detta ger att utsignalen blir $u_2 = 6 - (1/10)60 = 0$V (för uppgången) och $u_2 = 6 + (1/10)60 = 12$V (för nedgången).

Vi ritar utsignalen i samma diagram som insignalen och får: