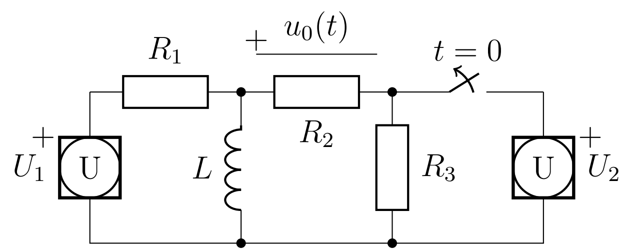
Hemuppgift nr 4 av 4, deadline 3/12 2010

Inlämning av lösta uppgifter sker den 3/12 kl 10:00-10:15 på övningen. **Kamraträttning** sker 3/12 kl 11-12. Obs: För att uppgiften ska tillgodoräknas måste du delta i både att lösa uppgiften (före aktuellt datum) och i rättningen det aktuella datumet.
När du löser uppgiften, tänk på att **uppgifterna ska kamraträttas**, skriv därför en tydlig lösning som går lätt att följa, med tydliga bilder, introducera storheter, vad som söks, lösningsgång samt väl förenklade svar på delfrågorna.
Häfta ihop lösningsbladen och **skriv namn** på framsidan. Examinator: Lars Jonsson

---

1 av 4) Transienter, inkopplingsförlopp. Här är U_1 och U_2 likströmskällor.



a) Bestäm u_0 och strömmen genom spolen före switchen öppnas.

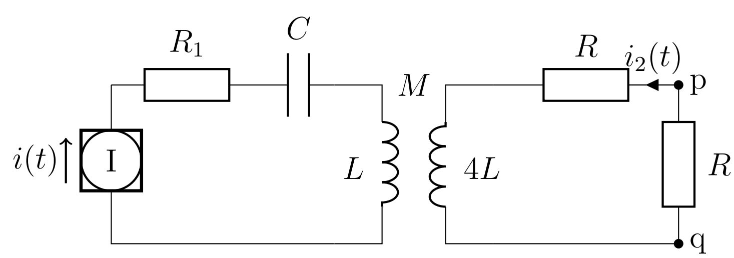
b) Vad händer efter det att switchen öppnas? Rita om kretsen. Inför lämpliga noder.

c) Bestäm u_0 efter kontakten öppnats. Använd lämpligen nodanalys. Vad är tidskonstanten?

d) Efter en lång stund, dvs $t \gg \tau$, där τ är tidskonstanten för kretsen, är det stationärt tillstånd i kretsen igen. Bestäm u_0. Stämmer detta med gränsvärdet då $t \to \infty$ på det uttrycket av $u_0(t)$ som du fick ovan.

---

2 av 4) Ömsesidig induktans. Givet $i(t) = \sqrt{2}I_0 \sin(\omega t + \pi/3)$.



a) Ange den komplexa strömmen I svarande mot $i(t)$ med cosinus som referens och i effektivvärdesskalan.

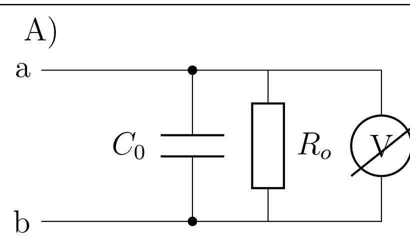
b) Den ömsesidiga induktansen M samverkar då strömmarna är givna med angivna riktningar. Bestäm den komplexa strömmen I_2 (svarande mot $i_2(t)$) och den komplexa spänningen U_{pq}.

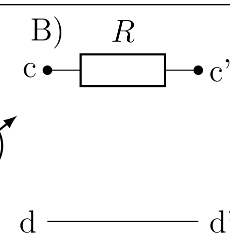
c) Omvandla uttrycket för U_{pq} som du beräknat till tidsdomän.

d) Om den ömsesidiga induktansen M är motverkande med givna definitionsriktningar på strömmen hur förändras den komplexa spänningen U_{pq}.

---

3 av 4) Frekvens-beroende och -oberoende, prob. Givet en stor växelspänning U_1 vid högspänningslabbet. Vi vill mäta denna med hjälp av ett oscilloskop. Oscilloskop klarar bara av maxvärdet $\hat{U}_2$ (toppvärde) på sin ingång. Ingången till oscilloskopet kan modelleras med uppkoppling i krets A). Där R_o och C_o är givna. Eftersom vi inte kan koppla in oscilloskopet direkt då $\hat{U}_1 \gg \hat{U}_2$ måste vi ha en prob emellan. En enkel sådan finns i figur B).





a) Rita upp kopplingen. Var finns U_1 och var mäter vi, introducera lämplig notation. Hur påverkar den idealiserade voltmetern beräkningarna i kretsen?

b) Tyvärr kommer inkopplandet av U_1 till proben som är kopplad till oscilloskopet att resultera i en frekvensberoende uppmätt signal. Hur ser frekvensberoendet ut? Dvs hur beror den uppmätta signalen dividerat med U_1 på ω?

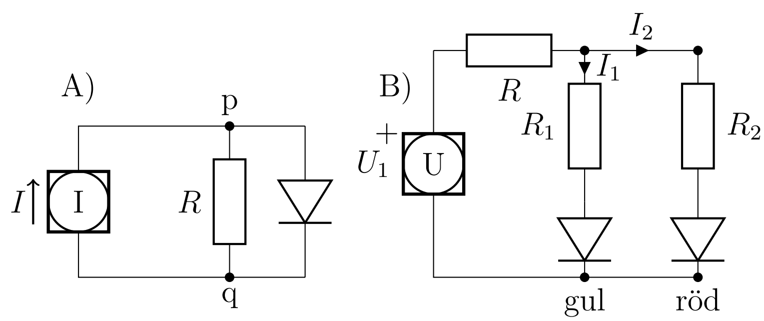
c) Vi vill göra kopplingen mellan U_1 och den uppmätta signalen *oberoende* av frekvens. Detta görs genom att koppla in en kapacitans C i proben. Hur ska den lämpligen kopplas? (Läs om probar i boken, kabelns kapacitans kan antas vara inkluderad i C_o). Rita upp den nya kretsen.

d) Hur ska C väljas i proben för att få det önskade frekvensoberoendet? Använd metoden för att bestämma ett frekvensoberoende nät diskuterad i boken (och på lektionen).

e) Antag att $U_1 = 1000\text{V}$, $R_o = 1.0M\Omega$, $\hat{U}_2 = 10\text{V}$, $f = 50\text{Hz}$, $C_o = 40\text{pF}$. Hur blir förhållandet mellan U_1 och uppmätt signal för det C som ger ett frekvensoberoende filter. Vad blir C?

---

4 av 4) Dioder. En ideal diod tillsammans med linjära kretselement kan användas för att modellera en verklig diod. I figur A) visas en uppkoppling med en verklig diod. Här är I en likströms källa.



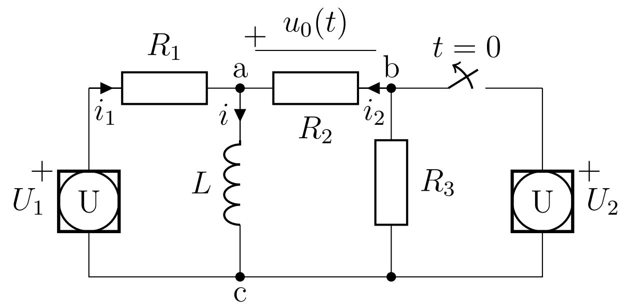
a) Krets A). Använd modell 3 i boken, dvs en resistans r och en motriktad likspänningskälla U_d tillsammans med en ideal diod för att modellera dioden. Låt $I \in (-I_0, I_0)$, där $I_0 R > 10U_d$. Bestäm U_{pq} som funktion av I. Rita en graf med U_{pq} som funktion av I. Notera att $r \ll R$. Vilka fall ska betraktas. Inför lämplig notation.

b) Krets A). Om vi nu ovan låter $r \to 0$, dvs vi använder modell 2 vad blir spänningen över pq, dvs spänningen över dioden.

c) Krets B). En lysdiods ljusstyrka bestäms i första hand av den ström som går genom dioden. I kretsen finns två lysdioder, en gul och en röd. För att den gula lysdioden ska lysa med önskad styrka krävs $I_1 = 20\text{mA}$, och spänningen över den 2.1V. Motsvarande för den röda lysdioden är $I_2 = 10\text{mA}$ och 1.6V. Dimensionera resistanserna R, R_2 och R_2 så att strömmar och spänningar över dioderna stämmer. Här är $U_1 = 6\text{V}$.

Förslag till lösning av Hemuppgift nr 4 2010

Examinator: Lars Jonsson



1a) Före $t = 0$ råder stationärt tillstånd. Källor och alla strömmar är likström. Detta innebär att spolen är en korslutning och nod a och c är samma punkt. (Det är en ideal spole emellan och den har ingen resistans). Vi ska bestämma u_0 och strömmen i. Vi kan naturligtvis använda nodanalys om vi inser att a och c är samma punkt. Men här är det nästan lättare att direkt använda KVL. Eftersom $V_a = V_c$ kan vi använda denna nod som referens. Vi får då två egentligen separerade kretsar.

Om vi går från c genom U_1 vidare till a och ned till c igen får vi att

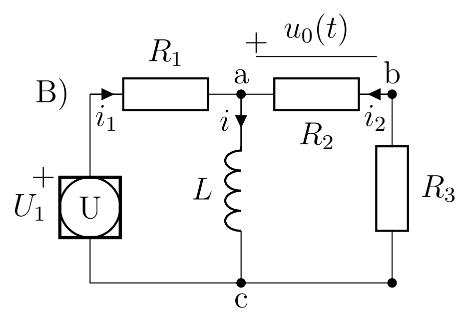
$$U_1 = R_1 i_1,\ i_1 = \frac{U_1}{R_1} \tag{1}$$

och detta är en av de strömmarna som kommer fram till nod a. Från den andra källan får vi att spänningen över bc är U_2, eftersom $V_a = V_c$ dvs $u_0 = -U_2$ (**delsvar**). Vilket ger att strömmen genom R_2 är

$$i_2 = \frac{-u_0}{R_2} = \frac{U_2}{R_2} \tag{2}$$

KCL i nod a ger att $i = i_1 + i_2 = U_1/R_1 + U_2/R_2$ (**delsvar**).

B)



1b,c) Notera att det är strömmen i genom spolen för $t = 0$ som kommer att vara initial värdet för spolens diff-ekvation.

Vi ska nu betrakta $t \geq 0$. Nu kan vi rita om kretsen. Se figur B. Vi kan göra en tvåpol av detta, dvs vi ser att spolen och $(R_1 + R_2)$ är parallell kopplade, så vi kan byta plats på dem. Sedan kan vi göra spänningskällan och resistanserna till en tvåpol och gå vidare enligt boken med spolen som last.

Alternativt kan vi följa ledningen och titta på nodanalys. Före vi försöker bestämma $u_0(t)$ måste vi hitta och lösa diffekvationen för spolen. Vi börjar med det. Vi har två intressanta noder, a och c. Jorda c då har vi en okänd potential V_a och vi behöver en ekvation. Vi gör nodanalys i nod a

$$\frac{V_a - U_1}{R_1} + i(t) + \frac{V_a}{R_2 + R_3} = 0, \Rightarrow V_a\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + R_3}\right) = \frac{U_1}{R_1} - i(t) \tag{3}$$

Vi får tillslut

$$V_a = \frac{R_2 + R_3}{R_1 + R_2 + R_3}(U_1 - i(t)R_1) \tag{4}$$

Notera att vi inte känner $i(t)$ här. Vi vet att spänningen över spolen $u_L = V_a - V_c = V_a$ är relaterad till strömmen genom $V_a = u_L = L\frac{di}{dt}$. Innan vi går vidare tittar vi på (4). Först noterar vi att U_1 är en konstant likströmmskälla. Dess spänning påverkas inte av spolens flödes förändring. Vi har också en massa resistanser, låt oss kalla den dimensionslösa konstanten för k:

$$k = \frac{R_2 + R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \tag{5}$$

Med relationen mellan ström och spänning får vi

$$L\frac{di(t)}{dt} = kU_1 - i(t)R_1 k, \Rightarrow \frac{di(t)}{dt} + k\frac{R_1}{L} i(t) = \frac{kU_1}{L} \tag{6}$$

Denna ODE är på standard form och kan enkelt lösas, vi får:

$$i(t) = \frac{U_1}{R_1} + A\mathrm{e}^{-tkR_1/L}. \tag{7}$$

För att bestämma konstanten A måste vi använda initial värdet $i(t = 0) = U_1/R_1 + U_2/R_2$. Vi får

$$i(t = 0) = \frac{U_1}{R_1} + A = \frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_2}. \tag{8}$$

Vi får att $A = U_2/R_2$. Vi har nu fått strömmen $i(t)$ som

$$i(t) = \frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_2}\mathrm{e}^{-tkR_1/L}, \text{ där } k = \frac{R_2 + R_3}{R_1 + R_2 + R_3}. \tag{9}$$

Men vi söker egentligen $u_0(t)$, men detta vet vi när vi vet V_a genom spänningsdelning. Vi får att

$$V_a = L\frac{di(t)}{dt} = -\frac{U_2 R_1 k}{R_2}\mathrm{e}^{-ktR_1/L}. \tag{10}$$

Vi får nu u_0 genom spänningsdelning. Vi vet V_a och får

$$u_0(t) = \frac{V_a(t)R_2}{R_2 + R_3} = -U_2\frac{R_1}{R_2}\frac{R_2}{R_2 + R_3}\frac{R_2 + R_3}{R_1 + R_2 + R_3}\mathrm{e}^{-tkR_1/L} = -U_2\frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3}\mathrm{e}^{-tkR_1/L} = \textbf{delsvar} \tag{11}$$

med k som i (9).V i får tidskonstanten $\tau = L/(kR_1)$, med k som ovan (**delsvar**).

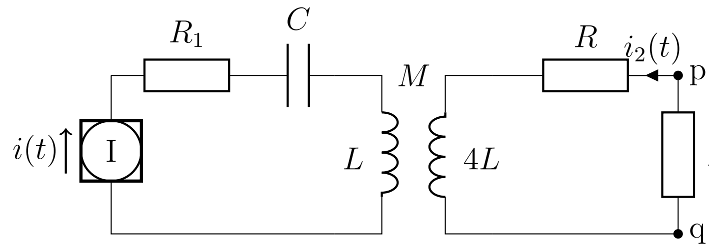
1d) Rimlighetskontroll. Vi går tillbaka till krets B) ovan. Vi har likspänning i U_1 detta innebär att efter en lång tid har vi likström i hela kretsen, dvs i =konst. Spänningen $V_a - V_c = L di/dt = 0$. Dvs $R_2 + R_3$ är korslutna av spolen i likström. Vilket betyder att efter en lång tid finns det ingen spänning mellan ac och därför ska $u_0(t) = 0$V (**delsvar**) i det stationära tillståndet efter transienten.

Låt oss kolla om vårat svar ger detta.

$$\lim_{t\to\infty} u_0(t) = -U_2\frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3}\lim_{t\to\infty}\mathrm{e}^{-tkR_1/L} = 0 = \textbf{delsvar}. \tag{12}$$

Vi får att både gränsvärdet och beräknandet av det stationära tillståndet ger samma resultat.

2a) Givet $i(t) = \sqrt{2}I_0 \sin(\omega t + \pi/3)$. Vi börjar med att komma ihåg att $\cos(a - \pi/2) = \sin(a)$. Vilket ger att vi kan skriva



$$i(t) = \sqrt{2}I_0 \cos(\omega t + \pi/3 - \pi/2) = \sqrt{2}I_0 \cos(\omega t - \pi/6). \quad (13)$$

För att omvandla detta till en komplex ström ansätter vi $I = A\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha}$ och använder omvandlings formeln:

$$i(t) = \sqrt{2}I_0 \cos(\omega t - \pi/6) = \mathrm{Re}(\sqrt{2}I\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}) = \sqrt{2}\,\mathrm{Re}(A\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\alpha)}) = \sqrt{2}A\cos(\omega t + \alpha) \quad (14)$$

Vi kan nu läsa av att $A = I_0$ och $\alpha = -\pi/6$. Vi får $I = I_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/6}$ (**Svar**).

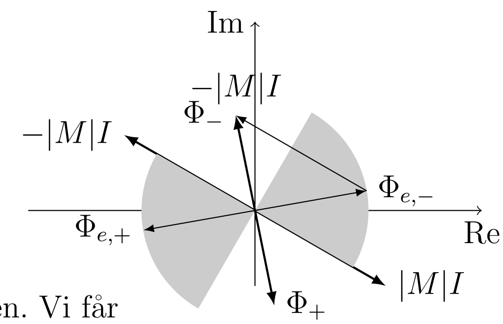
2b) Vi har fått givet att M ska vara samverkande med de givna strömriktningarna. Hur vet vi om $M > 0$ eller $M < 0$ för att de ska vara samverkande? Vi måste titta på flödet genom en spole. Men för att kunna göra detta måste vi först räkna ut strömmarna.

Notera att vi redan har I så vi kan sätta upp en potential vandring i den sekundära kretsen: q genom spolen till p och tillbaka till q (allt mot strömmen). Vi får:

$$\mathrm{j}\omega(4L)I_2 + \mathrm{j}\omega MI + RI_2 + RI_2 = 0 \quad (15)$$

Vi får att

$$I_2 = \frac{-\mathrm{j}\omega MI}{2R + 4\mathrm{j}\omega L} \quad (16)$$



Nu har vi I_2 och I, nu kan vi äntligen bestämma om M är större eller mindre än noll för att spolarna ska samverka i den givna uppkopplingen. Vi får

$$\Phi_\pm = 4LI_2 \pm |M|I \quad (17)$$

Frågan är vilken av Φ_+ och Φ_- som ger störst flöde. Vi ska summera två komplexa vektorer. En graf kan hjälpa oss. Vi har att det ömsesidiga flödet är $\pm|M|I$, där $I = I_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/6}$. Egenflödet är

$$\Phi_e = 4LI_2 = \frac{-\mathrm{j}4\omega LMI_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/6}}{2R + 4\mathrm{j}\omega L},\ |\Phi_e| = \frac{4\omega L|M|I_0}{2\sqrt{R^2 + (2\omega L)^2}}, \quad (18)$$

$$\arg\Phi_e = \arg(-\mathrm{j}) + \arg M - \frac{\pi}{6} - \arg(R + 2\mathrm{j}\omega L) = -\frac{2\pi}{3} - \arctan\frac{2\omega L}{R} + \arg M. \quad (19)$$

Vi har att $\arg M = 0$ om $M > 0$ och $\arg M = \pi$ om $M < 0$, vidare vet vi att $0 < \arctan\frac{2\omega L}{R} < \frac{\pi}{2}$. Vi får alltså att $\arg\Phi_{e,+}$ ligger i intervallet $-2\pi/3$ till samma vinkel minus $\pi/2$, medan $\arg\Phi_{e,-}$ ligger i intervallet $-1\frac{2}{3}\pi$ och minus $\pi/2$ från denna vinkel. Dvs vektorn för egeninduktansen kan ligga i en av de grå områdena som de två inritade, för att få något definitivt har jag lagt in $\Phi_{e,\pm}$ för ett fix ω. Jag har också ritat in flödena $\Phi_\pm$ för de två fallen. Som vi ser ändras inte längden av Φ beroende på om vi väljer $\pm M$ dvs samverkande eller motverkande induktans, detta är ett special fall där både motverkande och samverkande induktans ger till amplituden lika stora strömmar I_2 men strömmarna är motriktade. Vi har alltså ingen preferens om vilket tecken M ska ha. Vi väljer att fortsätta med $M > 0$.

Vi får därför **delsvaret**:

$$I_2 = \frac{-\mathrm{j}\omega MI}{2R + 4\mathrm{j}\omega L} \quad (20)$$

och omedelbart:

$$U_{pq} = -I_2R = \frac{\mathrm{j}\omega MRI_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/6}I_2}{2R + 4\mathrm{j}\omega L} = \textbf{delsvar}. \quad (21)$$

2c) Vi får att Vi har ett uttryck som är en kvot av kartesiska uttryck, vi vill ha uttrycket på polär form. Vi får amplitud och fas som

$$|U_{pq}| = \frac{\omega MRI_0I_2}{2\sqrt{R^2+4(\omega L)^2}}, \ \arg U_{pq} = \arg \mathrm{j} - \frac{\pi}{6} - \arg(2R+4\mathrm{j}\omega L) = \frac{\pi}{3} - \arctan\frac{2\omega L}{R} \tag{22}$$

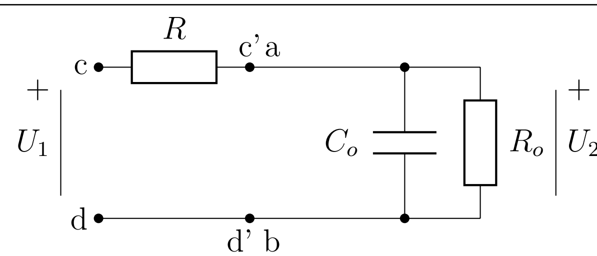
Vi får **svaret**:

$$u_{pq} = \mathrm{Re}(U_{pq}\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}) = \frac{\omega MRI_0I_2}{\sqrt{R^2+4(\omega L)^2}}\cos(\omega t + \frac{\pi}{3} - \arctan\frac{2\omega L}{R}). \tag{23}$$

2d) Om vi byter M mot $-M$ i (21) får vi:

$$U_{pq} = \frac{-\mathrm{j}\omega MRI_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/6}I_2}{2R+4\mathrm{j}\omega L} = \textbf{delsvar}. \tag{24}$$

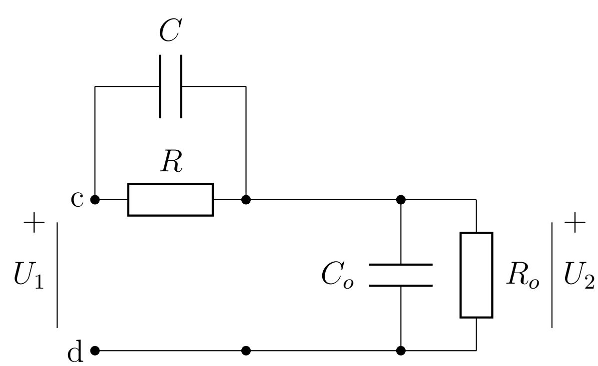
3a) Vi får kretsen i figuren till höger. Notera att en ideal voltmeter kan ersättas av spänningen mellan de punkterna där den är inkopplad. En ideal voltmeter har en mycket hög in-impedans som gör att (nästan) ingen ström går igenom den och den stör kretsen mycket lite.



3b) Den uppmätta signalen kallar vi här U_2. Vi ser att relationen mellan U_1 och U_2 är (spänningsdelning med $Z_o = 1/(\mathrm{j}\omega C_o)$)

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{Z_o//R_o}{Z_o//R_o+R} = \frac{R_o}{R_o + R(1+\mathrm{j}\omega R_oC_o)} \tag{25}$$

3c,d) Vi har två möjligheter, antingen att parallell koppla en kondensator med R eller att seriekoppla den med resistorn. Båda är möjliga, men en standard prob har parallell koppling (Detta för att proben också ska kunna användas för likström). Låt oss därför räkna på denna koppling. Den syns i figuren här brevid.



Vi får då relationen mellan insignal och utsignal till (spänningsdelning)

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{Z_{C_o}//R_o}{Z_{C_o}//R_o + R//Z_C} = \frac{R_o(1+\mathrm{j}\omega CR)}{R_0(1+\mathrm{j}\omega CR) + R(1+\mathrm{j}\omega C_oR_o)} \tag{26}$$

Nu kan vi antingen skriva detta på kartesisk form med en komplicerad imaginärdel och försöka nollställa denna. Detta är omständigt och det blir långa uttryck. Det är bättre att konstatera att om U_2/U_1 är rent frekvensoberoende kommer den också att vara reell. Vi säger därför att högerledet är $1/k$ där k är en reell konstant som ej beror av ω. (Kunde naturligt vis tagit k, men om vi vänder på uttrycken får vi mycket enklare uttryck. Vi får (multiplicera upp nämnare och k)

$$kR_o + \mathrm{j}\omega CRR_ok = R_o + R + \mathrm{j}\omega(C+C_o)RR_o \tag{27}$$

Vi samlar ihop potenserna av ω och får

$$\omega^0(kR_o - R_o - R) + \mathrm{j}\omega(Ck - (C + C_o))RR_o = 0 \tag{28}$$

om detta uttryck ska vara oberoende av ω får vi att koeeficienten till varje potens av ω ska vara noll, dvs

$$k = \frac{R_o + R}{R_o},\ k = \frac{C + C_o}{C} \tag{29}$$

Enda chansen att denna relation gäller är om vi väljer C så att de båda uttrycken för k är lika, dvs

$$1 + \frac{R}{R_o} = \frac{R_o + R}{R_o} = k = \frac{C_o + C}{C} = \frac{C_0}{C} + 1 \tag{30}$$

Lösningen blir $C = C_oR_o/R$ (**delsvar**). Vi får att spänningsdelningen ger resultatet $U_2/U_1 = 1/k = R_o/(R + R_o)$.

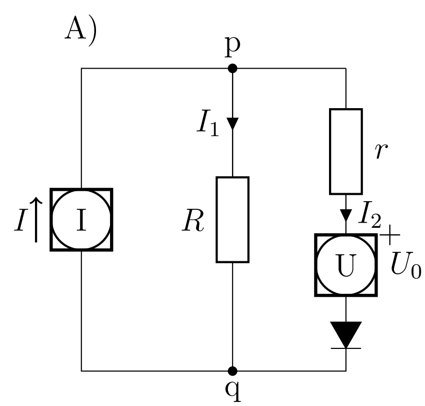
3e) Nu har vi $U_1 = 1000\text{V}$, $\hat{U}_2 = 10\text{V}$, vi får $U_2 = 10/\sqrt{2}$. Med detta kan vi bestämma R. Vi har

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{R_o}{R + R_o}, \Rightarrow R = R_o\frac{U_1}{U_2}(1 - \frac{U_2}{U_1}) = R_o\frac{U_1 - U_2}{U_2} = 1.0 \cdot 10^6\frac{1000 - 10/\sqrt{2}}{10/\sqrt{2}} = 140\text{M}\Omega = \textbf{Svar} \tag{31}$$

Notera att detta är en mycket stor resistans. Vi kan nu bestämma C vi får

$$C = \frac{C_oR_o}{R} = 40 \cdot 10^{-12}\frac{1 \cdot 10^6}{140 \cdot 10^6} = \frac{2}{7} \cdot 10^{-12} = 0.29\text{pF} = \textbf{Svar} \tag{32}$$

Vilket är en mycket liten capacitans.



4a) Modell 3 är inastt istället för dioden. Inför spänningen $U_{pq} > 0$. Vi kan nu använda KCL i p för att bestämma U_{pq} och där med strömmarna i respektive gren. Vi börjar med att antaga att det går en ström genom dioden. Vi får att $I = I_1 + I_2$, låt oss nu bestämma strömmarna för att se om det faktiskt går en ström i genom dioden.

$$I_1 = \frac{U_{pq}}{R},\ I_2 = \frac{U_{pq} - U_0}{r} \tag{33}$$

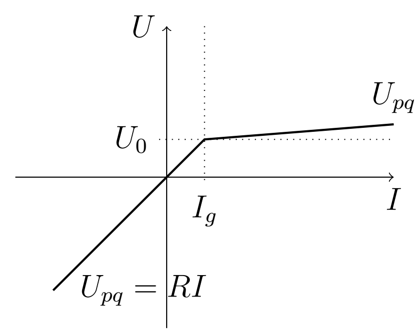
Vi ser att om $U_{pq} > U_0$ så är $I_2 > 0$ och den ideala dioden släpper igenom strömmen. Men om $U_{pq} < U_0$ får vi att $I_2 = 0$, $I_1 = I$. Låt oss uttrycka U_{pq} i I och se vad som händer

$$I = \frac{U_{pq}}{R} + \frac{U_{pq} - U_0}{r} \Rightarrow U_{pq} = \frac{R}{R + r}(U_0 + rI) \tag{34}$$

vilket ger oss brytpunkten för strömmen:

$$0 < U_{pq} - U_0 = \frac{R}{R + r}(U_0 + rI) - U_0 = \frac{r}{r + R}(RI - U_0) \tag{35}$$

Dvs om spänningsfallet över R är större än U_0 för dioden kommer det att gå en ström i dioden. Vi har alltså två regioner:



$$I < U_0/R \Rightarrow U_{pq} = RI,\ (I_2 = 0). \tag{36}$$

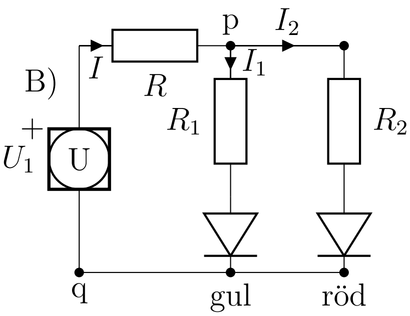
$$I > U_0/R \Rightarrow U_{pq} = \frac{R}{R + r}(U_0 + rI), (I_2 > 0) \tag{37}$$

Vi får strömmen $I_g = U_0/R$ som den ström som anger gränsen när strömm börjar flyta igenom dioden.

4b) Om $r \to 0$ får vi i (37) att $U_{pq} = U_0$ för $I > U_0/R$. Dvs diodspänningen är oförändrad oavsett hur vi ändrar I ovanför I_g. Detta är en bra approximation av vad som sker i föregående uppgift eftersom $r \ll R$ så efter I_g stiger kurvan mycket långsamt. Faktum är att om man gör en serieutveckling i r/R får vi att

$$\frac{R}{R+r} = \frac{1}{1+r/R} \approx (1 - \frac{r}{R} + \ldots), \text{ vilket ger } U_{pq} \approx (1 - \frac{r}{R})U_0 + rI_0 + \ldots \tag{38}$$

Vi ser att koefficienten i kurvan $y = kx + m$ efter I_g är r för (4a) och 0 i den idealiserade approximationen som vi betraktar i detta fall (4b).



4c) Vi inför noderna pq. Vi använder model 2 för att ta reda på vad U_{pq} bör vara vi får KVL för vardera grenen om $U_{pq} > \max(U_{\text{gul}}, U_{\text{röd}}) = 2.1V$:

$$I_1 = \frac{U_{pq} - U_{\text{gul}}}{R_1}, \quad I_2 = \frac{U_{pq} - U_{\text{röd}}}{R_2} \tag{39}$$

Genomför vi potential vandring från q genom spänningskälla U_1 till p får vi

$$U_1 - IR = U_{pq} \tag{40}$$

KCL ger $I = I_1 + I_2$. Vi har nu 4 ekvationer och flera okända: U_{pq}, R, R_1, R_2, I. Vi har 5 okända och fyra ekvationer. En av dessa storheter kommer alltså att vara en fri parameter. Det enklaste är att välja U_{pq} som fri parameter, vi väljer $U_{pq} = 4.0V$, och får

$$R_1 = \frac{U_{pq} - U_{\text{gul}}}{I_1} = \frac{4.0 - 2.1}{20 \cdot 10^{-3}} = 95\Omega, \ R_2 = \frac{4.0 - 1.6}{20 \cdot 10^{-3}} = 120\Omega. \tag{41}$$

Vi har att $I = I_1 + I_2 = 30\text{mA}$, vilket ger att

$$R_1 = \frac{U_1 - U_{pq}}{I} = \frac{6.0 - 4.0}{30 \cdot 10^{-3}} = 66\Omega \tag{42}$$

Enklaste lösningen hade förmodligen varit att välja $R = 0$, dvs inget motstånd R och sedan satt $U_{pq} = U_1$.
