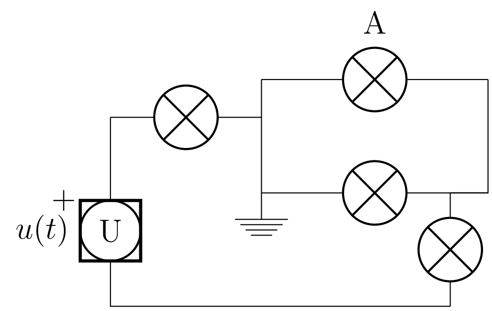
Tentamen i Elkretsanalys för EI1100/EI1102 20110113, 14-19

Hjälpmedel: Miniräknare. Examinator: Lars Jonsson
Endast en uppgift per blad. Godkänt vid 50%. Namn och personnummer på varje blad.

Förståelseuppgifter



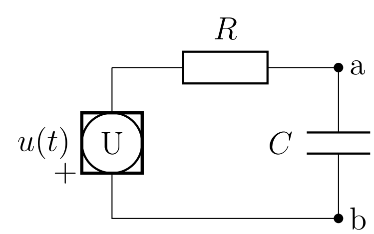
1) (5p) Givet växelströmskretsen till höger.
a) Hur förändras ljusintensiteten hos de tre kvarvarande lamporna om lampa A skruvas ur sin sockel?
b) Hur förhåller sig de tre kvarvarande lampornas ljusintensiteter till varandra?
Som vanligt antar vi att lamporna är rent resistiva och ljusintensiteten är proportionell mot den aktiva effekten. Alla lampor är identiska. **Motiveringen** är viktig för poängerna. Uttryck förhållandena mellan ljusintensiteterna explicit.

2A) (1p) Vid lösning av problem med begynnelsevillkor för spolar och kondensatorer är *kontinuitet* viktigt. Vilken/vilka storheter är kontinuerlig för en spole? och för en kondensator?

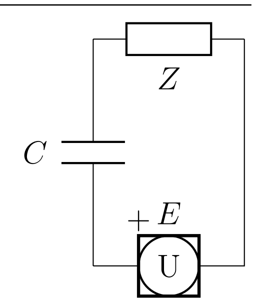
2B) (2p) Antag att vi har en bredbandig spänningssignal med intressant information på 1.0 kHz–1.0 MHz och brus omkring 50 Hz. Hur kan vi filtrera bort bruset? **Rita och dimensionera** en lämplig krets. Vi vill vara säkra på att 50 Hz bruset är ordentligt bortfiltrerat och väljer därför en gränsfrekvens som är 500 Hz, välj komponenter så att detta uppfylls. **Reflektera över och motivera** eventuella fördelar alternativt nackdelar med att välja gränsfrekvens på 500 Hz istället för på 100 Hz om man vill filtrera bort 50 Hz. Ledning: Ett lämpligt första ordningens filter är tillräckligt.

Beräkningsuppgifter

2C) (2p) Över en ideal spole med $L = 3.0$mH är växelströmsspänningens effektivvärde 10 mV och fasvinkel är $\pi/5$ rad. Vad blir då strömmen i tidsdomän? Använd cosinus som referens. Frekvensen 1.0kHz.



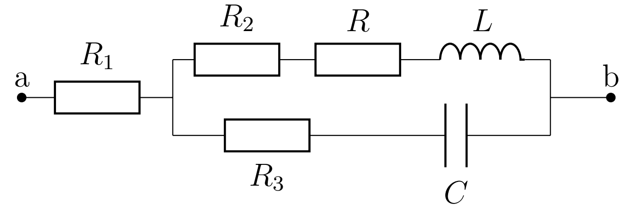
3) (5p). Givet $u(t) = U_0 \cos(\omega t + \alpha)$ V i kretsen till höger.
a) Bestäm en ekvivalent tvåpol med komplex källa och impedans för hela kretsen med avseende på nodparet ab.
b) Anslut en last med impedans Z_L mellan noderna a och b (parallellt med kondensatorn). **Bestäm** Z_L så att maximal effektutveckling erhålls i lasten. **Vad** blir den komplexa effekten i lasten? **identifiera** aktiv och reaktiv del.



4) (5p) I kretsen här bredvid har vi en växelspänningskälla, en kondensator och en okänd *passiv* impedans Z. Man har uppmätt följande effektivvärden $|E| = 10$ V, $|U_C| = 6$ V över kondensatorn, och $|U_Z| = 9$ V över den okända impedansen. Utifrån frekvens och avläst kapacitans får man att $(\omega C)^{-1} = 150\text{k}\Omega$.
a) Vilken/vilka möjliga impedanser representerar den okända impedansen i kretsen? Ange realdel och imaginärdel! (Motivering!)
b) Vilken aktiv effekt utvecklas i den okända impedansen?
Ledning: Använd grafiska metoder, strömmens fas är en bra referens. Några trigonometriska satser finns i slutet av tentan.

---

5) (5p) Antag att kretsen ska användas som en del i en växel-ström/-spännings krets.

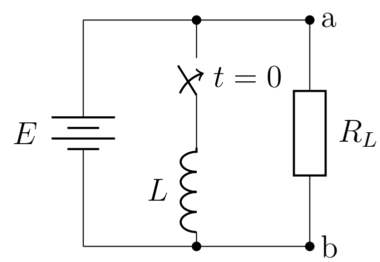


a) Beräkna Z_{ab} och *verifiera* att det erhållna uttrycket har rätt dimension.

b) Givet $R_1 = 1.5\ \Omega$, $R_2 = 0.60\ \Omega$, $L = 1.0\ \mu\mathrm{H}$, $R_3 = 1.0\ \Omega$. Bestäm R och C samt motsvarande Z_{ab} så att uttrycket Z_{ab} blir rent resistivt.

---

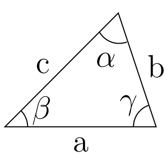
6) (5p) I kretsen till höger finns en last, R_L som är bräcklig och inte klarar av snabba förändringar i temperatur då den termiska expansionskoefficienten är stor och vid snabba temperaturförändringar kan lasten brista. Temperaturen i lasten är beroende av utvecklad momentana effekten samt temperaturen i omgivningen enligt Newtons lag för avkylning. För att långsamt stänga av effekten i lasten föreslår en student som inte läst elkrets att vi använder en spole och avstängningskontakt enligt figur. Batteriet (E, R) har den inre resistansen R.



a) Beräkna spänningen över lasten $u_{ab}(t)$ *och* strömmen genom både spolen och lasten som funktion av tiden före och efter $t = 0$.

b) Antag att batteriets inre resistans är $R = 0.10\ \Omega$ och lasten är $3.0\ \mathrm{M}\Omega$. Välj storlek på spolen så att den (momentana) effekten i lasten, $p(t) = i(t)u(t)$, är 100 gånger mindre än initialtillståndet $(t = 0)$ först 100 sekunder efter kontakten stängts.

c) Finns det något/några problem med den föreslagna kretsen? Om detta är fallet föreslå en bättre konstruktion. Motiveringen är viktig för poängen.



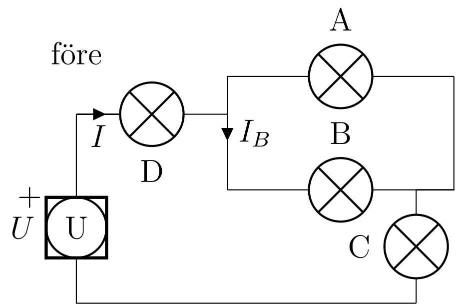
Trianglar:

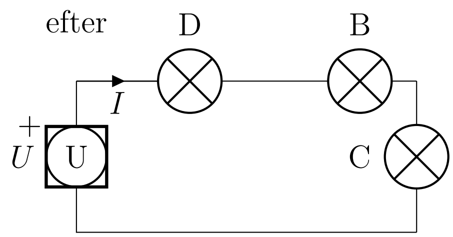
Sinussatsen: $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$, Cosinussatsen: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.

Lösningsförslag till Tentamen i Elkretsanalys 20110113

Examinator: Lars Jonsson

Förståelseuppgifter

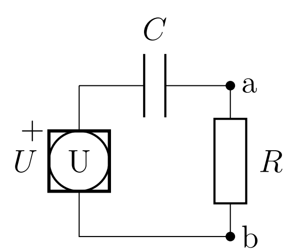




1) (5p) Vi söker ljusintensiteter hos lamporna med och utan A. Låt en lampas resistans vara R. Aktiva effekten är $P = |I|^2 R$. Vi är därför intresserade av strömmen genom lamporna.
Före lampa A skruvas ut har lampa C och D samma ström, medan A och B har hälften av denna ström (KCL, $R_A = R_B$). Detta ger att Lamporna D och C lyser 4 gånger så starkt som B och A före. Vi får att kretsens resistans är $2R + R//R = 2.5R$ och $I = U/(2.5R)$ samt $I_B = U/(5R)$.
Efter lampa A skruvas ut har lamporna B, C och D alla samma ström genom sig och har därför med lika stor ljusstyrka. **Delsvar b**.

Strömmen efter A är borta och bryter strömmen i den kretsen blir $I = E/(3R)$, vilket gör att vi kan beräkna ljusintensitetsförändringarna efterfrågade i a. Vi ser därför att ljusintensiteten i D och C blir svagare efter A tagits bort, dvs ljusintensiteten blir proportionella mot $E^2/(9R)$ jämfört med $E^2/(6R)$ (2.5^2 avrundat till 6). Medan ljusintensiteten i B blir starkare efter A tagits bort, $E^2/(9R)$ mot $E^2/(25R)$. **Delsvar a**.

2A) (1p) Kondensator: laddning och spänning $q = Cu(t)$ är kontinuerliga. Spole: Flöde och ström: $\phi = Li(t)$ är kontinuerliga.



2B) (2p) Låt spänningssignalen moduleras med källan $U = U(\omega)$. För att filtrera bort bruset på låga frekvenser använder vi ett lågpassfilter. Ett exempel är ritat. Vi plockar ut den filtrerade signalen som U_{ab} mellan polerna ab.

För kretsen får vi från spänningsdelning att

$$U_{ab} = U\frac{\mathrm{j}\omega RC}{1+\mathrm{j}\omega RC}, \quad RC = \frac{1}{\omega_g} = \frac{1}{2\pi f_g} \tag{1}$$

Där vi också identifierat gränsfrekvensen. (Vi kunde lika gärna använt en RL-krets). Gränsfrekvensen här är $f_g = 500$Hz, vilket ger att vi kan välja $R = 100\Omega$ och $C = 3.2\mu$F för att få den önskade gränsfrekvensen och båda är rimligt stora kvantiteter.

Om vi väljer gränsfrekvensen vid 100Hz istället kommer bruset att dämpas mycket mindre än om vi har gränsfrekvensen 500Hz. Detta ser vi om vi betraktar

$$|H| = \left|\frac{U_{ab}}{U}\right| = \frac{\omega/\omega_g}{\sqrt{1+(\omega/\omega_g)^2}} \tag{2}$$

Det visar sig att dämpningen $|H|$ vid f=50Hz är 0.10 (-20dB) för $f_g = 500$Hz-filtret, medan den bara är 0.45 (-6dB) om vi väljer $f_g = 100$Hz. Påverkan av signalen är liten i båda fallen, mindre än 1dB dämpning vi 1kHz.

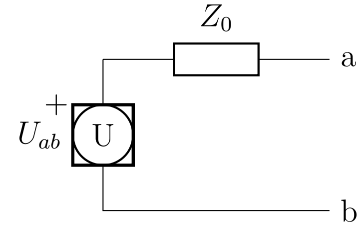
Beräkningsuppgifter

2C) (2p) Vi har den komplexa spänningen i effektivvärdesskalan $U = U_0 e^{j\alpha}$V, där $U_0 = 10$mV och $\alpha = \pi/5$rad. Impedansen är $Z_L = j\omega L$, $\omega = 2\pi \cdot 10^3$rad/s. L=3.0mH. Ohms lag ger $I = U/(j\omega L)$ vilket på polär form blir ($-j = e^{-j\pi/2}$) $I = U_0/(\omega L)e^{j(\alpha-\pi/2)}$. I tidsdomän får vi strömmen genom omvandlingsformeln:

$$i(t) = \mathrm{Re}(I\sqrt{2}e^{j\omega t}) = \frac{\sqrt{2}U_0}{\omega L}\cos(\omega t + \alpha - \pi/2) \approx 750\cos(6300(\mathrm{s})^{-1}t - 3\pi/10)\mu\mathrm{A} \quad (3)$$

---

3) (5p) Spänningskällan i komplex effektivvärdesskala blir $U = (U_0/\sqrt{2})e^{j\alpha}$V. Spänningsdelning ger tomgångspänningen (notera plusset i källan!) $U_{ab} = -U/(1 + j\omega CR) = -U_0 e^{j\alpha}/(\sqrt{2}(1 + j\omega CR))$. Inre impedansen blir $Z_0 = R//Z_C = R/(1 + j\omega CR)$. **Delsvar a**



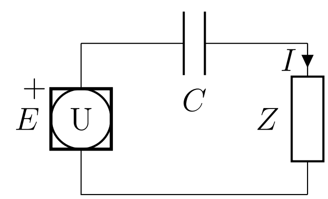
Lasten ska, för maximal effektutveckling, vara $Z_L = Z_0^*$. Den komplexa effektutvecklingen blir

$$P = UI^* = |I|^2 Z_L = \left|\frac{U_{ab}}{Z_0 + Z_0^*}\right|^2 Z_0^* = \frac{|U|^2}{1+(\omega CR)^2}\frac{(1+(\omega CR)^2)^2}{4R^2}\frac{R(1+j\omega CR)}{1+(\omega CR)^2} = \frac{|U|^2}{4R} + j\omega C|U|^2$$
$$= \frac{|U_0|^2}{8R} + j\frac{1}{8}\omega C|U_0|^2 \quad (4)$$

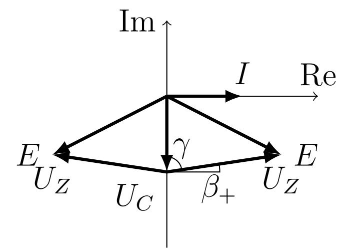
Där vi har använt att $Z_0^* = R(1 + j\omega CR)/(1 + (\omega CR)^2)$, att samt $Z_0 + Z_0^* = 2R/(1 + (\omega CR)^2)$. Den aktiva effekten är $|U_0|^2/(8R)$, och den reaktiva effekten är $\omega C|U_0|^2/8$. **Delsvar b.**

---

4) (5p) Vi har från Ohms lag att $U_C = I/(j\omega C)$ och $U_Z = IZ$. Detta ger att $|I| = |U_C j\omega C|$. KVL ger att den komplexa summan av alla spänningar ska summera till noll. Dvs vi har tre vektorer som ska summera till noll. Hur orienterar vi triangeln, vi använder ledningen anger strömmen som referens fas och lägger denna på reella axeln får vi att U_C ska vara $-\pi/2$ rad (-90°) från denna riktning. Till denna vektor summerar vi U_Z vilket ska vara lika med E. Vi får två möjligheter (se figur). Vi är intresserade av Z's amplitud och fas. Amplituden får vi direkt genom $|Z| = |U_Z|/(\omega C|U_C|) = 9 \cdot (150 \cdot 10^3)/6 =$225kΩ. Vi får att $\beta = \arg Z = \pi/2 - \gamma$. Ur cossinussatsen får vi att



$$\cos\gamma = \frac{|U_C|^2 + |U_Z|^2 - |E|^2}{2|U_C||U_Z|} \approx 0.157 \Rightarrow \gamma = \pm 1.41 \text{ rad} \quad (5)$$



Vilket ger $\beta_+ = 0.158$rad (9.06°) och $\beta_- = 2.98$ rad (172°). Vilket ger de två lösningarna som är uppritade. Impedansen blir därför

$$Z = |Z|e^{\beta_\pm} = 225 \cdot 10^3(\pm 0.987 + j0.157) \approx (\pm 220 + j35) \text{ k}\Omega. \quad (6)$$

Motivering: Negativ resistans kan inte skapas i en passiv krets vi får därför att **Delsvar a:** $Z = (220 + j35)$ kΩ.

Aktiv effekt i Z blir $P = \mathrm{Re}\,|I|^2 Z = |j\omega C U_C|^2 \,\mathrm{Re}\, Z = 0.35$mW. **Delsvar b)**. Vi räknar med tre siffrors noggrannhet eftersom vi vill kunna svara med 2 siffrors noggrannhet, på samma sätt som uppgiften är formulerad.

---

5) (5p) Vi beräknar impedansen som $Z_{ab} = R_1 + (R_2 + R + \mathrm{j}\omega L) // (R_3 + 1/(\mathrm{j}\omega C))$ vilket blir (**Delsvar a**)

$$Z_{ab} = R_1 + \frac{(R_2 + R + \mathrm{j}\omega L)(R_3 + 1/(\mathrm{j}\omega C))}{R + R_2 + R_3 + \mathrm{j}\omega L + 1/(\mathrm{j}\omega C)} \tag{7}$$

Vi ska också verifiera att detta har rätt dimension. Vi noterar att R_j alla har dimensionen Ω, på samma sätt har $\mathrm{j}\omega L$ och $1/(\mathrm{j}\omega C)$ dimensionen Ω. Vi ser att uttrycket går att skriva som $\Omega + \Omega^2/(\Omega + \Omega)$ vilket reduceras till Ω vilket alltså har rätt dimension.

Att göra detta resistivt är det samma som att göra det frekvensoberoende (kap 5.6.3 i Pettersson). Vi använder oss av metoden beskriven kapitlet 5.6.3, introducera en reell frekvensobeoende konstant k:

$$\frac{(R_2 + R + \mathrm{j}\omega L)(R_3 + 1/(\mathrm{j}\omega C))}{R + R_2 + R_3 + \mathrm{j}\omega L + 1/(\mathrm{j}\omega C)} = k \tag{8}$$

Vi sätter på gemensamt bråkstreck och får:

$$(R_2 + R + \mathrm{j}\omega L)(\mathrm{j}\omega C R_3 + 1) - k((R + R_2 + R_3)\mathrm{j}\omega C - \omega^2 LC + 1) = 0 \tag{9}$$

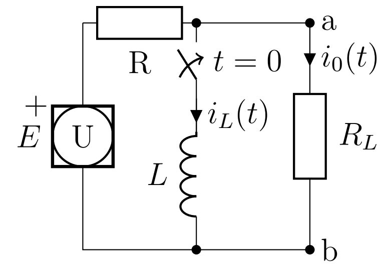
Om vi samlar potenser av ω får vi

$$\omega^0(R_2 + R - k) + \mathrm{j}\omega(L + CR_3(R_2 + R) - kC(R + R_2 + R_3)) + (\mathrm{j}\omega)^2(LCR_3 - kLC) = 0 \tag{10}$$

Varje koefficient till ω^p måste vara noll, vi får ur ω^2 koefficienten att $k = R_3$, och ur ω-termen att $L = CR_3^2$ vilket ger att $C = 1.0\mu\mathrm{F}$ och ur ω^0-termen att $R = k - R_2 = R_3 - R_2 = 0.40\Omega$, uttrycket för $Z_{ab} = R_1 + k = 2.5\Omega$. **delsvar b**

---

6) Vi börjar med att ersätta batteriet med en ideal spänningskälla och en inre resistans, se figur till höger. Före $t = 0$ har vi $i_0 = E/(R + R_L)$ och $i_L = 0$ och $u_L = 0$, $u_{ab} = ER_L/(R + R_L)$.



För att bestämma $t > 0$. Vi använder nodanalys i a med b som referens för att bestämma $u_{ab}(t)$.

$$\frac{u_{ab}(t) - E}{R} + \frac{u_{ab}(t)}{R_L} + i_L(t) = 0 \tag{11}$$

Relationen mellan ström och spänning i spolen är $u_L = Ldi_L/dt$. Här är $u_L = u_{ab}$ för $t > 0$ (vad är den för $t \leq 0$?). Vi ersätter därför u_L med u_{ab} och får följande differential ekvation:

$$L(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_L})\frac{di_L}{dt} + i_L = \frac{E}{R} \Rightarrow i_L(t) = \frac{E}{R} + A\mathrm{e}^{-t/\tau},\ \tau = \frac{(R + R_L)L}{RR_L} \tag{12}$$

Vi bestämmer A genom initialvillkoret, $i_L(0) = 0$ vilket ger att $A = -E/R$. Spänningen $u_{ab} = ER_L/(R + R_L)\mathrm{e}^{-t/\tau}$, och strömmen genom lasten blir $i_0 = u_{ab}/R_L = E/(R + R_L)\mathrm{e}^{-t/\tau}$. Vi får **delsvar a:**

$$i_L(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \frac{E}{R}(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}) & t \geq 0 \end{cases}, u_{ab}(t) = \begin{cases} \frac{ER_L}{R+R_L} & t \leq 0 \\ \\ \frac{ER_L}{R+R_L}\mathrm{e}^{-t/\tau} & t \geq 0 \end{cases}, i_0(t) = \begin{cases} \frac{E}{R+R_L} & t \leq 0 \\ \\ \frac{E}{R+R_L}\mathrm{e}^{-t/\tau} & t \geq 0 \end{cases}. \tag{13}$$

Den momentana effekten (ej medeleffekt) ska sjunka 100 gånger på 100 sekunder. Vi får effekten att bli $p(t) = u(t)i(t) = A\mathrm{e}^{-2t/\tau}$, där A är en konstant som vi kan bestämma. Vi får att

$$\frac{p(t = 100s)}{p(t = 0)} = \mathrm{e}^{-2\cdot 100/\tau} = \frac{1}{100} \Rightarrow \frac{200}{\tau} = \ln 100 \Rightarrow \tau = L\frac{(R + R_L)}{RR_L} \approx \frac{L}{R} = 10L = \frac{200}{\ln 100} \tag{14}$$

Om vi löser ekvationen för induktansen får vi $L = 4.3$H. **(delsvar b).** (Obs! notera att urladdningshastigheten väsentligen beror på den inre resistansen)

Problem med kretsen: Induktansen är mycket stor vi brukar ha μH och mH. Vidare notera att vi vid stationärt tillstånd $t \gg \tau$ har kortslutit batteriet. Batteriet kommer att laddas ur. Båda dessa problem är designproblem med kretsen. En bättre krets är att ersätta spolen med en kondensator, och flytta kontakten till ovanför batteriet (se figur). Då bryter vi batteriets ström (sparar batteri), och den uppladdade kondensatorn gör att strömmen laddas långsamt ur kondensatorn, tidskonstanten blir $\tau = 1/(R_LC)$ (beror bara på lastens resistans), det är enkelt att välja $C = 7.7$nF (en rimlig storlek) för att erhålla de önskade kretsegenskaperna. **delsvar c)**