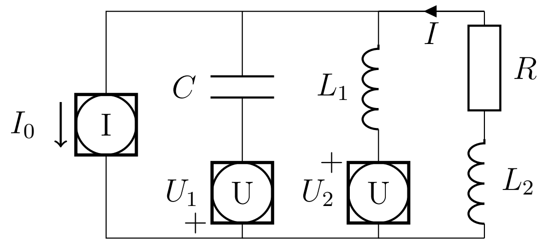
Tentamen i Elkretsanalys för EI1100/EI1102 20110607 kl. 8-13

Hjälpmedel: Miniräknare. Examinator: Lars Jonsson
Endast en uppgift per blad. Godkänt vid 50%. Namn och personnummer på varje blad.

---

1) (5p) (a) Bestäm strömmen I genom L_2. (b) Verifiera att strömmen har rätt dimension.

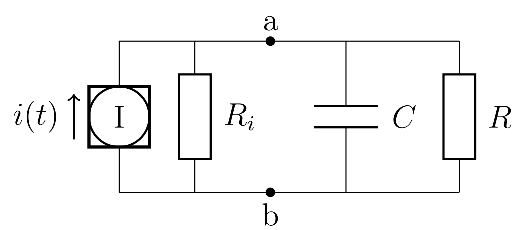


---

2 (3p) Givet den komplexa spänningen $U = (8.0 + 6.0\text{j})$V i effektivvärdesskalan, med period 0.010s. **Bestäm** den ekvivalenta tidssignalen $u(t)$, samt tidssignalens toppvärde u_{max}.

---

3) (6p) En signalgenerator ansluts till ett oscilloskop. Oscilloskopet är märkt med värdena R och C på ingången. Signalgeneratorn kan modelleras med en Norton ekvivalent, med tomgångsströmmen $i(t) = i_0 \sin(\omega t + \alpha)$ och en inre resistans R_i. Den ekvivalenta kretsen ser ut som i figuren till höger. Oscilloskopets port är markerat med noderna a, b.

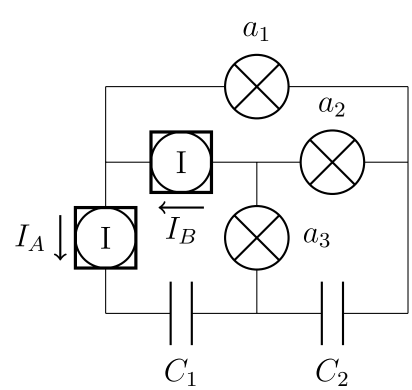


3a) Betrakta överföringsfunktionen som fås av kvoten mellan den komplexa strömmen genom kapacitansen C och den komplexa representationen av tomgångströmmen. **Vilken** typ av filter beskriver överföringsfunktionen? **Bestäm** gränsfrekvensen (eller gränsfrekvenserna)

3b) **Bestäm** en Thévenin ekvivalent *på hela kretsen* med avseende på polerna ab. **Ange** den komplexa inre impedansen hos Thevenin kretsen **samt**, spänningskällans tidsrepresentation. Tips: använd $\arg ab = \arg a + \arg b$.

---

4) (5p). I kretsen till höger finns tre identiska lampor, markerade med a_1, a_2 och a_3, vilka alla modelleras som rent resistiva. Kondensatorerna har kapacitansen $C = C_1 = C_2$, och frekvensen är vald så att absolutbeloppet av impedansen hos de ideala kondensatorerna är lika stort som till beloppet som lampornas resistans.

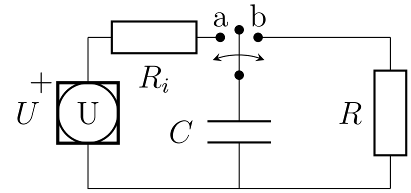


4a) Markera och bestäm mask-strömmarna i kretsen.

4b) Betrakta komponenten C_1. Hur förhåller sig fasen på spänningen över C_1 till fasen hos strömmen som går igenom C_1? Var noga med att definiera riktningar för strömmar och spänningar som du använder.

---

5) (5p) En del av en digital till analog omvandlare (A/D omvandlare) är en så kallad sample-and-hold (S/H) krets. Se figuren till höger. S/H kretsen används för att förhindra att den analoga signalen förändras under digitaliseringen. Det kritiska elementet i S/H-kretsen är dess kondensator. Vi antar att den analoga kretsen kan representeras av en Thevenin ekvivalent krets med tomgångspänningen $U = 6.00$V och inre resistans $R_i = 150\Omega$.



Kondensatorn kopplas först till nod a för att laddas upp. Kapacitansen bör väljas så liten som möjligt dels för att uppladdningen ska gå fort och dels för att den ska ha liten påverkan på den analoga kretsen. Kondensatorn kopplas där efter till nod b där den urladdas via A/D omvandlarens ingångsresistans $R = 12.0\text{M}\Omega$. Tiden för urladdning är kritisk och måste passa till A/D omvandlarens omvandlings tid, dvs så att spänningen inte sjunker för mycket under digitaliseringsprocessen.

5a) Antag att kondensatorn är urladdad, dvs det är första samplingen som studeras. Dimensionerna kondensatorn så att strömmen genom denna är nära men mindre än 40.0μA 10.0ns efter anslutningen till nod a. Observera, här antar vi för enkelhets skull att spänningen U är en konstant likspänning under tiden samplet tas.

5b) Brytaren kopplas nu om till nod b. Beräkna hur lång tid A/D omvandlaren har på sig att digitalisera signalen. Kondensatorns spänning får inte sjunka mer än 1.00% under startvärdet.

---

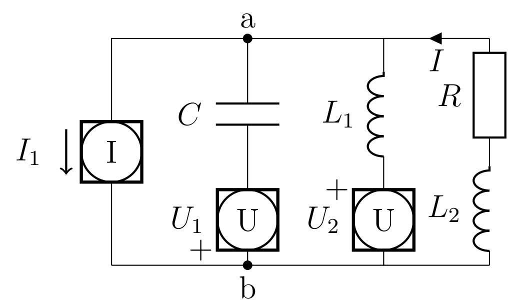
6) (6p) I detta problem finns följande tre komponenter, alla med två-poler: Två identiska växelsspänningskällor med tomgångsspänningen U och inre resistans R_i, samt en last med impedans $Z = R_L + \mathrm{j}X_L$. Obs: I alla figurer är det viktigt att markera +-tecknet på spänningskällorna.

6a) Koppla lasten till en av källorna (U, R_i) och bestäm den till lasten levererade **aktiva effekten** P_{0L} samt, lastens **skenbar effekt** och den komplexa effektens **fasvinkeln**, α.

6b) **Hur** ska källorna och lasten kopplas samman för att maximera den levererade aktiva effekt till lasten? **Vad** blir denna maximala aktiva effekt? Observera att lasten är given och kan ej förändras, inga andra komponenter än de två källorna (U, R_i) och lasten Z får användas. Använd att $R_i = 1.0\Omega$, $R_L = 15\Omega$, och $X_L = 10\Omega$.

Lösningsförslag till tentamen i Elkretsanalys för EI1100/EI1102

Datum 2011-06-07. Examinator: Lars Jonsson



1a) Det enklaste sättet att lösa detta problem är med nodanalys. Det finns två noder, a och b, vi använder nod b som referens och jordar denna. Potentialen i nod a kallar vi V. Om vi gör nodanalys i nod a får vi följande relation som en beskrivning av alla utgående strömmar

$$I_1 + \frac{V+U_1}{1/(\mathrm{j}\omega C)} + \frac{V-U_2}{\mathrm{j}\omega L_1} + \frac{V}{R+\mathrm{j}\omega L_2} = 0$$

Vi löser ovanstående ekvation för V och får

$$V\left(\mathrm{j}\omega C + \frac{1}{\mathrm{j}\omega L_1} + \frac{1}{R+\mathrm{j}\omega L_2}\right) = \frac{U_2}{\mathrm{j}\omega L_1} - I_1 - \mathrm{j}\omega C U_1 \tag{1}$$

$$V = \frac{\mathrm{j}\omega L_1(R+\mathrm{j}\omega L_2)}{R+\mathrm{j}\omega(L_1+L_2)-\omega^2 L_1 C(R+\mathrm{j}\omega L_2)}\left(\frac{U_2}{\mathrm{j}\omega L_1} - I_1 - \mathrm{j}\omega C U_1\right) \tag{2}$$

Notera att strömmen I fås genom potential vandring från a till b genom grenen som innehåller L_2:

$$-I = \frac{V}{R+\mathrm{j}\omega L_2}. \tag{3}$$

Genom att sätta in V får vi:

$$I = \frac{\mathrm{j}\omega L_1(I_1+\mathrm{j}\omega C U_1)-U_2}{R+\mathrm{j}\omega(L_1+L_2)-\omega^2 L_1 C(R+\mathrm{j}\omega L_2)} \text{ (}\textbf{Svar a}\text{)} \tag{4}$$

1b) Notera att R, ωL_1 och ωL_2 har dimension Ω, medan ωC har dimension Ω^{-1}. Vi ersätter spänningarna U_1 och U_2 med V och strömmen med A och får

$$[I] = A = \frac{\Omega(A+\Omega^{-1}V)+V}{\Omega+\Omega+\Omega+\Omega^{-1}\Omega(\Omega+\Omega)} \tag{5}$$

När vi räknar dimensioner har vi relationerna $\Omega \pm \Omega = \Omega$, $\Omega^{-1}\Omega = 1$ Förenklar vi uttrycket samt kommer ihåg dimensionerna i Ohms lag A=Ω^{-1}V får vi

$$[I] = A = \frac{\Omega(A+A)+V}{\Omega} = A + \frac{V}{\Omega} = A \tag{6}$$

Dimensionen är korrekt. (**Svar b**)
I ursprungstexten av tentan var det inte explicit att det var den komplexa strömmen som skulle beräknas. De fall som missförstått detta kommer att granskats, och korrigerats efter visad förståelse av problemet.

2 Givet den komplexa spänningen $U = (8.0 + 6.0\mathrm{j})\mathrm{V}$ i effektivitetsskalan, med period 0.010s. För att bestämma den ekvivalenta tidssignalen $u(t)$ bestämmer vi först $|U|$ och $\arg U$, vi får:

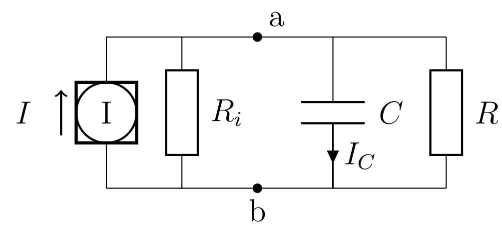
$$|U| = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10\mathrm{V},\ \alpha = \arg U = \arctan\frac{6}{8} = 0.64\mathrm{rad} \tag{7}$$

Vi har perioden $T = 0.010\mathrm{s}$ vilket ger frekvensen $f = 1/T = 100\mathrm{Hz}$ och vinkel frekvensen $\omega = 2\pi f = 200\pi \approx 630\mathrm{rad/s}$. Vi får tidssignalen:

$$u(t) = \mathrm{Re}(\sqrt{2}|U|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha + \mathrm{j}\omega t}) \approx 14\cos(t \cdot 630[\mathrm{rad/s}] + 0.64)\mathrm{V} \tag{8}$$

(**delsvar**). Vi ser att amplituden på cosinus signalen har toppvärde $u_{max} \approx 14\mathrm{V}$ (**delsvar, 2 siffrors noggrannhet**). Notera att avsaknad av enhet samt noggrannhet har resulterat i poängavdrag.

3a) Vi ska jämföra den komplexa strömmen genom kondensatorn I_C med signalgeneratorns komplexa ström I. I figuren har jag ritat ut dessa komplexa strömmar. Strömmen I_C fås genom strömdelning:



$$I_C = I\frac{\mathrm{j}\omega C}{1/R + 1/R_i + \mathrm{j}\omega C}. \tag{9}$$

Vi förenklar och finner att

$$\frac{I_C}{I} = \frac{\mathrm{j}\omega C R_i R}{R + R_i + \mathrm{j}\omega C R R_i}. \tag{10}$$

Notera att när ω blir stor kommer $I_C/I \to 1$, samt att när $\omega \to 0$ blir kvoten 0. Filtret är ett högpass filter (**delsvar**).

Gränsfrekvensen kallar vi f_g, och vi har $\omega_g = 2\pi f_g$. Gränsfrekvensen fås när absolutbeloppet på överföringsfunktionen $H(\omega) = I_C/I$ avtagit till $1/\sqrt{2}$ dvs, vi har relationen

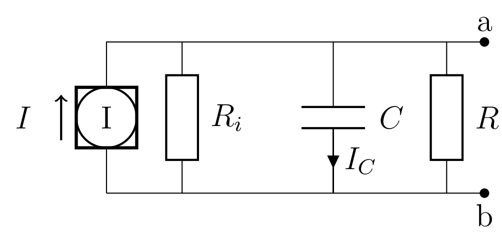
$$\frac{1}{2} = \left|\frac{I_C}{I}\right|^2 = \frac{(\omega_g C R R_i)^2}{(R + R_i)^2 + (\omega_g C R R_i)^2} \tag{11}$$

Om vi löser för ω_g får vi

$$\omega_g = 2\pi f_g = \frac{R + R_i}{C R R_i},\ \text{dvs}\ f_g = \frac{R + R_i}{2\pi C R R_i}\ (\textbf{delsvar}). \tag{12}$$

Notera gränsfrekvensen f_g anges i Hz, medan vinkelfrekvensen anges i rad/s.

3b) Vi ska bestämma en Thévenin ekvivalent med avseende på polerna ab. Detta görs lättast om vi ritar om kretsen lite, se figur. Observera att hela kretsen ser ut som en Norton ekvivalent, med strömmen I. Den inre impedansen Z fås om vi nollställer strömkällan (avbrott) och beräknar impedansen map ab: $Z = R_i//R//Z_C$, där $Z_C = 1/\mathrm{j}\omega C$. För att få en Thevenin ekvivalent använder vi relationen $U = ZI$ Den inre impedansen i Thevenin ekvivalenten blir



$$Z = \frac{R R_i}{R + R_i + \mathrm{j}\omega C R R_i}\ (\textbf{delsvar}). \tag{13}$$

och den komplexa spänningen blir

$$U = IZ = I\frac{RR_i}{R + R_i + \mathrm{j}\omega CRR_i} \tag{14}$$

Vi ska bestämma ett tidsuttryck för U. Vi noterar att signalgeneratorn har strömmen $i(t) = i_0 \sin(\omega t + \alpha)$, vilket har motsvarande komplexa representation i effektivvärdesskalan: $I = (i_0/\sqrt{2})\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\alpha - \pi/2)}$, då

$$\mathrm{Re}(\sqrt{2}I\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}) = \mathrm{Re}(i_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\alpha-\pi/2+\omega t)}) = i_0\cos(\omega t + \alpha - \pi/2) = i_0 \sin(\omega t + \alpha) = i(t). \tag{15}$$

För att bestämma $u(t)$ är det enklast om vi vet $|U|$ och U's fasvinkel β. Vi kan då representera $U = |U|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta}$. Vi får

$$|U| = |I|\frac{RR_i}{\sqrt{(R+R_i)^2 + (\omega CRR_i)^2}}. \tag{16}$$

Fasvinkeln bestämmer vi också ur (14). Vi får $\arg U = \arg I + \arg Z$. Fasvinkeln för I är $\beta_1 := \alpha - \pi/2$ och fasvinkeln för Z är

$$\arg\frac{RR_i}{R + R_i + \mathrm{j}\omega CR_iR} = \arg(RR_i) - \arg(R + R_i + \mathrm{j}\omega CRR_i) = 0 - \arctan\frac{\omega CRR_i}{R+R_i} =: \beta_2 \tag{17}$$

Vi får att fasvinkeln blir $\beta = \beta_1 + \beta_2$.

Vi får tidsuttrycket genom:

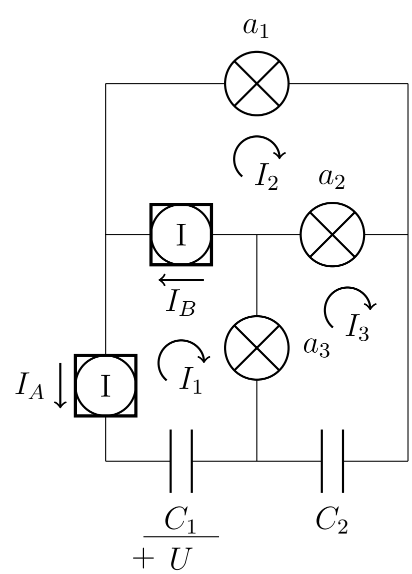
$$u(t) = \mathrm{Re}(\sqrt{2}U\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}) = \mathrm{Re}(\sqrt{2}|U|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta + \mathrm{j}\omega t}) = \sqrt{2}|U|\cos(\omega t + \beta) \tag{18}$$

Där

$$\sqrt{2}|U| = i_0\frac{RR_i}{\sqrt{(R+R_i)^2 + (\omega CRR_i)^2}}, \text{ och } \beta = \beta_1 + \beta_1 = \alpha - \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{\omega CRR_i}{R+R_i} \tag{19}$$

delsvar. Notera att eftersom $R + R_i > 0$ ligger alltid vinkeln β_2 mellan $\pm\pi/2$ och där är arctan entydig.

4a) Låt oss kalla lampornas resistans R, impedansen för en kondensator är $Z_C = 1/(\mathrm{j}\omega C)$, enligt instruktionen skulle frekvensen väljas så att $R = |Z_C|$, dvs $1/(\omega C) = R$ och vi får $Z_C = -\mathrm{j}R$. Dvs impedanserna motsvarande kondensatorerna C_1 och C_2 är $Z_{C_1} = Z_{C_2} = -\mathrm{j}R$.



I figuren är maskströmmarna I_1, I_2 och I_3 markerade. För att bestämma dem noterar vi att maskströmmen I_1 och källan I_A går genom samma gren, och är motsatt riktade dvs $I_1 = -I_A$. Om vi tittar på maska 2 ser vi att maskströmmarna genom strömkällan I_B består endast av maskströmmarna I_1 och I_2, med definitionsriktningar får vi

$$I_2 - I_1 = I_B \ \Rightarrow I_2 = I_B + I_1 = I_B - I_A. \tag{20}$$

För att bestämma strömmen i den tredje maskan potential vandrar vi i kretsen och får

$$-I_3Z_{C_2} - R(I_3 - I_1) - R(I_3 - I_2) = 0 \Rightarrow I_3(-\mathrm{j}R + 2R) = -R(I_1 + I_2) \Rightarrow \tag{21}$$

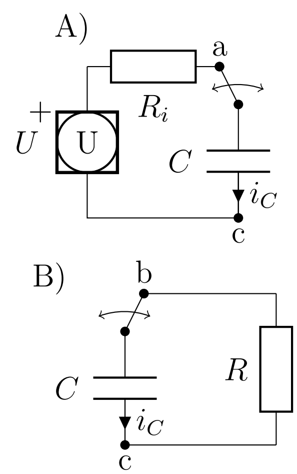
$$I_3 = \frac{I_B - 2I_A}{2 - \mathrm{j}} \ (\textbf{Svar}) \tag{22}$$

4b) Strömmen genom kondensator C_1 är strömmen I_A, med given riktning. Potential fallet U blir

$$U = Z_{C_1} I_A = -\mathrm{j} R I_A \tag{23}$$

och vi får fasförhållandet:

$$\arg U = \arg(-\mathrm{j}R) + \arg(I_A) = -\frac{\pi}{2} + \arg I_A. \text{ (\textbf{Svar})} \tag{24}$$



5a) Vi ritar om fallen med brytaren i läge a se figur A). Vi ska dimensionera kondensatorn så att strömmen är nära men mindre än 40.0μA efter 10ns. Vi potential vandrar och får

$$U - R_i i_C - u_a = 0, \tag{25}$$

Här är u_a spänningen över kondensatorn, vilket blir det samma som potentialskillnaden mellan a och c. Vi kommer ihåg relationen mellan ström och spänning i en kondensator $i_C = C du_a/dt$. Vi får differential ekvationen:

$$\frac{du_a}{dt} + \frac{1}{R_i C} u_a = \frac{U}{R_i C}, \tag{26}$$

Då kondensatorn var urladdad vid start är $u_a(t = 0) = 0$. Lösningen blir

$$u_a(t) = U(1 - \mathrm{e}^{-t/(R_i C)}). \tag{27}$$

Vi har villkor på strömmen, vi beräknar strömmen till

$$i_C(t) = C\frac{du_a}{dt} = \frac{U}{R_i}\mathrm{e}^{-t/(R_i C)}. \tag{28}$$

Nu kan vi lösa ut kapacitansen:

$$-\ln\frac{R_i i_C(t)}{U} = \frac{t}{R_i C} \;\Rightarrow\; C = \frac{-t}{R_i \ln\frac{R_i i_C(t)}{U}} \tag{29}$$

Vid tiden t=10ns skulle strömmen vara nära eller mindre än 40μA. Vi vet också att $R_i = 150\Omega$och $U = 6.00$V. Vi sätter in värden och får

$$C = \frac{-10^{-8}}{150\ln\frac{150\cdot 40\cdot 10^{-6}}{6}} \approx 9.65\cdot 10^{-12} = 9.65\text{pF} \tag{30}$$

Detta är en approximerad siffra, låt oss kolla att vi verkligen har mindre än 40.0μA för denna kapacitans:

$$i_C(t) = \frac{6.00}{150}\exp\left(\frac{-10.0}{150\cdot 9.65\cdot 10^{-12}}\right) \approx 39.97\cdot 10^{-6}A. \tag{31}$$

Vi ser att i_C är under 40.0μA som önskat, därför är denna kapacitans är acceptabel. **Svar 5a:** C=9.65pF.

5b) Brytaren kopplas nu om till nod b får vi figur B). Kondensatorn är initialt laddad med spänningen $u_b(t=0) = u_0$. Vi ska beräkna hur lång tid A/D omvandlaren har på sig att digitalisera signalen, dvs att spänning inte får sjunka mer än 1.00% under startvärdet. Vi potential vandrar från c genom kondensatorn till b och så vidare genom resistorn tillbaka till c:

$$u_b(t) + Ri_C = 0 \tag{32}$$

Återigen har vi $i_C = Cdu_b/dt$, och får

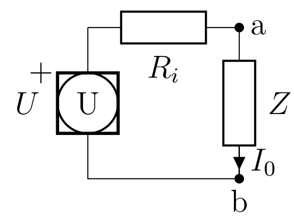
$$\frac{1}{RC}u_a(t) + \frac{du_b}{dt} = 0 \tag{33}$$

Löser vi ekvationen med initialvillkoret $u_b(t=0) = u_0$ får vi: $u_b(t) = u_0 \mathrm{e}^{-t/(RC)}$. Vi vill veta tiden, t_* då kondensatorspänningen har sjunkit med 1.00% av ursprungsvärdet. Dvs vi löser för t_* och får

$$u_b(t_*) = 0.99u_0 = u_0\mathrm{e}^{-t*/(RC)} \Rightarrow t_* = -RC\ln 0.99 = -12.0\cdot 10^6 \cdot 9.65\cdot 10^{-12}\ln 0.99 = 1.16\mu\mathrm{s} \tag{34}$$

Svar 5b.

6a) För att bestämma den komplexa effekten $P = UI^* = |I|^2 Z$ i lasten $Z = R_L + \mathrm{j}X_L$, räknar vi ut strömmen (potential vandring)



$$I_0 = \frac{U}{R_i + Z} = \frac{U}{R_i + R_L + \mathrm{j}X_L} \tag{35}$$

och får den komplexa effekten:

$$P = |I_0|^2 Z = \left|\frac{U}{R_i + R_L + \mathrm{j}X_L}\right|^2 Z = \frac{|U|^2}{(R_i+R_L)^2 + X_L^2} Z \tag{36}$$

Den aktiva effekten, som här kallas $P_{0L} = \mathrm{Re}\, P$ blir

$$P_{0L} = \left|\frac{U}{R_i + R_L + \mathrm{j}X_L}\right|^2 \mathrm{Re}\, Z = \frac{|U|^2}{(R_i+R_L)^2 + X_L^2} R_L \text{ } (\textbf{delsvar}) \tag{37}$$

Skenbar effekt blir

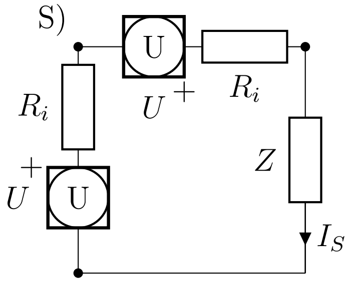
$$P_S = |P| = \frac{|U|^2|Z|}{(R_i+R_L)^2 + X_L^2} = \frac{|U|^2\sqrt{R_L^2 + X_L^2}}{(R_i+R_L)^2 + X_L^2} \text{ } (\textbf{delsvar}) \tag{38}$$

Fasvinkeln på den komplexa effekten blir

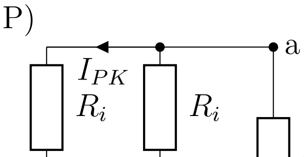
$$\alpha = \arg P = \arg |I_0|^2 + \arg Z = 0 + \arctan\frac{X_L}{R_L} \text{ } (\textbf{delsvar}) \tag{39}$$

6b) Två Thévenin ekvivalenter och en last alla är tvåpoler och kan kopplas på ett antal olika sätt, baserade runt serie och parallell koppling. I 5b söker vi kopplingen som maximal levererad aktiv effekt till källan: Detta betyder att vi måste jämföra levererad effekt för serie-koppling och för parallell koppling av komponenterna. Det finns en frihet att växla hög respektive låg potential nod för Thévenin kretsarna. Vi börjar med att rita kretsarna, se Figurerna S) för seriekoppling och P) för parallell koppling.

S)



P)



Låt oss börja med att beräkna strömmen genom lasten Z i kretsen med seriekoppling (potential vandring)

$$U - R_i I_S + U - R_i I_S - Z I_S = 0 \;\Rightarrow \tag{40}$$

$$I_S = \frac{2U}{2R_i + Z} = \frac{2U}{2R_i + R_L + \mathrm{j}X_L} \tag{41}$$

Vi noterar att om en av spänningarna varit kopplade åt andra hållet hade strömmen blivit noll. Det känns naturligt att låta källorna samarbeta för att få mycket aktiv effekt. Vi får den aktiva effekten till att bli

$$P_A^S = \operatorname{Re} P^S = \operatorname{Re}(|I_S|^2 Z) = |I_S|^2 \operatorname{Re} Z = \frac{4|U|^2 R_L}{(2R_i + R_L)^2 + X_L^2}. \tag{42}$$

I kretsen med parallellkopplade källor har vi också låtit källorna samarbeta (annars blir strömmen genom lasten noll). Nod analys med nod b som referens ger att potentialen V i nod a uppfyller ekvationen (summan av strömmarna är noll)

$$\frac{V-U}{R_i} + \frac{V-U}{R_i} + \frac{V}{Z} = 0 \Rightarrow V\left(\frac{2}{R_i} + \frac{1}{Z}\right) = \frac{2U}{R_i} \Rightarrow V = \frac{2UZ}{2Z + R_i} \tag{43}$$

Aktiv effekt i lasten blir

$$P_A^P = \operatorname{Re}\left(\frac{|V|^2}{Z^*}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{4|U|^2 Z Z^*}{Z^* |2Z + R_i|^2}\right) = \frac{4|U|^2 \operatorname{Re} Z}{(2R_L + R_i)^2 + 4X_L^2} = \frac{4|U|^2 R_L}{(2R_L + R_i)^2 + 4X_L^2} \tag{44}$$

Vi sätter in värden och får att $P_A^S = 0.15|U|^2 > 0.044|U|^2 = P_A^P$, dvs seriekopplingen levererar maximal aktiv effekt till lasten. **Svar:** figur S) med aktiv effekt i lasten $P_A^S = (0.15|U|^2)$W.
