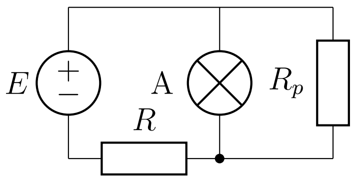
Tentamen i Elkretsanalys för EI1102, EI1100, 11-10-19, 14-19

Hjälpmedel: Papper och penna. **Endast en** uppgift per blad. Examinator: Lars Jonsson
Godkänt om (A ≥25%)&(B ≥25%)&($A + B$ ≥50%). Namn och personnummer på varje blad.

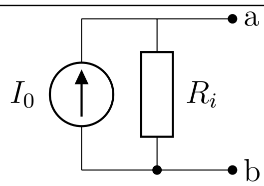
Del A – Likström och transienter

1) [5p] En verklig kondensator laddas ur även när den inte är ansluten till en yttre krets. Detta beror på att det går en läckström mellan kondensatorplattorna. Antag att en kondensatorn med kapacitansen C initialt är uppladdad, och spänningen är då v_0. På tiden T sjunker spänningen till v_1. Bestäm storleken på den resistans som läckströmmen urladdas genom, i de givna termerna. Obs: Rita kretsen, inför storheter, härled lämplig differentialekvationen, samt den efterfrågade relationen för resistansen. Ledning: En vanlig kretsmodell för en verklig kondensator består av en kondensator parallellkopplad med en resistor.

2) [5pt] E är en likspänning. Som vanligt approximerar vi lampan med en resistor $R_L = 2R$, ljusstyrkan är proportionell mot effekten som förbrukas i lampan.
a) Bestäm spänningen över lampan till tecken och storlek.
b) Om $R_p = nR$, där n ligger i intervallet $[1, 10]$. För vilket n lyser lampan starkast.



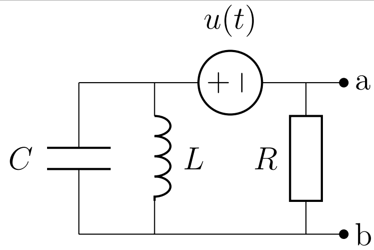
3a) [1p] Vilken last ska kopplas mellan ab för att få maximal effektutveckling i lasten.



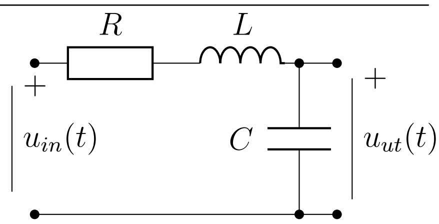
Del B – Växelström

3b) [3p] Låt $U = 2e^{j\pi/3}$V, $Z = (1 + j)\Omega$, $I = U/Z$. Bestäm stömmens amplitud och fas. Rita spänningen och strömmen i det komplexa talplanet och markera vinklar och amplituder. Vilken ligger först, strömmen eller spänningen? Ledning: alla storheter är angivna i topvärdesskalan.

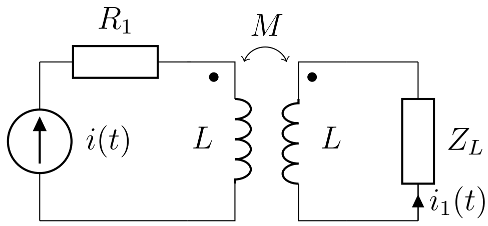
4) [5pt] Kretsen består av en växelspänningskälla med vinkelfrekvensen ω. Låt $u(t)$ motsvara den komplexa spänningen U.
a) Bestäm en komplex Norton tvåpol map ab. Dimensionskontrollera uttrycken.
b) Låt $U = U_0 e^{j\pi}$, och antag att $\omega^2 LC > 1$ och att $U_0 > 0$. Bestäm amplituden och fasen på kortslutningsströmmen från a till b.



5) [5pt] Inför komplexa spänningar U_{in}, U_{ut}.
a) Bestäm överföringsfunktionen $H(\omega) = U_{ut}/U_{in}$.
b) Vilken typ av filter är detta? Ge ω_0. Skissa Bode-diagrammets amplitud-del. Var noggrann med amplituder och avtagande/växande per dekad. Antag $2L/(R^2C) \leq 1$.

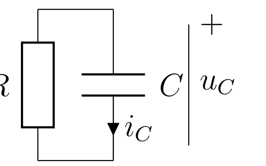


6) [6p] Strömkällan $i(t) = I_0 \sin(\omega t)$A, $I_0 > 0$. Lasten är $Z_L = R_L + jX_L$.
a) Bestäm den komplexa strömmen $I_1(\omega)$ som motsvarar $i_1(t)$ till amplitud och fas, antag att M är samverkande, vilket är det samma som punktnotationen indikerar med de givna strömmarna.
b) Bestäm den aktiva effekten som förbrukas i lasten.
c) Vad är den i lasten aktiva effektens maximum om endast X_L kan varieras?



Lösningsförslag till Tentamen i Elkretsanalys för EI1102/EI1100, 20111019

1) Vi potentialvandrar ett varv i kretsen och får $u_C + i_C R = 0$. För en kondensator har vi relationen $i_C = C du_C/dt$, vilket ger differential ekvationen:



$$u_C + RC\frac{du_C}{dt} = 0 \Rightarrow u_C(t) = K\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}. \tag{1}$$

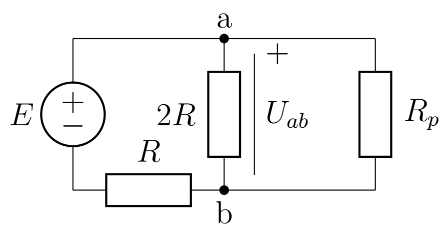
Vi vet att vid tiden $t = 0$ är $u_C(t = 0) = v_0$ vilket ger att vi kan identifiera $K = v_0$. Vid tiden T har vi att $u_C(T) = v_1 = v_0\mathrm{e}^{-T/(RC)}$. Vi kan nu uttrycka R i de kända storheterna:

$$v_1 = v_0\mathrm{e}^{-T/(RC)} \Rightarrow \frac{v_0}{v_1} = \mathrm{e}^{T/RC} \Rightarrow R = \frac{T}{C\ln(\frac{v_0}{v_1})}. \tag{2}$$

(Svar).

---

2) Vi har ersatt lampan med resistansen $2R$. Vi söker spänningen över lampan. Notera att $2R//R_p = \frac{2RR_p}{2R+R_p}$ om vi gör spänningsdelning får vi



$$U_{ab} = E\frac{2R//R_p}{2R//R_p + R} = E\frac{2RR_p}{2RR_p + R(2R + R_p)} = E\frac{2R_p}{3R_p + 2R} \tag{3}$$

(Svar a).

b) Mest effekt får vi i lampan när R_p är så stor som möjligt, dvs för $n = 10$. För att bevisa detta titta vi på effekten med $R_p = nR$:

$$p = \frac{1}{2R}U_{ab}^2 = \frac{E^2}{2R}\left(\frac{2n}{3n+2}\right)^2. \tag{4}$$

Om vi tittar på p som en funktion av n får vi en kritiska punkt vid:

$$0 = \partial_n p(n) = \frac{E^2}{2R}\left(\frac{8n}{(3n+2)^2} - \frac{12n^2}{(3n+2)^3}\right) = \frac{E^2}{2R}\frac{16n}{(3n+2)^3} \Rightarrow n = 0. \tag{5}$$

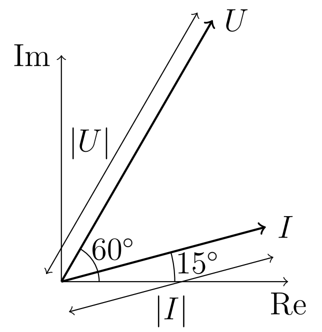
Dvs den har inga kritiska punkter i det aktuella intervallet och max måste ligga i en av kanterna $n = 1$ eller $n = 10$. Vi testar:

$$p(n=1) = \frac{E^2}{2R}\left(\frac{2}{5}\right)^2 < p(n=10) = \frac{E^2}{2R}\left(\frac{20}{32}\right)^2 = \frac{E^2}{2R}\left(\frac{5}{8}\right)^2 \tag{6}$$

(Svar b) $n = 10$.

3a) Svar, lasten resistansen R_L ska väljas lika stor som den intre resistansen: $R_L = R_i$.

3b) Vi har



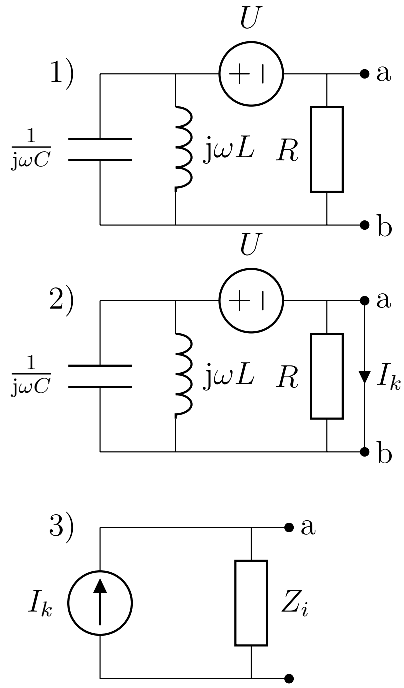
$$I = \frac{U}{Z} = \frac{2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/3}}{1+\mathrm{j}}. \Rightarrow |I| = \frac{2}{\sqrt{1+1}} = \sqrt{2},$$

$$\arg I = \frac{\pi}{3} - \arg 1 + \mathrm{j} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}. \tag{7}$$

Lasten är induktiv så strömmen ligger efter spänningen, vilket också kan ses i diagrammet.

---

4) Vi behöver Nortonkällans ström (kortslutningsströmmen från a till b se figur 2) I_k och dess inre impedans Z_i kopplade enligt figur 3) nedan.



Z_i: Kretsen har endast en fri källa, nollställer vi den får vi

$$Z_i = Z_{ab} = R//(\mathrm{j}\omega L)//\frac{1}{\mathrm{j}\omega C} = \frac{\mathrm{j}\omega LR}{R(1-\omega^2 LC)+\mathrm{j}\omega L} \tag{8}$$

Dimensionskontroll $[\omega L] = \Omega$, $[\omega C] = \Omega^{-1}$, $[R]$=Ω. Vi får

$$[Z_i] = \Omega = VL,\ HL = \frac{\Omega^2}{\Omega(1+\Omega\cdot\Omega^{-1})+\Omega} = \Omega \tag{9}$$

Höger led och vänster led stämmer överens. **(delsvar)**.

I_k: Kortslutningen av den passiva grenen med R innebär att R faller bort det går ingen ström genom den. Vi får (icke-passiv konvention)

$$I_k = \frac{-U}{\mathrm{j}\omega L//\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}} = -\frac{U(1-\omega^2 LC)}{\mathrm{j}\omega L} = \frac{U(\omega^2 LC-1)}{\mathrm{j}\omega L} \tag{10}$$

Dimensionskontroll av strömmen:

$$[I_k] = A = VL,\ HL = \frac{V(1-\Omega\Omega^{-1})}{\mathrm{j}\omega L} = \frac{V}{\Omega} = A \tag{11}$$

Höger led och vänster led har samma dimension. **(delsvar)**

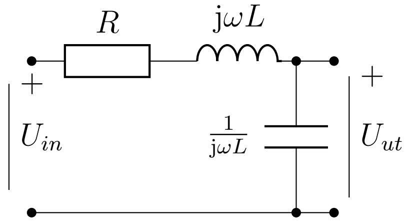
Vi får strömamplituden och fasen till:

$$|I_k| = \frac{|U||1-\omega^2 LC|}{\omega L} = \frac{(\omega^2 CL-1)U_0}{\omega L} > 0,$$
$$\arg I_k = \arg(\omega^2 LC-1) + \arg(U_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi}) - \arg(\mathrm{j}\omega L) = 0 + \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.\ \left(= \frac{-3\pi}{2}\right) \tag{12}$$

Då $\omega^2 LC > 1$. Noter att vinklarna α, α' där $\alpha' = 2\pi + \alpha$, båda pekar i samma riktning i komplexa talplanet.

---

5) Vi får att U_{ut} genom spänningsdelning:



$$U_{ut} = U_{in}\frac{\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}}{\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}+R+\mathrm{j}\omega L} = U_{in}\frac{1}{1-\omega^2 LC+\mathrm{j}\omega CR} \tag{13}$$

Vi får överföringsfunktionen **(Svar a)**.

$$H(\omega) = \frac{U_{ut}}{U_{in}} = \frac{1}{1-\omega^2 LC+\mathrm{j}\omega RC} = \frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}+\mathrm{j}\frac{\omega}{Q\omega_0}} \tag{14}$$

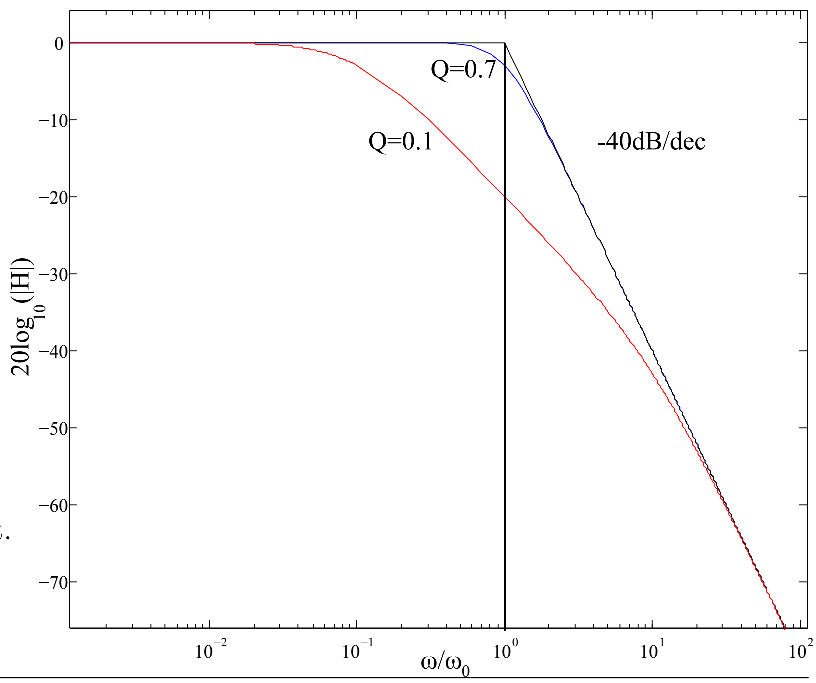
Där vi använt att $\omega_0^2 = 1/(LC)$ och $Q = \frac{1}{R}\sqrt{L/C}$, och skrivit om funktionen på standard form.

b) Vi har

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2})^2 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2 Q^2}}} = \frac{1}{\sqrt{(1-y)^2 + y/Q^2}} = g(y)$$

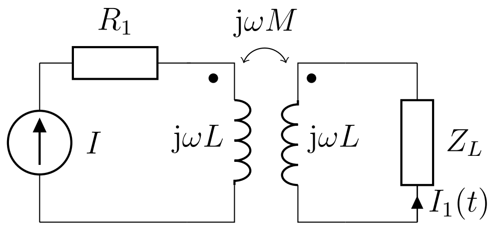
där vi infört $y = (\omega/\omega_0)^2$.

Notera att $|H(0)| = 1$ och att $|H(\omega)| \to (\omega/\omega_0)^{-2}$ när $\omega \gg \omega_0$ vilket innebär att det är ett lågpass filter. Vi får amplituderna $20\log_{10}|H(0)| = 0$ och $20\log_{10}((\omega/\omega_0)^2) = -40\log_{10}(\omega/\omega_0)$ dvs -40dB/dekad. Se figur för Bode-diagrammet. Enligt ovan är $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. **(Svar)**.



---

6) Vi söker I_1 till amplitud och fas. Vi böjar med att översätta våra storheter till frekvensdomän. Då $\sin(\omega t) = \cos(\omega t - \pi/2)$ får vi att $I = I_0 e^{-j\pi/2}$. Vi skriver KVL för sekundärkretsen:



$$-I_1 Z_L - j\omega L I_1 - j\omega M I = 0 \Rightarrow I = \frac{-j\omega M I}{Z_L + j\omega L} \tag{15}$$

Amplitud och fas blir **(Svar a)**

$$|I_1| = \frac{\omega|M|I_0}{\sqrt{R_L^2 + (X_L + j\omega L)^2}}, \quad \arg I_1 = \arg(-j\omega M) + \arg I - \arg(R_L + j(X_L + \omega L)) =$$
$$-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{X_L + \omega L}{R_L} = -\pi - \arctan(\frac{X_L + \omega L}{R_L}) \tag{16}$$

b) Aktiv effekt får vi som $P = \mathrm{Re}(UI^*)/2 = |I_1|^2 \,\mathrm{Re}\, Z_L/2 = |I_1|^2 R_L/2$, vilket blir **(Svar b)**

$$P = \frac{(\omega M I_0)^2 R_L}{2(R_L^2 + (X_L + \omega L)^2)} \tag{17}$$

c) Genom att variera X_L får vi olika stora aktiva effekter, låt P_X vara maximat vid variation av X_L. Vi ser att för $X_L = -\omega L$ försvinner den kvadratiska termen i nämnaren, dvs maximum blir **(Svar c)**

$$P_X = \frac{(\omega M I_0)^2}{2R_L}. \tag{18}$$