Hemuppgift nr 1 av 4, deadline 9/9 2011

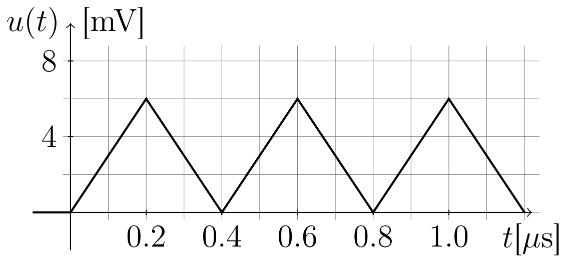
Inlämning av lösta uppgifter sker under första övningslektionen den 9/9. **Kamraträttning** sker 9/9, sista timmen på övningen. Obs: För att uppgiften ska tillgodoräknas måste du delta i både att lösa uppgiften (före aktuellt datum) och i rättningen det aktuella datumet.
När du löser uppgiften, tänk på att **uppgifterna ska kamraträttas**, skriv därför en tydlig lösning som går lätt att följa, med tydliga bilder, introducera storheter, vad som söks, lösningsgång samt väl förenklade svar på delfrågorna.
Häfta ihop lösningsbladen och **skriv namn** på framsidan. Examinator: Lars Jonsson

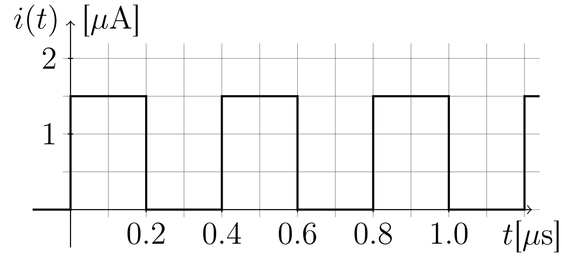
---

1 av 5 En intressant storhet är aktiv effekt, också kallad medeleffekt. Givet effekten $p(t)$ beräknas den aktiva effekten, P enligt

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,\mathrm{d}t, \tag{1}$$

där T är signalens period. En signal är periodisk med period T om $p(t) = p(t+T)$ för alla t.





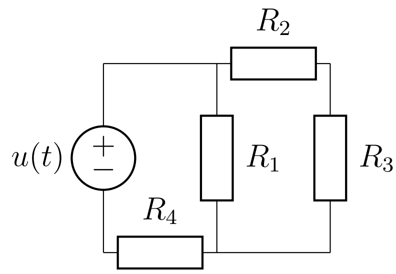
a) En harmonisk (dvs cos eller sin-) ström $i(t) = I\cos(\omega t + \alpha)$, och en harmonisk spänning $u(t) = U\cos(\omega t + \beta)$ passerar en komponent. Bestäm medeleffekten genom komponenten. Tips 1: För harmoniska signaler gäller att perioden är relaterad till frekvensen som $T = 1/f$, och vinkelfrekvensen $\omega = 2\pi f$. Tips 2: Använd cosinussatsen.

b) Betrakta figurerna med spänningen $u(t)$ och strömmen $i(t)$. Bestäm 1) perioden för $u(t)$ och $i(t)$. Vad får $p(t)$ för period? Beskriv $i(t)$ och $u(t)$ som funktioner av t. Vad blir den aktiva effekten om denna spänning och ström uppmäts genom en resistor (passiv konvention). Kolla storlekar och dimensioner.

c) Hur mycket energi har resistorn mottagit efter 0.4μs i kretsen uppgift b).

---

2 av 5) Betrakta kretsen till höger. Följande uppgift ger möjlighet att öva på ett antal grundläggande begrepp som vi har gått igenom.



a) *Markera* med riktning de tre intressanta strömmarna i kretsen och *beräkna* dem till storlek och riktning. [Obs! förenkla uttrycken]

b) Kontrollera att ovanstående beräknade uttryck för strömmarna har rätt dimension. Ledning använd Ohm's lag.

c) Markera de två punkter där det är intressant att kontrollera Kirchhoffs strömlag, *kontrollera* utifrån de uträknade strömmarna om Kirchhoffs strömlag är uppfylld.

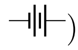
d) Beräkna potentialfallet över respektive resistor, kalla dem $u_1, \ldots u_4$. Kom ihåg att definiera vilken ände av resistorn som du antar att den har högre potential.

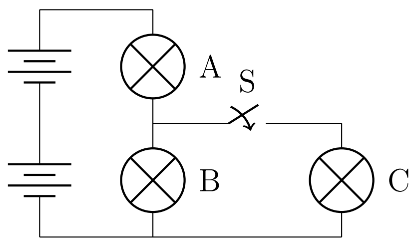
e) Välj nu $R_1 = R_2 = 5.0\Omega$, $R_3 = 20\Omega$, $R_4 = 11\Omega$ och $u(t) = 10V$. Bestäm det numeriska värdet för potentialfallen över resistorerna.

f) Stämmer Kirchhoffs spänningslag? Testa två olika fall.

g) Bestäm effektutvecklingen i spänningskällan.

---

3 av 5) Koncept fråga. Givet två identiska batteri (symbol: ) vardera med spänningen 1.5V. Betrakta de tre identiska lamporna. Vardera kan ses som en resistans på 2Ω. Ljusintensiteten kan med god approximation antagas vara proportionell mot den effekt som förbrukas i lampan. Ökar eller minskar följande storheter när kontakten S stängs. [Beräkna lämplig storhet före och efter, och kommentera]



a) Intensiteten hos lamporna A och B.

b) Intensiteten hos lampan C.

c) Vad händer med den total ljusintensiteten från kretsen.

d) Strömmen som dras från källorna.

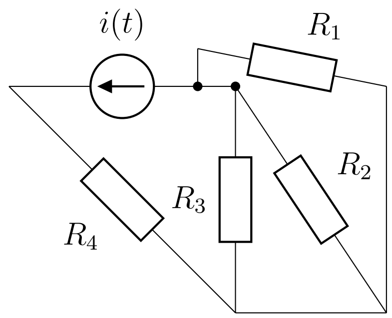
e) Spänningsfallet över A och B.

f) Förbrukad effekt i lampa B.

Ledning: I detta fall betrakta batterierna som ideala spänningskällor.

---

4 av 5) Spänningsdelning/strömdelning

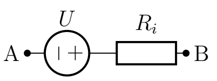


a) Rita om kretsen till en bra form där det är lätt att se vad som är parallellkopplat och seriekopplat. För att underlätta för dig och den som rättar introducera namn a,b,c... på viktiga noder i originalkretsen och deras position på din förenklade krets.

b) Låt $R_1 = R_2 = R_3 = 3.0\Omega$, $R_4 = 19\Omega$ och $I = 0.60A$. Bestäm spänning och ström över/genom alla resistorer. Använd om det är tillämpbart ström och/eller spänningsdelning. [Var noga med antalet siffror].

c) Bestäm effekten som strömgeneratorn levererar.

---

5 av 5 Design En av de mest vanliga sorterna av resistorer är E12 serien den finns i storlekar 10, 12, 15, 18, 22, 27, 33, 39, 47, 56, 68, 82, var efter den fortsätter på 100, 120Ω etc. Var och en av dessa resistorer har 10% osäkerhet, dvs 10Ω-resistorn kan vara mellan 9Ω och 11Ω. I denna uppgift har vi resistorer från 10Ω till 10MΩ, enligt E12-serien. Givet ett icke-idealt batteri med tomgångsspänningen $U = 20\text{V}$ och med den inre resistansen $R_i = 1.1\Omega$. (Dvs vi kan se batteriet som kretsen mellan polerna A och B: 

)

Design problem: Skapa en krets med två valfria E12 resistorer kopplade till batteriets poler A och B, så att spänningen över den ena resistorn blir 4.0V. Dvs vi vill komma nära 4.0V. 1) Hur nära den önskade spänningen kommer du? kolla med resistorernas max/min värde vad spänningen blir som max och min, inkluderar ditt intervall 4.0V? 2) Hur bör du välja dina resistorer för att få en låg effektförbrukning? 3) Om du har 3 resistorer. Hur ska du koppla dem så att du kommer närmare den önskade spänningen? Vad är osäkerheten i spänningen?

Använd spänning och/eller strömdelning för att visa att din krets uppfyller ovanstående specifikation. Notera att du har endast två värdesiffror i detta tal.

Lösning av Hemuppgift nr 1

Lars Jonsson

1.a) Vi ska bestämma medeleffekten: Vi börjar med att titta på effekten $p(t)$, vi får

$$p(t) = IU \cos(\omega t + \alpha) \cos(\omega t + \beta) \tag{1}$$

Perioden T är $T = 1/f = 2\pi/\omega$. Då ω är given ska vi uttrycka T i ω. Vi ska nu integrera p med avseende på t. Då det är klurigt att integrera produkter av cosinus funktioner använder vi oss av ledningen:

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b)) \tag{2}$$

I vårt fall får vi $a = \omega t + \alpha$, $b = \omega t + \beta$

$$p(t) = \frac{1}{2}UI(\cos(2\omega t + \alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)) \tag{3}$$

Nu kan vi integrera, $T = 2\pi/\omega$

$$P = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega} p(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\omega}{2\pi}\left[\frac{\sin(2\omega t + \alpha + \beta)}{2\omega} + t\cos(\alpha - \beta)\right]_0^{2\pi/\omega} = \frac{1}{2}UI\cos(\alpha - \beta) = \textbf{Svar} \tag{4}$$

Cosinustermen kallas här effektfaktor, och som ni ser fasskillnaden mellan ström och spänning viktigt för den aktiva effekten.

1.b 1. Bestäm perioden för u. Vi ser att funktionen upprepar sig efter $T = 0.4\mu$s. Det samma gäller $i(t)$. Om $u(t+T) = u(t)$, och $i(t+T) = i(t)$, för samma T får vi $p(t+T) = u(T+t)i(t+T) = u(t)i(t) = p(t)$, och T är perioden för $p(t)$. **delsvar**

2. Då funktionen upperpar sig efter $t = T = 0.4\mu$s behöver vi bara beskriva $i(t)$ och $u(t)$ för intervallet $[0, 0.4]\mu$s, där efter kan vi bestämma dem genom att flytta en period. Vi får

$$i(t) = \begin{cases} 1.5\mu\text{A}, & 0 \le t \le 0.2\mu\text{s} \\ 0, & 0.2 < t < 0.4\mu\text{s} \end{cases} \quad \textbf{delsvar} \tag{5}$$

För att bestämma $u(t)$ observerar vi att lutningskoefficienten, k är $\Delta y/\Delta x = 6mV/0.2\mu\text{s}{=}30 \cdot 10^3\text{V/s}$. Då 'pyramiden' är symmetrisk får vi

$$u(t) = \begin{cases} 30 \cdot 10^3 t,\ [\text{V}], & 0 \le t \le 0.2\mu\text{s} \\ 12 \cdot 10^{-3} - 30 \cdot 10^3 t,\ [V], & 0.2 < t < 0.4\mu\text{s} \end{cases} \quad \textbf{delsvar} \tag{6}$$

3. Aktiv effekt:

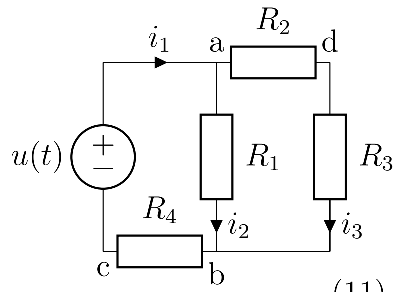
$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{0.4 \cdot 10^{-6}}\int_0^{0.2\cdot 10^{-6}} 1.5 \cdot 10^{-6}(30 \cdot 10^3 t)\,\mathrm{d}t = \frac{1.5}{0.4} 30 \cdot 10^3 \frac{t^2}{2}\bigg|_0^{0.2\cdot 10^{-6}} \tag{7}$$

$$= \frac{45}{0.4} \cdot 10^3 \frac{0.2^2}{2} \cdot 10^{-6} = 2.25 \cdot 10^{-9}\text{W} \approx 2.2\text{nW}\ \textbf{delsvar} \tag{8}$$

1.c Energin får vi genom att räkna ut (kom ihåg att $T = 0.4\mu$s.

$$W = \int_0^T p(t)\,\mathrm{d}t = TP = 0.9 \cdot 10^{-15} J \tag{9}$$

vilket vi fick genom ett trevligt val av tidsperiod som vi ville undersöka.



2.a och c För att beräkna dem använder vi KVL och KCL. I nod a gäller KCL:

$$i_1 = i_2 + i_3 \tag{10}$$

Vi potential vandrar (KVL) från cabc och får:

$$u - i_2 R_1 - i_1 R_4 = 0 \tag{11}$$

och potential vandring badb ger

$$+R_1 i_2 - R_2 i_3 - R_3 i_3 = 0 \tag{12}$$

Den senare ekvationen kan förenklas och ge:

$$i_3 = i_2 \frac{R_1}{R_2 + R_3} \tag{13}$$

Om vi nu använder (10) och resultatet för i_3 får vi att (11) får formen

$$u = R_1 i_2 + R_4(i_2 + i_3) = i_2(R_1 + R_4 + \frac{R_4 R_1}{R_2 + R_3}) \ \Rightarrow i_2 = \frac{u(R_2 + R_3)}{(R_1 + R_4)(R_2 + R_3) + R_1 R_4} \tag{14}$$

delsvar. Ekvation (13) ger

$$i_3 = \frac{R_1}{R_2 + R_3} \frac{u(R_2 + R_3)}{(R_1 + R_4)(R_2 + R_3) + R_1 R_4} = \frac{u R_1}{(R_1 + R_4)(R_2 + R_3) + R_1 R_4} \ \textbf{delsvar} \tag{15}$$

Före vi räknar ut i_1 noterar vi att i nod a och nod c gäller KCL ekvationen (10) så uppgift 2.c är att identifiera att KCL håller, vilket vi gör automatiskt eftersom vi räknar ut i_1 utifrån (10):

$$i_1 = i_2 + i_3 = \frac{u(R_1 + R_2 + R_3)}{(R_1 + R_4)(R_2 + R_3) + R_1 R_4}, \ \textbf{delsvar} \tag{16}$$

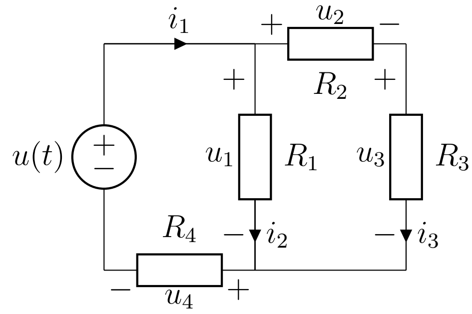
2.b Vi noterar att alla strömmar ser likanade ut. Så vi kollar dimensionen på i_1, de andra följer på precis samma sätt. Här har vi att $[R_k] = \Omega$, för alla $k = 1, 2, 3, 4$. Enligt ekvation (16) får vi:

$$A = [i_1] = \frac{V(\Omega + \Omega + \Omega)}{(\Omega + \Omega)(\Omega + \Omega) + \Omega^2} = \frac{V}{\Omega} = A \tag{17}$$

I näst sista ledet använde vi att Ohms lag $i = u/R$. Vi får att höger och vänster sida av uttrycket har alltså samma dimension. **Svar**

Notera att $\Omega \pm \Omega = \Omega$ när vi räknar dimensioner.

2.d och f Nu när vi känner i_1 till i_4 är det lätt att räkna ut spänningarna genom Ohms lag. Notera att vi måste sätta ut referens riktning. Se figur. Dessa referensriktningar uppfyller alla den passiva konventionen map strömmarna i_1, i_2, i_3. Vi får



$$u_1 = i_2 R_1 = \frac{u(R_2+R_3)R_1}{(R_1+R_4)(R_2+R_3)+R_1R_4}$$
$$u_2 = R_2 i_3 = \frac{uR_1R_2}{(R_1+R_4)(R_2+R_3)+R_1R_4}$$
$$u_3 = R_3 i_3 = \frac{uR_1R_3}{(R_1+R_4)(R_2+R_3)+R_1R_4}$$
$$u_4 = i_1 R_4 = \frac{u(R_1+R_2+R_3)R_4}{(R_1+R_4)(R_2+R_3)+R_1R_4}$$

Sätter vi in $R_1 = R_2 = 5\Omega$ och $R_3 = 20\Omega$ och $R_4 = 11\Omega$ samt $u(t) = 10V$ får vi

$$u_1 = \frac{125u}{455} \approx 2.75,\ u_2 = \frac{25u}{455} \approx 0.55,\ u_3 = \frac{100u}{455} \approx 2.20,\ u_4 = \frac{330u}{455} \approx 7.25. \tag{18}$$

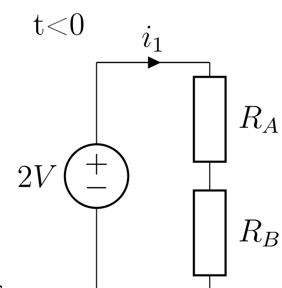
Svar d

KVL över slingan: cabc ger 10-2.75-7.25=0 ok.

KVL över slignan badb ger 2.75-0.55-2.20=0 ok. **Svar f**

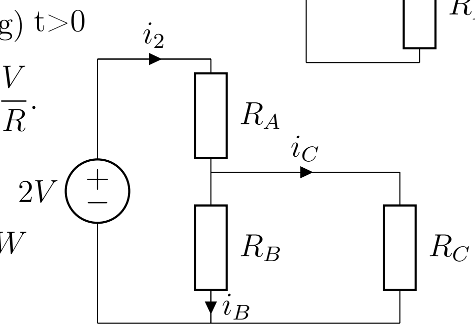
2g Effektutvecklingen i källan är $p = ui_1 = uu_4/R_4 = 10 \cdot \frac{7.25}{11} = 6.59 \approx 6.6$W. **Svar**. Notera att vi endast har två värdesiffror. Vi räknar med typiskt 3-4 värdesiffror, men i svaret anger vi endast antalet värdesiffror som finns i uppgiften, här 2.

3a, b och f 1. Vi betraktar här batterierna som ideala spänningskällor. Seriekoppling av ideala spänningskällor med spänningnen V säger att vi kan ersätta spänningarna med en spänningskälla med värdet $2V$. Vi ritar om kretsen för fallet $t < 0$ och för fallet $t > 0$. Kom ihåg att $R_A = R_B = R_C = R$.



Vi ska i a titta på intensiteten hos lamporna A och B, vi kommer ihåg att det vi vill ha ut är effekten genom dessa element.

För t<0 får vi att strömmen i_1 blir (genom potential vandring)



$$2V - i_1(R+R) = 0,\ \Rightarrow i_1 = \frac{2V}{2R} = \frac{V}{R}.$$

Effekten i lampa A och i lampa B blir:

$$p_A = i_1^2 R_A = [R_A = R] = \frac{V^2}{R} = p_B = 1.12W$$

Båda lamporna upplever samma ström, och har $R_A = R_B = R$.

Vad händer för $t > 0$. Kretsens totala resistans är $R_A + (R_B//R_C) = 3R/2$. Vi får $i_2 = 2V/(3R/2) = 4V/(3R)$. Följaktligen blir $p_A = i_2^2 R = 16V^2/(9R) = 2W$. Strömdelning ger $i_C = i_B = i_2/2 = 2V/(3R)$ och $p_B = p_C = i_B^2 R = 4V^2/(9R) = 0.5W$

Svar a,b Lampa A lyser starkare efter t=0. Lampa B lyser svagare efter t=0. Lampa C lyser starkare efter t=0 (och lyser lika starkt som lampa B).

Svar f Vi får att effekten i lampa B minskas från 1.1W till 0.5W.

3c Vi kan antingen summera p_A, p_B och p_C före och efter $t = 0$ då får vi för $t < 0$ att $p_{tot} = p_A + p_B = 2.25\text{W}$, och för $t > 0$ får vi: $p_{tot} = p_A + p_B + p_C = 3\text{W}$.

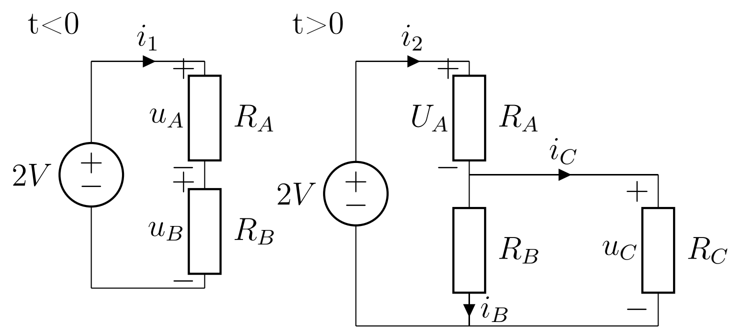
Vi bör kunna få fram samma sak genom att titta på effekten dragen ur källan: För $t < 0$ får vi $p_{tot} = 2V \cdot i_1 = 2V^2/R = 2.25\text{W}$. För $t < 0$ får vi $p_{tot} = 2V \cdot i_2 = 8V^2/3R = 3\text{W}$. Vilket var skönt då effekt konservering ska gälla i en krets. **Svar** kretsen lyser starkare efter tiden $t = 0$.

3d Vi har redan räknat ut strömmarna genom källorna för $t < 0$ är det $i_1 = V/R = 0.75\text{A}$. För $t > 0$ har vi strömmen $i_2 = 4V/(3R) = 1\text{A}$. **Svar** Vi får att det dras mer ström ur källorna efter $t = 0$.

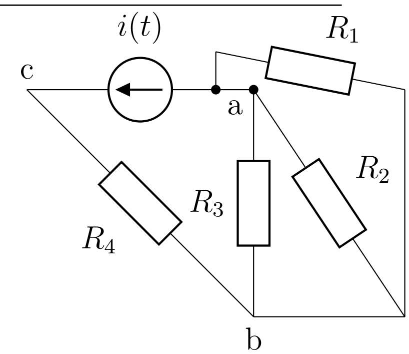
3e Vi har strömmarna i_1 och i_2 samt i_C vi får därför att för $t < 0$ blir spänningsfallet $u_B = u_A = i_1 R = V = 1.5\text{V}$. (Notera riktningen i figuren)

För $t > 0$ får vi motsvarande storheter till $U_A = i_2 R = 4V/3 = 2\text{V}$, och $u_C = i_C R = 2V/3 = 1\text{V}$ (notera att C och B har samma spänningsfall efter $t = 0$).

Svar: Spänningsfallet över lampa A fördublas efter $t = 0$, och spänningsfallet över lampa B minskas från 1.5V till 1.0V.



4a o b Notera att det är totalt 3 noder i kretsen (metall stycken), vi kallar dem a, b, c. Se figur.



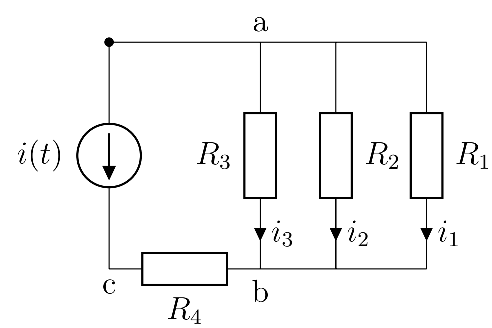
Strömmen genom R_4 blir $i = 0.60\text{A}$ **delsvar**. Vi ska nu strömdela i på grenarna som innehåller R_1–R_3. Vi ser att riktningen på i_1, i_2, i_3 är motsatt den vanliga riktningen vid strömdelning, så vi får

$$i_3 = -i\frac{1/R_3}{1/R_3 + 1/R_2 + 1/R_1} = -i\frac{R_1R_2}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1} \quad (19)$$

Uttrycket i nämnaren kommer att vara samma för alla fallen. Vi får på samma sätt

$$i_2 = -i\frac{1/R_2}{1/R_3 + 1/R_2 + 1/R_1} = -i\frac{R_1R_3}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1} \quad (20)$$

$$i_1 = -i\frac{1/R_1}{1/R_3 + 1/R_2 + 1/R_1} = -i\frac{R_2R_3}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1} \quad (21)$$



Om vi sätter in värden får vi att $i_1 = i_2 = i_3 = -i/3 = 0.20\text{A}$ **delsvar**.

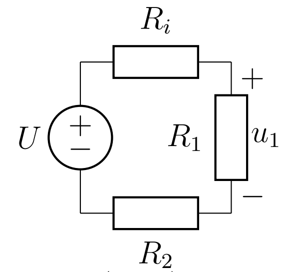
Spänningarna: Vi känner alla strömmar vi får ut spänningarna. Vi får att spänningen över R_4 som vi kallar $v_{ab} = iR_4 = 11.4 \approx 11\text{V}$ **delsvar**.

Det är samma spänning över alla resistanserna R_1, R_2, R_3. Resistansen kallar vi v_{ba} (dvs vi förutsätter att b har högre potential). Vi får: $v_{ba} = -R_1 i_1 = 0.20 \cdot 3.0 = 0.60\text{V}$. **delsvar**

4c Spänningen över strömgeneratorn är $v_{ca} = v_{cb} + v_{ba} = 0.60 + 11.4 = 12.0 \approx 12\text{V}$. Vi får därför att effekten blir $p = iv_{ca} = 12.0 \cdot 0.60 = 7.2\text{W}$ **Svar**

---

5 Vi kan välja mellan serie och parallell koppling av våra två resistanser. Parallellkoppling ger samma spänning över båda. Så vi betraktar seriekopplingen i figuren.



Vi vet att $U = 20$V $R_i = 1.1\Omega$ och vill ha $u_1 = 4$V. Spänningsdelning ger relationen

$$u_1 = U\frac{R_1}{R_i + R_1 + R_2} \Rightarrow (U - u_1)R_1 = u_1R_2 + u_1R_i \Rightarrow 4R_1 = R_2 + 1.1 \quad (22)$$

Vi har två okända och endast en ekvation. Vi får att alla R_1 kan uttryckas som en linjär (affin) relation av R_2. Det finns många lösningar till denna ekvation.

Vi har bi-villkoret att vi endast ska använda E12-serien. Notera att ingen resistans är fyra gånger den andra. Så om vi vill nära måste vi försöka utnyttja 1.1. Vad händer om vi väljer $R_1 = 10\Omega$, vi får $R_2 = 38.9$, närmaste är $39\Omega\dot{\mathrm{V}}$i får $u_1 = 3.99$V (nominellt värde). (Om man testar och tar 9 resp 11 istället för R_1 samt $R_2 = 42.9$ respektive 35.1Ω får vi att u_1 ligger i intervallet [3.34, 4.66]V vilket inkluderar 4V. (Det går säkert att komma ännu närmare, men med resistansernas osäkerhet är denna lösning fullt tillräcklig.

2. För att få låg effektförbrukning bör vi välja göra totala strömmen i kretsen liten. Dvs vi ska välja så stora resistanser som möjligt. Vad händer om vi tittar på $R_2 = 10\text{M}\Omega$ vilket ger att $R_1 = 2.5\text{M}\Omega$, närmaste E12 term är $2.7\text{M}\Omega$ vilket ger en betydligt sämre nominelt värdet: $u_1 = 4.25$V och intervallet är [3.61,4.96] vilket inkluderar 4V.

3. 3 st Resistorer ger stor frihet. Det finns massor av lösningar. En lösning som har liten effektförbrukning och som på ett nominellt värde på 4V är att använda seriekoppling. Dvs vi väljer $R_3 = 10\text{M}\Omega$. Nu testar vi med R_2 till olika värden så att vi får R_1 att hamna på ett av E12 nummerna. Vi har relationen för serikopplade resistanser, med spänningen över R_1 som ($1.1 \ll 10\text{M}\Omega$)

$$\frac{1}{5} = \frac{u_1}{U} = \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (23)$$

Vi testar med så stora R_2 som möjligt för att se om R_1 hamnar på ett E12 värde. Vi ser att om vi väljer $R_2 = 5.6\text{M}\Omega$ får vi $R_1 = 3.9\text{M}\Omega$. Vilket ger det nominella värdet $u_1 = 4.0$V. Intervallet inkluderar [3.40,4.68]V vilket är ett något mindre intervall än i 2.

I praktiken om vi vill ha ett exakt värden måste man ha flera resistanser och mäta deras resistans, och välja dem som har det rätt resistans enligt tex enligt modell 3. Man måste också bestämma sig med vilken precision man behöver värdet.