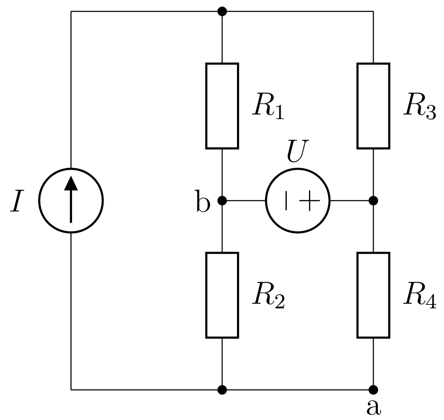
Hemuppgift för EI1110 nr 2 av 4, deadline 16/9 2011

Inlämning av lösta uppgifter sker den 16/9 först på övningen. **Kamraträttning** sker 16/9 kl 14-15. Obs: För att uppgiften ska tillgodoräknas måste du delta i både att lösa uppgiften (före aktuellt datum) och i rättningen det aktuella datumet.
När du löser uppgiften, tänk på att **uppgifterna ska kamraträttas**, skriv därför en tydlig lösning som går lätt att följa, med tydliga bilder, introducera storheter, vad som söks, lösningsgång samt väl förenklade svar på delfrågorna. Denna gång ska den **rättade hemuppgiften samlas in**.
Häfta ihop lösningsbladen och **skriv namn** på framsidan. Examinator: Lars Jonsson

---

1 av 4) Nodanalys

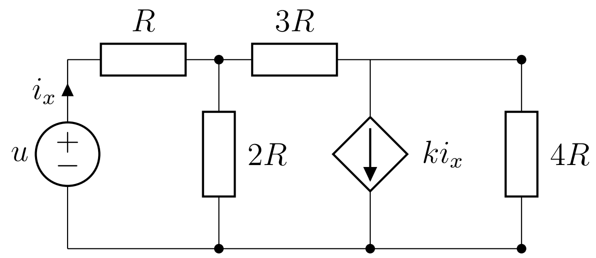
a) Markera noder, referens, nod-potentialer och sätt ut definitionsriktningar på strömmarna. Ledning, välj b som referens.
b) Bestäm alla nod-potentialer.
c) Bestäm u_{ab}
d) Kolla att Kirchhoffs strömlag håller i referens noden (dvs där du jordat).



---

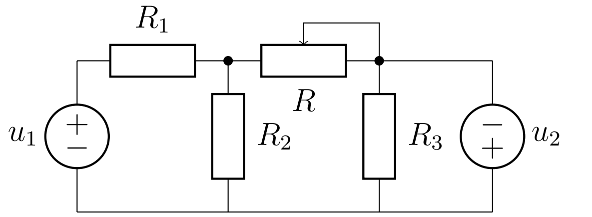
2 av 4) Maskanalys + Beroendekällor

a) Markera maskor (ström och strömriktning).
b) Bestäm alla maskströmmar.
d) Bestäm effektutvecklingen i den beroende källan.



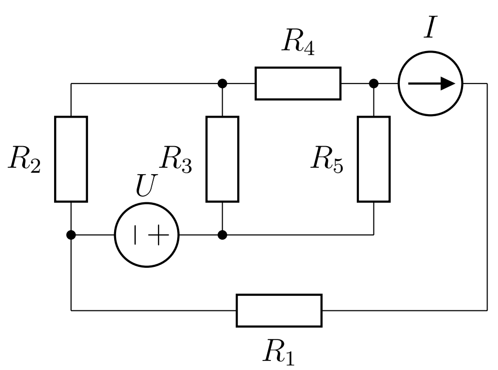
---

3 av 4) Potentiometer I figuren finns en sensor i form av en potentiometer. Potentiometern delar resistansen R i två bitar $(1-a)R$ och aR, där a är ett tal mellan 0 och 1, beroende på läget på potentiometern. Rita om kretsen med resistanserna $(1-a)R$ och aR. Bestäm strömmen genom potentiometern för a=0, a=1/2, a=1. Använd nodanalys.



---

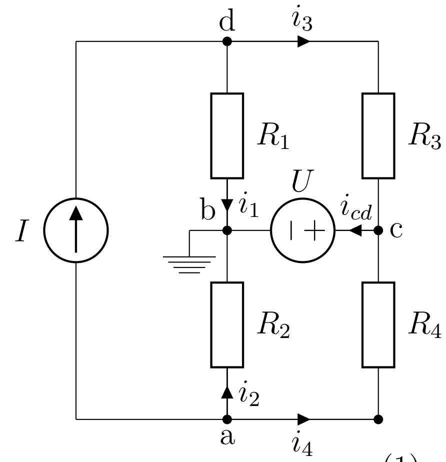
4 av 4) Superposition Använd superpositions principen för att bestämma spänningen över R_5.



EI1100 och EI1102-studenter har en annorlunda version av hemuppgiften. Se EI1102's kurshemsida.

Lösningsförslag till hemuppgift 2 för EI1110, 2011

Lars Jonsson



1a) Vi har 4 noder a,b,c,d. Enligt ledning ska vi välja b som referens: $v_b = 0$. Notera att noden a är hela metallstycket som ansluter källan R_2 och R_4 och där den nu står är enklast med avseende på strömmar.

1b) Vi ska bestämma nod-potentialerna v_a, v_c och v_d och behöver tre ekvationer. Vi noterar att v_c är enkel. Den blir genom potential vandring från jord till c $v_c = U$ (**delsvar**). (vilket ger den första ekvationen)

Om vi tittar på nod d: så ger KCL att

$$i_1 + i_3 = I \tag{1}$$

och vi ska hitta i_1 och i_2 i termer av potentialerna. KVL db och dc ger respektive:

$$v_d - i_1 R_1 = 0, \Rightarrow i_1 = \frac{v_d}{R_1}, \text{ och } v_d - i_3 R_3 = U, \Rightarrow i_3 = \frac{v_d - U}{R_3} \tag{2}$$

Insatt i KCL ger dessa strömmar den andra ekvationen: (notera att den endast innehåller den okända potentialen v_d så vi kan lösa den direkt).

$$\frac{v_d}{R_1} + \frac{v_d - U}{R_3} = I \ \Rightarrow v_d = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}(I + \frac{U}{R_3}) \tag{3}$$

(**delsvar**)

I nod a ger KCL att

$$i_2 + i_4 + I = 0 \tag{4}$$

KVL över ab och ac ger respektive:

$$v_a - i_2 R_2 = 0, \Rightarrow i_2 = \frac{v_a}{R_2}, \text{och } v_a - i_4 R_4 = U, \Rightarrow i_4 = \frac{v_a - U}{R_4}. \tag{5}$$

Insatt i KCL får vi att

$$\frac{v_a}{R_2} + \frac{v_a - U}{R_4} = -I, \Rightarrow v_a = \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4}(\frac{U}{R_4} - I) \tag{6}$$

(**delsvar**)

1c) Vi söker $u_{ab} = v_a - v_b = v_a = \frac{R_2 R_4}{R_2+R_4}(\frac{U}{R_4} - I)$ **(Svar)**

.

1d Kolla KCL i nod b. Vi har här en lite klurig sitation. Vi om vi betraktar bc som en supernod får vi att KCL säger att följande ska hålla.

$$i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = 0 \tag{7}$$

vilket enligt ekvationerna (1) och (4) blir $I - I = 0$ så denna håller. Men det var inte riktigt detta vi söker. Ett sätt att få ut strömmen genom spänningskällan $i_{cb} = i_3 + i_4$ (från c till b) är att titta i nod

c. Där gäller KCL: $i_{cb} = i_3 + i_4$. Vilket vi då kan identifiera ovan i super noden för att direkt se att detta är sant. Vill man göra det lite mer noga tar vi reda på vad v_{cd} är:

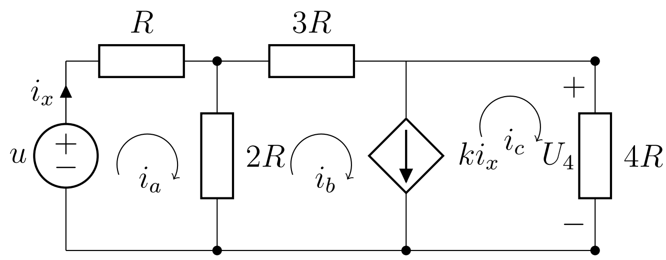
$$i_{cb} = i_4 + i_3 = \frac{v_d - U}{R_3} + \frac{v_a - U}{R_4} \tag{8}$$

Vilket ger att vi kan identifiera strömmarna in till b:

$$i_1 + i_2 + i_{cb} = \frac{v_d}{R_1} + \frac{v_a}{R_2} + \frac{v_d - U}{R_3} + \frac{v_a - U}{R_4} = \left(\frac{v_a}{R_2} + \frac{v_a - U}{R_4}\right) + \left(\frac{v_d}{R_1} + \frac{v_d - U}{R_3}\right) \tag{9}$$

Första parentesen är precis vad som står i vänsterledet av 1:a ekvationen i (6) och den andra parentesen är vad som står i vänsterledet på 1:a ekvationen i (3) dvs vi får att $i_1 + i_2 + i_{cb} = -I + I = 0$ dvs KCL håller också i nod b, jordpunkten.

2a) Se figur. Notera att om vi byter plats på den beroende källan och $4R$ får vi exakt samma nät men enklare ekvationer. Jag kommer att räkna på den givna bilden. Vi har 3 okända: i_a, i_b, i_c och vi behöver 3 ekvationer.



2b Bestäm maskströmmarna: Maska a: Vi börjar med att notera att $i_x = i_a$. Vi potential vandrar genom slingan och får följande ekvation:

$$u - i_a R - 2R(i_a - i_b) = 0 \Leftrightarrow u - 3Ri_a + 2Ri_b = 0 \tag{10}$$

Maska b: Här har vi en beroende strömkälla: Vi får i den grenen relationen $i_b - i_c = ki_x = ki_a$. (andra ekvationen). Vi behöver en ekvation till. Vi potentialvandrar i supermaskan bc. Vi får:

$$-2R(i_b - i_a) - 3Ri_b - 4Ri_c = 0 \Rightarrow -5i_b + 2i_a - 4i_c = 0 \tag{11}$$

Vi använder uttrycker i_c i i_a och i_b till: $i_c = i_b - ki_a$ in i tredje ekvationen så får vi:

$$-5i_b + 2i_a - 4(i_b - ki_a) = 0 \Rightarrow i_b = \frac{2}{9}(1 + 2k)i_a \tag{12}$$

Vilket i 1:a ekvationen ger:

$$u - 3Ri_a + 2R\frac{2}{9}(1 + 2k)i_a = 0 \Rightarrow i_a = \frac{9u}{R(14k - 8)} \tag{13}$$

(delsvar). Nu följer

$$i_b = \frac{2}{9}(1 + 2k)i_a = \frac{2u(1 + 2k)}{R(14 - 8k)},\ i_c = i_b - ki_a = \frac{2u(1 + 2k)}{R(14 - 8k)} - k\frac{9u}{R(14 - 8k)} = \frac{u(2 - 5k)}{R(14 - 8k)} \tag{14}$$

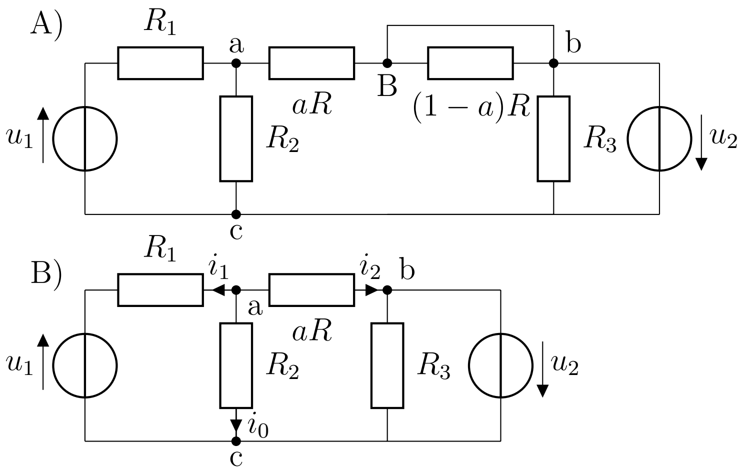
(delsvar). k är dimensionslös så högerleden har V/Ω=A vilket är rätt dimension.

2d) Effektutvecklingen i den beroende källan: Vi vet strömmen: $ki_x = ki_a$. Vi vill veta spänningen över källan. Vi vet att $4R$ och den beroende källan har samma spänningsfall över sig U_4. Vi får därför absorberad effekt (ström in i på +-sidan på spänningen U_4 över den beroende strömkällan: **(Svar)**

$$p = (ki_a)(4Ri_c) = k\frac{9u}{(14 - 8k)R}4R\frac{u(2 - 5k)}{(14 - 8k)R} = \frac{36ku^2(2 - 5k)}{R(14 - k8)^2} \tag{15}$$

---

3 Notera att de skenbart olika noderna b och B är samma nod och kortsluter $(1-a)R$ vilken därför faller bort ur vår modell kretsen. All ström går genom kortslutningen, inget genom $(1-a)R$. **(delsvar)**: genom $(1-a)R$-delen går strömmen $i = 0$. Om $a = 0$ finns inte aR och detta betyder att också nod a den samma som nod b och strömmen genom potentiometern blir $i = 0$ **(delsvar)**



För $a \neq 0$ söker vi att bestämma strömmen genom aR-delen, dvs strömmen i_2 i figur B). Notera att vi har tre icke-triviala noder: abc Vi väljer c som referens $v_c = 0$. Då är v_b känd pga spänningskällan: $v_b = -u_2$. Och vi har en okänd v_a: I nod a säger KCL att $i_0 + i_1 + i_2 = 0$. Där:

$$i_1 = \frac{v_a - u_1}{R_1},\ i_2 = \frac{v_a + u_2}{aR},\ i_0 = \frac{v_a}{R_2} \tag{16}$$

vilket sätts in i KCL för att ge:

$$\frac{v_a - u_1}{R_1} + \frac{v_a + u_2}{aR} + \frac{v_a}{R_2} = 0 \ \Rightarrow v_a = \frac{aRR_1R_2}{aR(R_1+R_2) + R_1R_2}\left(\frac{u_1}{R_1} - \frac{u_2}{aR}\right) \tag{17}$$

Strömmen i_2 blir

$$i_2 = \frac{v_a}{aR} + \frac{u_2}{aR} = \frac{R_1R_2}{aR(R_1+R_2) + R_1R_2}\left(\frac{u_1}{R_1} - \frac{u_2}{aR}\right) + \frac{u_2}{aR} \tag{18}$$

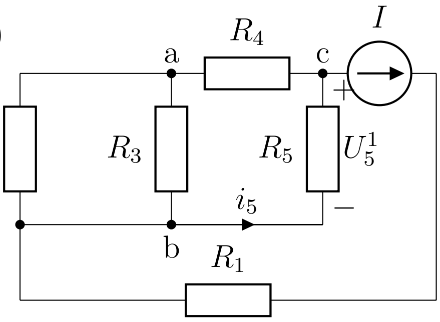
För $a = 1$ får vi: **(delsvar)**

$$i_2 = \frac{R_1R_2}{R(R_1+R_2) + R_1R_2}\left(\frac{u_1}{R_1} - \frac{u_2}{R}\right) + \frac{u_2}{R} \tag{19}$$

För $a = 1/2$ får vi: **(delsvar)**

$$i_2 = \frac{2R_1R_2}{R(R_1+R_2) + 2R_1R_2}\left(\frac{u_1}{R_1} - \frac{2u_2}{R}\right) + \frac{2u_2}{R}$$

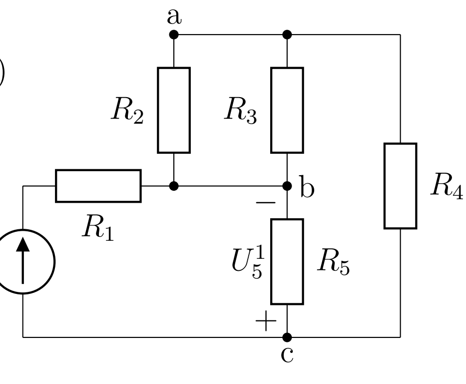
1a)



4–rättad) Vi har två fria källor U och I, en nollställa en spänningskälla är att ersätta den med en korslutning. Se fall 1. Att nollställa en strömkälla är ett avbrott , se fall 2 (längre ned). Vi noterar att spänningen över R_5 är $U_5 = U_5^1 + U_5^2$. Dvs vi väljer tecken på U_5 som i figur 1a) för U_5^1.

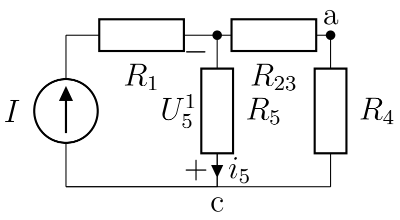
Vi ritar om Fall 1a) så att det blir lättare att se hur elementen är kopplade. Se 1b. Notera att R_2, R_3 och R_4 alla sitter med ena benet i nod a. I nod b sitter R_2, R_3 och R_5. Samt i nod c sitter R_4 och R_5. Detta är sant i båda figurerna. Konotrollera. Notera att U_5^1 har sitt plus i c-noden i båda figurerna. Från figuren är det klart att R_2 och R_3 är parallellkopplade. Vi får $R_{23} = R_2 // R_3$ och där med figur 1c).

1b)



Vi får att strömmen I delar sig mellan de två grenarna $R_4 + R_{23}$ och R_5. Strömmen i_5 genom R_5 blir (strömgrening)

1c)



$$i_5 = \frac{I\frac{1}{R_5}}{\frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_{23}+R_4}} = \frac{I(R_4 + R_{23})}{R_4 + R_{23} + R_5} = \frac{I[R_4(R_2 + R_3) + R_2R_3]}{(R_4 + R_5)(R_2 + R_3) + R_2R_3} \tag{20}$$

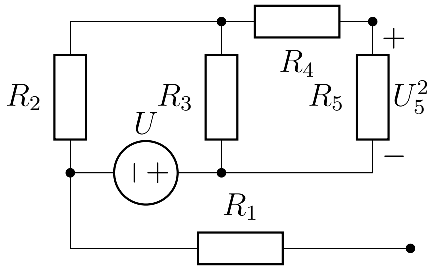
där vi använt att $R_{23} = R_2R_3/(R_2+R_3)$. Vi kan nu bestämma U_5^1 som

$$U_5^1 = -i_5R_5 = \frac{-IR_5[R_4(R_2 + R_3) + R_2R_3]}{(R_4 + R_5)(R_2 + R_3) + R_2R_3} \tag{21}$$

Dimensions koll: $A\Omega^3/\Omega^2$=$A\Omega$=V, höger och vänster led har volt.

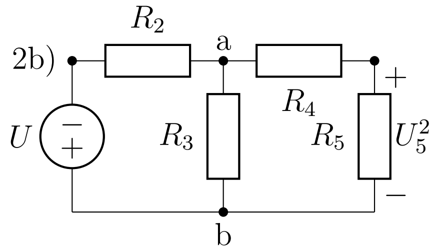
Nu nollställer vi strömkällan och behåller spänningskällan. Vi får Fall 2. Se figur 2a). Vi ritar om kretsen något, se krets 2b). Enklaste sättet att bestämma U_5^2 är spänningsdelning. Resistansen mellan ab $R_{ab} = R_3//(R_4 + R_5)$. Vi får

2a)



$$R_{ab} = \frac{R_3(R_4 + R_5)}{R_3 + R_4 + R_5}. \tag{22}$$

2b)



Spänningen U_{ab} blir

$$U_{ab} = -U\frac{R_{ab}}{R_{ab} + R_2}. \tag{23}$$

Ytterligare en spänningsdelning av U_{ab} på mellan R_4 och R_5 ger:

$$U_5^2 = U_{ab}\frac{R_5}{R_5 + R_4} = -U\frac{R_{ab}R_5}{(R_{ab} + R_2)(R_4 + R_5)}. \tag{24}$$

Om vi också sätter in R_{ab} får vi:

$$U_5^2 = -U\frac{R_3R_5}{R_3(R_4 + R_5) + (R_3 + R_4 + R_5)R_2} = -U\frac{R_3R_5}{(R_2 + R_3)(R_4 + R_5) + R_2R_3}. \tag{25}$$

Vi använder nu superposition för att få den totala spänningen över R_5 som **(Svar)**

$$U_5 = U_5^1 + U_5^2 = \frac{-IR_5[R_4(R_2 + R_3) + R_2R_3] - UR_3R_4}{(R_4 + R_5)(R_2 + R_3) + R_2R_3} \tag{26}$$

Dimensionskontroll: vi ersätter R med Ω och U med V och I med A för att få:

$$V = \frac{-A\Omega^3 - V\Omega^2}{(\Omega + \Omega)(\Omega + \Omega) + \Omega^2} = A\Omega + V = V \tag{27}$$

där vi används dimensionerna i Ohms lag i sista steget. HL och VL är därför volt.