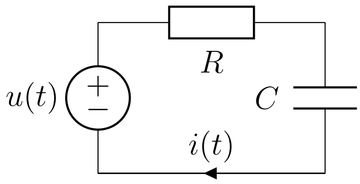
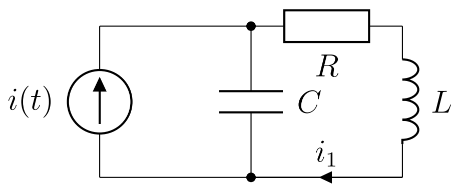
Hemuppgift för EI1110, EI1102 och EI1100 nr 3 av 4, deadline 29/9 2011

Inlämning den 29/9 först på övningen, där efter **kamraträttning**. Obs: För att uppgiften ska tillgodoräknas måste du delta i både att lösa uppgiften (före aktuellt datum) och i rättningen.
När du löser uppgiften, tänk på att **uppgifterna ska kamraträttas**, skriv därför en tydlig lösning som går lätt att följa, med tydliga bilder, introducera storheter, vad som söks, lösningsgång samt väl förenklade svar på delfrågorna.
Häfta ihop lösningsbladen och **skriv namn** på framsidan. Examinator: Lars Jonsson

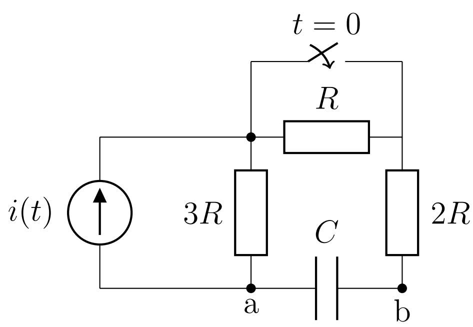
---



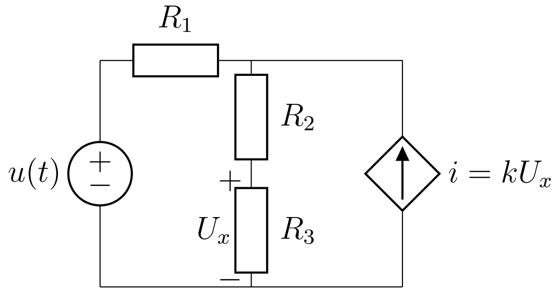
1 av 4) Introduktion till komplexa strömmar och spänningar. Här är $u(t) = A\cos(\omega t - \frac{\pi}{3})$ V.
a) Vad är den komplexa spänningen (phasor) $\mathbf{U}$ för $u(t)$?
b) Vad är impedansen för resistansen R? Vad är impedansen för kondensatorn med kapacitans C? Ange också den totala impedansen i kretsen.
c) Bestämma den komplexa strömmen $\mathbf{I}$ som motsvara $i(t)$. Vad är amplituden (också kallat längd, belopp, eller absolutbeloppet) av strömmen $\mathbf{I}$? vad är fasen (argumentet)? Beräkna strömmen $i(t)$.
d) Låt $C = 6.4\mu$F, $f = 50$Hz,$R = 500\Omega$, $A = 1.6$V. Rita de komplexa storheterna $\mathbf{U}$ och $\mathbf{I}$ i komplexa talplanet (som vektorer i ett tvådimensionellt diagram, med real-axel och imaginär axel). Markera vad som är amplitud och fas, samt fasskillnad mellan strömmen och spänningen. Är det ström eller spänning som leder?
e) Skissa nu på en graf som funktion av tiden där $u(t)$ och $i(t)$ är inritade, markera amplitud och absoluta faser samt fasskillnad. Är det ström eller spänning som leder?



2 av 4 jω-metoden: Låt $i(t) = I_0\sin(\omega t)$ och $\omega < 1/\sqrt{LC}$.
a) Bestäm $i_1(t)$ i steady state. (Hint: bestäm $\mathbf{I}_1$ och översätt till tidsdomän).
b) Hur ska resistansen R väljas så att $i_1(t)$ ligger 45° efter $i(t)$ i fas.



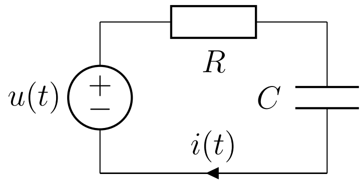
3 av 4) Transienter, två-poler. $i(t) = I_0$, likström.
a) Kretsen innehåller endast en likströmskälla. Hur ser relationen ut för ström och spänning över kondensatorn för likström?
b) Baserat på a) Rita den ekvivalenta kretsen för $t < 0$ och bestäm u_{ab} och $i(t)$ för $t < 0$.
c) Fallet $t > 0$. Ersätt kretsen med en ekvivalent Thevenin-tvåpol map ab utan kondensatorn.
d) Bestäm ström och spänning genom kondensatorn för $t > 0$. Var noga med tecken och riktningar.



4 av 4) Repetition av beroende källor. Känt: $u(t)$, R_1, R_2, R_3 och k. Endast dessa storheter får förekomma i svaren.
a) Låt $u(t) = U_0$. Bestäm spänningen över R_2 till storlek och riktning. Var noga med dimensioner och riktningar. Gör en dimensionskontroll på svaret. Verifiera att endast kända storheter förekommer i svaret. Hint: Nodanalys.
b) (Lite svårare version). Ersätt R_1 R_2 och R_3 med godtyckliga impedanser Z_1, Z_2 och Z_3 samt låt $u(t) = U_0\cos(\omega t+\beta)$. Vad blir den komplexa spänningen över Z_2.

Lösningsförslag för Hemuppgift 3

Examinator: Lars Jonsson



1a) Jag kommer att använda stora bokstäver för komplexa storheter, tex U, I. Detta tal kommer jag att göra med alla steg och alla detaljer, eftersom det är första gången med komplexa storheter. Titta noggrant på talet, på tillvägagångsättet för vi kommer att använda det massor av gånger, och med tiden kommer det att bli automatiskt.

När vi bestämmer U börjar vi med att *ansätta* en komplex spänning på polär (exponentiell) form:

$$U = B\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta} \tag{1}$$

Där $B > 0$ och β är okända storheter med dimensionerna volt och radianer respektive. Om vi sätter in vår ansats av U i omvandlingsformeln från komplex spänning till tidstdomän: (för att identifiera vad B och β är i termer av komponenterna i uttrycket för $u(t)$)

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(U\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}) &= [\text{ansatsen}] = \mathrm{Re}(B\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}) = [\mathrm{e}^a\mathrm{e}^b = \mathrm{e}^{a+b}] = \mathrm{Re}(B\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t+\mathrm{j}\beta}) = [\text{Eulers formel}] = \\ &= \mathrm{Re}(B[cos(\omega t+\beta) + \mathrm{j}\sin(\omega t+\beta)]) = B\cos(\omega t+\beta) \\ &= [\text{enligt definitionen av } U] = A\cos(\omega t - \frac{\pi}{3}) = u(t)\end{aligned}$$

Genom att jämför sista och näst sista radens cosinus-uttryck kan vi identifiera B och β. Vi får $B = A$, $\beta = -\pi/3$. **Svar**: $U = B\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{3}}$.

---

b) Vad är impedansen för resistansen R? **delsvar:** $Z_R = R$. Vad är impedansen för kondensatorn med kapacitans C? **Svar** $Z_C = 1/(\mathrm{j}\omega C)$. Hur kan vi se det? Vi vet att $i(t) = C\frac{d}{d_t}u(t)$. Kalla den komplexa strömmen för I och den komplexa spänningen för U, mostvarande $i(t)$ och $u(t)$. Vi får enligt ombandlingsformeln

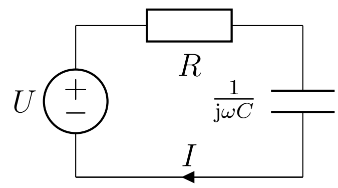
$$\mathrm{Re}(I\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}) = i(t) = C\frac{d}{dt}u(t) = C\frac{d}{dt}\mathrm{Re}(U\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}) \tag{2}$$

$$= [\mathrm{Re} \text{ är en linjär funktion, kommuterar med derivatan}] \tag{3}$$

$$= C\,\mathrm{Re}(U\frac{d}{dt}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}) = \mathrm{Re}(C\mathrm{j}\omega U\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}) \tag{4}$$

Vi kan nu identifiera I i termer av U från första och sista termen, vi får $I = \mathrm{j}\omega CU$, vilket ger just ovanstående formel för impedansen Z_C.

Vi ser att samma ström går genom R och Z_C, och de är därför seriekopplade. Vi får **delsvar:** $Z_{tot} = R + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}$.



c) Nu kan vi rita den kretsen med de komplexa storherna i. Vi potentialvandrar och får: **(delsvar)**

$$U - RI - \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}I = 0 \Rightarrow I = \frac{U}{R + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}} = \frac{\mathrm{j}\omega CU}{1 + \mathrm{j}\omega CR} \tag{5}$$

För belopp och fas gäller **(delsvar)** (kom ihåg hur U ser ut från uppgift a)

$$|I| = \frac{|\mathrm{j}\omega CU|}{|1+\mathrm{j}\omega CR|} = \frac{\omega CA}{\sqrt{1+(\omega CR)^2}},\ \beta = \arg I = \arg(\mathrm{j}\omega CU) - \arg(1+\mathrm{j}\omega CR) = \tag{6}$$

$$= \arg(\mathrm{j}\omega C) + \arg(U) - \arg(1+\mathrm{j}\omega CR) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} - \arctan\frac{\omega CR}{1} = \frac{\pi}{6} - \arctan(\omega CR) \tag{7}$$

Det sista steget är att beräkna $i(t)$. Vi använder omvandlingsformeln igen

$$i(t) = \mathrm{Re}(I\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}) = \mathrm{Re}(|I|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}) = |I|\cos(\omega t + \beta) = \frac{\omega C A}{\sqrt{1+(\omega CR)^2}}\cos(\omega t + \frac{\pi}{6} - \arctan(\omega CR)) \quad (8)$$

(delsvar). För att komma fram till detta har vi använt samma teknik som vi använde i 1a, titta gärna tillbaka. Värt att notera är att när vi beräknar argumentet för $1 + \mathrm{j}\omega CR$ notera att realdelen ett:an är positiv, så arctan-fungerar bra. Vad hade hänt om det hade varit $-1 + \mathrm{j}\omega C$. Rita vektorn i komplexa talplanet och identifiera vinkeln mellan reel-positiv axel och din vektor.Nästa lite ovanliga sak i detta uttryck är att vi har A istället för U_A. Det senare hade varit betydligt tydligare med att ha enheten volt.

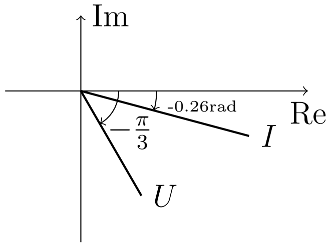
---

d och e) Om vi sätter in talen får vi att $|U| = 1.6V$ och att dess vinkel är $-\pi/3$. Notera att endast f är given, vi får $\omega = 2\pi f = 100\pi \approx 310$ rad/s. Vilket ger att $\omega C = 100\pi 6.4 \cdot 10^{-6} = 2.01 \cdot 10^{-3}\Omega^{-1}$

Vi får

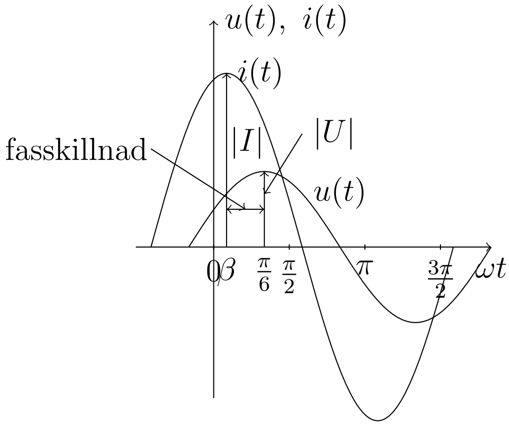
$$|I| = \frac{2.01\cdot 10^{-3}\cdot 1.6}{\sqrt{1+(2.01\cdot 10^{-3}500)^2}} \approx 2.3\mathrm{mA}, \quad (9)$$

$$\beta \approx \frac{\pi}{6} - \arctan(1.005) \approx -0.264\mathrm{rad} \approx -15° \quad (10)$$



Redan här är det klart att U ligger efter I. (För att se detta titta på argumentet till cosinus, den har max när cos-argumentet är noll. För U gäller att argumentet är $\omega t - \pi/3 = 0$ dvs vid $t = \pi/(3\omega)$ så kommer ett maximum för $u(t)$. Medan för $i(t)$ har vi att vid $t = 0.264/\omega$ så är maximat för $i(t)$.

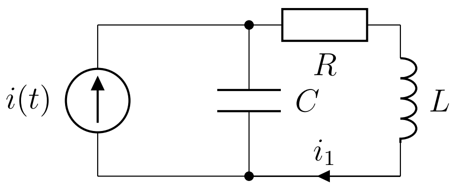
Då $-0.264 > -\pi/3 \approx -1$ leder strömmen framför spänningen. Om vi ritar vektorerna får vi bilden till höger. Notera att vi använder olika skalor för U och för I. Här 1V ritas med 1cm, och 1mA ritas också med 1cm.



(Svar e) Se figur. För att få plats har jag använt symbolerna $|I|$ och $|U|$ för amplituderna.

---

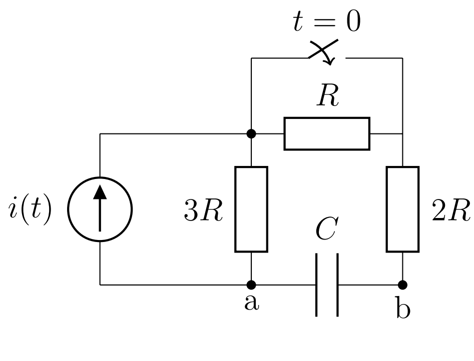
2 av 4 $\mathrm{j}\omega$-metoden: Låt $i(t) = I_0\sin(\omega t)$ och $\omega < 1/\sqrt{LC}$.



a) Bestäm $i_1(t)$ i steady state. (Hint: bestäm $\mathbf{I}_1$ och översätt till tidsdomän).
b) Hur ska resistansen R väljas så att $i_1(t)$ ligger 45° efter $i(t)$ i fas.

---

3 av 4) Transienter, två-poler. $i(t) = I_0$, likström.
a) Kretsen innehåller endast en likströmskälla. Hur ser relationen ut för ström och spänning över kondensatorn för likström?
b) Baserat på a) Rita den ekvivalenta kretsen för $t < 0$ och bestäm u_{ab} och $i(t)$ för $t < 0$.



c) Fallet $t > 0$. Ersätt kretsen med en ekvivalent Thevenin-tvåpol map ab utan kondensatorn.
d) Bestäm ström och spänning genom kondensatorn för $t > 0$. Var noga med tecken och riktningar. Var noga med tecken och riktningar.

---

4 av 4) Repetition av beroende källor. Känt: $u(t)$, R_1, R_2, R_3 och k. Endast dessa storheter får förekomma i svaren.
a) Låt $u(t) = U_0$. Bestäm spänningen över R_2 till storlek och riktning. Var noga med dimensioner och riktningar. Gör en dimensionskontroll på svaret. Verifiera att endast kända storheter förekommer i svaret. Hint: Nodanalys.
b) (Lite svårare version). Ersätt R_1 R_2 och R_3 med godtyckliga impedanser Z_1, Z_2 och Z_3 samt låt $u(t) = U_0 \cos(\omega t + \beta)$. Vad blir den komplexa spänningen över Z_2.