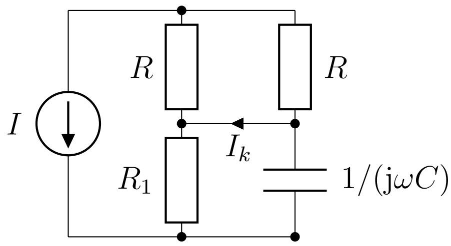
Hemuppgift för EI1110 nr 4 av 4, deadline 7/10 2011

Inlämning den 7/10 först på övningen, där efter **kamraträttning**. Obs: För att uppgiften ska tillgodoräknas måste du delta i både att lösa uppgiften (före aktuellt datum) och i rättningen.
När du löser uppgiften, tänk på att **uppgifterna ska kamraträttas**, skriv därför en tydlig lösning som går lätt att följa, med tydliga bilder, introducera storheter, vad som söks, lösningsgång samt väl förenklade svar på delfrågorna.
Häfta ihop lösningsbladen och **skriv namn** på framsidan. Examinator: Lars Jonsson

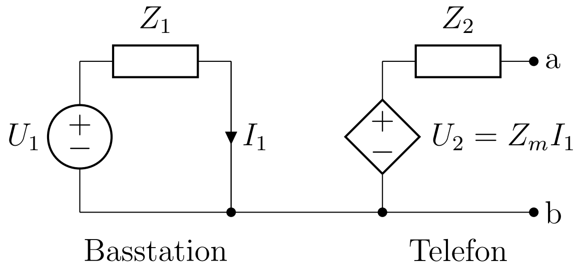
---

1) Maskanalys, komplexa storheter.
a) Använd maskanalys till att bestämma de 3 komplexa maskströmmarna.
b) Bestäm fas och amplitud på I_k i termer av I, R, R_1, C och f.



---

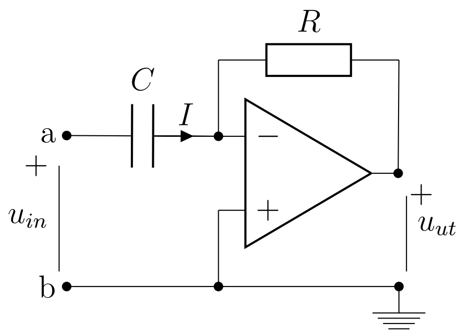
2) Tvåpoler/anpassning, beroende generatorer. En basstation som kommunicerar med en mobiltelefon kan representeras som det ekvivalenta schemat till höger. Mottagarantennen är ekvivalent med en strömstyrd spänningskälla i serie med en inre impedans $Z_2 = R_2 + \mathrm{j}X_2$. Sändarantennen är ekvivalent med en spänningskälla i serie med en impedans $Z_1 = R_1 + \mathrm{j}X_1$. Koefficienten Z_m beror på avståndet mellan antennerna, hur antennerna är vinklade i förhållande till varandra och på omgivningen.



Den sändande antennen sänder med vinkelfrekvens ω. U_1 och $U_2 = Z_m I_1$ är komplexa spänningar. Kända storheter, U_1, Z_1, Z_2 och Z_m.
a) Bestäm en ekvivalent Thevenin tvåpol med avseende på ab.
b) Koppla in en last $Z_L = R_L + \mathrm{j}X_L$ mellan ab. Bestäm strömmen, I_L uttryckt i kända storheter genom lasten. Undersök hur R_L och X_L ska välja för att storheten $|I_L|^2 R_L/2$ ska bli så stor som möjligt. Ledning: Sätt in uttrycket för I_L. Notera att storheten $|I_L|^2 R_L/2$ har dimensionen effekt. Denna kallas aktiv effekt, att välja Z_L för att maximera aktiva effekten kallas anpassning.

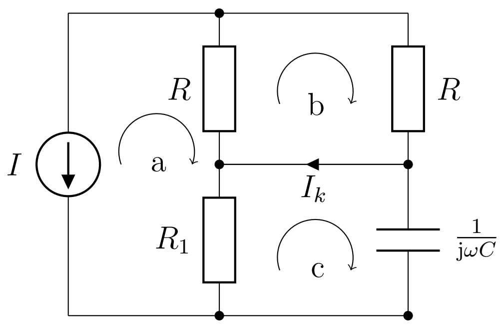
---

3) Ideal operationsförstärkare, impedans. Låt $u_{in}(t) \to U_{in}$, där U_{in} är den komplexa spänningen. Låt vidare U_{ut} vara den komplexa utspänningen motsvarande $u_{ut}(t)$, vidare $i \to I$. Vi antar att U_{in} och R och C, ω är kända.
a) I kretsen till höger bestäm relationen mellan U_{ut}/U_{in}. Ledning: Introducera noder, potentialvandra, bestäm den komplexa strömmen I.
b) En krets inimpedans definieras som $Z_{in} = U_{in}/I$ med de introducerade riktningarna. Vad är inimpedansen för kretsen?



Lösningsförslag till Hemuppgift nr 4 för EI1102 och EI1100, 2011

Examinator: Lars Jonsson



1a) I figuren har vi infört de tre maskorna a, b, c. Deras associerade strömmar är I_a, I_b och I_c, med riktning enligt figur. Vi ser direkt att $I_a = -I$ **(delsvar)**, då det är en fri strömkälla i ytterledaren. Vi har två maskor kvar, vi potentialvandrar i maska b:

$$-R(I_b - I_a) - RI_b = 0 \Rightarrow I_b = \frac{1}{2}I_a = \frac{-1}{2}I \tag{1}$$

(delsvar) I maska c:

$$-R_1(I_c - I_a) - \frac{1}{j\omega C}I_c = 0 \Rightarrow I_c = -I\frac{j\omega CR_1}{1 + j\omega CR_1}. \tag{2}$$

(delsvar).

1b) Vi får att $I_k = I_b - I_c$, dvs

$$I_k = -I(\frac{1}{2} - \frac{j\omega CR_1}{1 + j\omega CR_1}) = I\frac{j\omega CR_1 - 1}{2(1 + j\omega CR_1)} \tag{3}$$

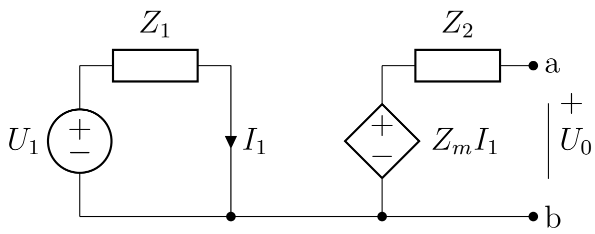
Vi söker amplitud: **(delsvar)**

$$|I_k| = \frac{|I|}{2}\left|\frac{1 - j\omega CR_1}{1 + j\omega CR_1}\right| = |I|\frac{1}{2}\left(\frac{1 + (\omega CR_1)^2}{1 + (\omega CR_1)^2}\right)^{1/2} = \frac{|I|}{2} \tag{4}$$

Noter att den är oberoende av frekvens mm. Fasen blir **(delsvar)**

$$\arg I_k = \arg\frac{-I}{2} + \arg(1 - j\omega CR_1) - \arg(1 + j\omega CR_1) = \pi + \arg I - 2\arctan(2\pi fCR_1) \tag{5}$$

där vi utnyttjat att $\omega = 2\pi f$, och att $\arg -1 = \pi$. Notera att om vi istället skrivit $\arg(+I(j\omega CR_1 - 1)) = \arg I + \arg(j\omega CR_1 - 1)$ får vi vara försiktiga. Rita gärna vektorn $j\omega CR_1 - 1$ i det komplexa talplanet och framförallt, rita in vinkeln mellan den positiva reella axeln och vektorn (detta är argumentet/vinkeln).



2a) Vi ska bestämma en tvåpol map ab. Vi börjar med att bestämma tomgångsspänningen U_0, mellan a och b. Den blir $U_2 = Z_mI_1$ eftersom det inte går en ström genom Z_2 (KVL), men U_2 beror på strömmen I_1, vi får därför att

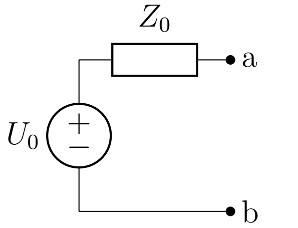
$$I_1 = U_1/Z_1 \Rightarrow U_0 = U_2 = U_1\frac{Z_m}{Z_1} = \textbf{delsvar} \tag{6}$$

Noter att vi har en beroende källa, och vi kan därför inte nollställa källor för att få ut den inre impedansen. Men vi kan bestämma kortslutningsströmmen. Kortslutningsströmmen blir $I_k = U_2/Z_2$, där U_2 beror på I_1. I_1 beror i detta fall *inte* av storleken på en eventuell last mellan ab. (Logiskt för antenner, men ovanlig vad det gäller kretsar). Vi får

$$I_k = \frac{U_2}{Z_2} = \frac{Z_mI_1}{Z_2} = U_1\frac{Z_m}{Z_2Z_1} \tag{7}$$

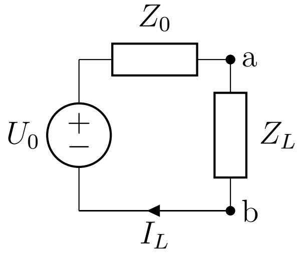
Vi får nu den ekvivalenta impedansen $Z_0 = U_0/I_k = Z_2$ [**delsvar**], och spänningen U_0 som vi just räknat ut. Vi får alltså en Thévenin ekvivalent av formen i kretsen här nedan till höger (se fig i 2b).

2b) Vi tittar på strömmen I_L i figuren till höger. Vi får att



$$I_L = \frac{U_0}{Z_0 + Z_L}. \tag{8}$$

Låt $Z_0 = Z_2 = R_2 + \mathrm{j}X_2$. Den aktiva effekten blir



$$P_r = \frac{1}{2}|I_L|^2 R_L = \frac{1}{2}\left|\frac{U_0}{Z_2 + Z_L}\right| R_L = \frac{|U_0|^2}{2}\frac{R_L}{(R_L + R_2)^2 + (X_L + X_2)^2} \tag{9}$$

Vi ser att P blir större om $X_L = -X_2$, det som är kvar är ett uttryck som ser precis likadant ut som när vi försöker maximera effekten med en reell resistans. Dvs vi ska derivera det som är kvar map R_L, sätta uttrycket lika med noll och lösa. Vi får:

$$\left.\frac{\partial P_r}{\partial R_L}\right|_{X_L=-X_2} = \left(\frac{1}{(R_L + R_2)^2} - \frac{2R_L}{(R_L + R_2)^3}\right) = 0 \tag{10}$$

Löser vi detta får vi $R_L = R_L$. Från uttrycket för P_r ser vi att i $R_L = 0$ är $P_r = 0$ och för $R_L \gg R_2$ får vi att $P_r \to 0$. Det finns ett värde mellan $R_L = 0$ och $R_L = \infty$ där funktionen är positiv, vi har en kontinuerlig funktion med en kritisk punkt, därför är detta ett maximum.

Vi ser precis som tidigare att vi får $R_L = R_0$. (Se kap 5.6 i Dorf och Svoboda eller P5.4.4 för er som har Pettersson). Dvs vi får maximal aktiv effekt om **(Svar)**

$$Z_L = Z_0^* = Z_2^* = R_2 - \mathrm{j}X_2. \tag{11}$$

Om vi sätter in ovanstående last får vi den aktiva effektutvecklingen i lasten till

$$P_r = \frac{|U_0|^2}{8R_L} \tag{12}$$

2c) Vi har redan ett uttryck för $P_r = \mathrm{Re}(|I_L|^2 Z_L)/2$ där $Z_L = Z_0^*$, med $Z_0 = Z_2 = R_2 + \mathrm{j}X_2$ och

$$I_L = U_0\frac{1}{Z_0 + Z_0^*} = \frac{U_0}{2R_2} = U_1\frac{Z_m}{2Z_1R_2} \Rightarrow P_r = \frac{1}{2}R_2|I_L|^2 = \frac{1}{8R_2}\left|\frac{U_1Z_m}{Z_1}\right|^2 \tag{13}$$

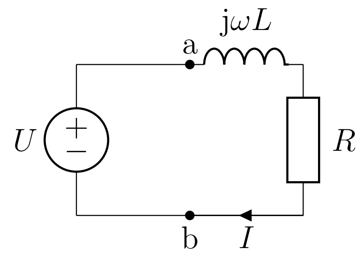
Aktiv effekt i Z_1 är

$$P_t = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}(U_1I_1^*) = \mathrm{Re}(\frac{|U_1|^2}{2Z_1^*}) = \mathrm{Re}(\frac{|U_1|^2(R_1 + \mathrm{j}X_1)}{2(R_1^2 + X_1^2)}) = |U_1|^2\frac{R_1}{2|Z_1|^2}. \tag{14}$$

Vi får

$$\frac{P_r}{P_t} = \frac{1}{8R_2}\left|\frac{U_1Z_m}{Z_1}\right|^2\frac{2|Z_1|^2}{|U_1|^2R_1} = \frac{|Z_m|^2}{4R_1R_2} = \textbf{Svar} \tag{15}$$

3a) Motorn är induktiv. Dvs vi bör kunna simulera den med en resistans i serie med en spole enligt figur. Här har vi sinus och effektivvärde, vi får därför komplex ström $U = \sqrt{2}U_{eff}$. Vi har valt att spänningen är referens spänning (dvs fas noll). Strömmen blir:



$$I = \frac{U}{R + \mathrm{j}\omega L} \tag{16}$$

Vi får komplex effekt

$$S = \frac{1}{2}UI^* = \frac{|U|^2}{2(R - \mathrm{j}\omega L)}, \; |S| = \frac{1}{2}\frac{|U|^2}{2(R^2 + (\omega L)^2)} = 400W, \text{ men} S = |S|(\cos\alpha + \mathrm{j}\sin\alpha) = P + \mathrm{j}Q \tag{17}$$

Då vi vet att $\cos\alpha = 1/2$ får vi att $\alpha = \pm 60°$, och lasten är induktiv, dvs $alpha > 0$ och $\sin\alpha = \sqrt{3}/2$. Vi får att reaktiv effekt $Q = |S|\sin\alpha = +346 \approx 350\text{W}$ **(Svar)**

3b) Vi vill sätt in en kondensator parallellt med lasten e.g. mellan ab. Vi vet att fullständig kompensering innebär att man ser till att lasten blir rent resistiv, vi kan därför titta på tex admittansen för parallellkopplingen (Y_C för kondensatorns admittans och Y_M för motorns admittans) och få ett uttryck för ωC i termer av R och ωL. Tyvärr vet vi ingen av dessa storheter. Låt oss därför istället titta på den nya komplexa effekten, S_{new}:

$$\begin{aligned} S_{new} = \frac{1}{2}UI^* = \frac{1}{2}|U|^2(Y_C^* + Y_M^*) = \frac{1}{2}\left(-\mathrm{j}\omega C|U|^2 + \frac{|U|^2}{R - \mathrm{j}\omega L}\right) \\ = \frac{-1}{2}\mathrm{j}\omega C|U|^2 + S_{old} = \frac{-1}{2}\mathrm{j}\omega C|U|^2 + P_{old} + \mathrm{j}Q_{old}. \end{aligned} \tag{18}$$

Här är S_{old} komplex effekt utan kondensatorn, dvs $Q_{old} = 346$W. Vi vill att reaktiv effekt ska försvinna. Vi tittar enbart på imaginärdelen av S_{new} och får ($\omega = 2\pi f$, $|U|^2 = 2|U_{eff}|^2$)

$$C = \frac{Q_{old}}{2\pi f(|U|^2/2)} = \frac{346}{100\pi 230^2} \approx 21\mu\text{F} \tag{19}$$

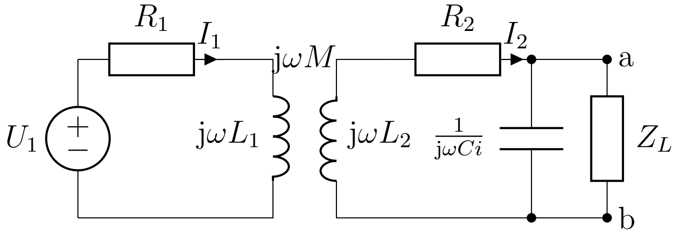
Svar. Obs vi har endast två värdesiffror.

3c) Strömmen före inkopplingen blir

$$S_{old} = \frac{1}{2}UI^*, \Rightarrow |I| = \frac{2|S_{old}|}{|U|} = \frac{2 \cdot 400}{230 \cdot \sqrt{2}} \approx 2.5\text{A} \tag{20}$$

(delsvar) Vi har att $|S_{new}| = P_{old} = |S|\cos\alpha = 200W$, vilket ger oss på samma sätt som förut att

$$|I_{new}| = \frac{2|S_{new}|}{|U|} = \frac{2 \cdot 200}{230\sqrt{2}} \approx 1.2\text{A=}\textbf{delsvar} \tag{21}$$



4) Vi söker en 2-pol ekvivalent map ab. Jag kommer att svara i komplex notation då inget annat specificerats. Först översätter vi alla storheter till komplexa spänningar och impedanser. Vi potentialvandrar i den primära kretsen och får:

$$U_1 - R_1 I_1 - \mathrm{j}\omega L_1 I_1 \mp \mathrm{j}\omega M I_2 = 0 \qquad (22)$$

Här har vi tagit hänsyn till de två aktuella fallen. Antingen samverkar I_1 och I_2 eller också motverkar de varandra vilket förklarar $\pm$-tecknen. I den sekundära kretsen har jag introducerat en last. Vi ser att om vi parallellkopplar lasten med kondensatorn får vi

$$Z_0 = Z_L // \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} = \frac{Z_L}{1 + \mathrm{j}\omega C Z_L} \qquad (23)$$

Vi ska räkna ut tomgångsspänningen $Z_L = \infty$ och kortslutningsströmmen $Z_L = 0$. Vi ser att om vi lämnar Z_0 på den platsen kan vi efter uträknad ström I_2 snabbt bestämma U_t och I_k genom att välja de två ovanstående lasterna. Vi får för sekundärkretsen:

$$(-\mathrm{j}\omega L_2 - R_2 - Z_0) I_2 \mp \mathrm{j}\omega M I_1 = 0 \qquad (24)$$

Notera att om strömmarna samverkar i primärkretsen så samverkar de i sekundärkretsen och tvärt om därför är $\pm$-tecknen relaterade till varandra.

Strömmarna är okända. För att bestämma en 2-pol behöver vi tomgångsspänningen $U_t = I_2 Z_0$, när $Z_L = \infty$, och kortslutningsströmmen $I_k = I_2$ när $Z_L = 0$. Vi måste därför bestämma I_2. Ur primärkretsens ekvation får vi ett uttryck för I_1 i termer av U och I_2 samt impedanser:

$$I_1 = \frac{U_1 \mp \mathrm{j}\omega M I_2}{R_1 + \mathrm{j}\omega L_1}. \qquad (25)$$

Vilket vi sätter in i sekundärkretsens ekvation för att få

$$(-\mathrm{j}\omega L_2 - R_2 - Z_0) I_2 \mp \mathrm{j}\omega M \frac{U_1 \mp \mathrm{j}\omega M I_2}{R_1 + \mathrm{j}\omega L_1} = 0 \Rightarrow I_2 (\mathrm{j}\omega L_2 + R_2 + Z_0 \pm \mathrm{j}\omega M \frac{\mp \mathrm{j}\omega M}{R_1 + \mathrm{j}\omega L_1}) = \frac{\mp \mathrm{j}\omega M U_1}{R_1 + \mathrm{j}\omega L_1}$$

$$I_2 = \frac{\mp \mathrm{j}\omega M U_1}{(\mathrm{j}\omega L_2 + R_2 + Z_0)(R_1 + \mathrm{j}\omega L_1) + \omega^2 M^2} \qquad (26)$$

Genom att sätta in $Z_L = 0$ dvs $Z_0 = 0$ får vi kortslutningsströmmen:

$$I_k = I_2|_{Z_0=0} = \frac{\mp \mathrm{j}\omega M U_1}{(\mathrm{j}\omega L_2 + R_2)(R_1 + \mathrm{j}\omega L_1) + \omega^2 M^2} \qquad (27)$$

Vi får tomgångsspänningen $U_t = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} I_2|_{Z_L=\infty}$ dvs genom att sätta in $Z_L = \infty$ vilket ger $Z_0 = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}$ och

$$U_t = \frac{\mp \mathrm{j}\omega M U_1 \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}}{(\mathrm{j}\omega L_2 + R_2 + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C})(R_1 + \mathrm{j}\omega L_1) + \omega^2 M^2} \qquad (28)$$

Vi får den inre impedansen Z_t till

$$Z_t = \frac{U_t}{I_k} = \frac{[(\mathrm{j}\omega L_2 + R_2)(R_1 + \mathrm{j}\omega L_1) + \omega^2 M^2] \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}}{(\mathrm{j}\omega L_2 + R_2 + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C})(R_1 + \mathrm{j}\omega L_1) + \omega^2 M^2} \qquad (29)$$

Notera att impedansen är oförändrad av valet av punktnotation, men spänningen och strömmen påverkas. En Thevenin 2-pol består av (U_t, Z_t) i ovan, kopplade i serie. **Svar**.