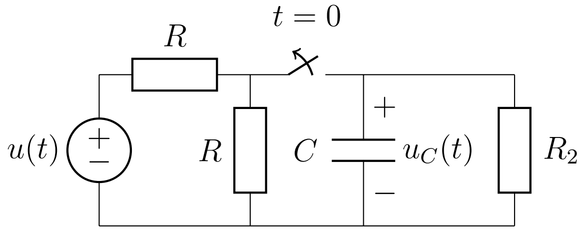
Tentamen i Elkretsanalys för EI1120 och EI1110 del 2

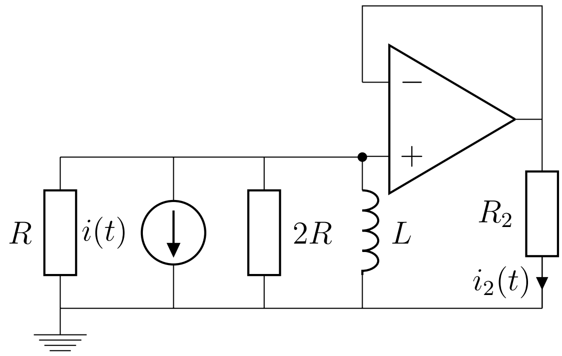
Datum/tid: 2012-03-16, kl 14-19. Hjälpmedel: Papper och penna. **Endast en** uppgift per blad.
Godkänt för EI1120 om ($A \geq 50\%$)&($B \geq 25\%$)&($C \geq 25\%$)&($B+C \geq 50\%$). Bonus för hemuppgifterna räknas in i B+C värdet. Godkänt mini-prov motsvarar avklarad A-del.
Godkänt för EI1110 del 2 om: ($B \geq 25\%$)&($C \geq 25\%$)&($B + C \geq 50\%$). Bonus för hemuppgifterna räknas in i B+C värdet. De som har del 1 kvar kan klara denna och del 2 om ($A \geq 50\%$)&($B+C \geq 50\%$).
Namn och personnummer på varje blad. Examinator: Lars Jonsson

B – Transienter

1) [6p] Här är $u(t) = U$ en likspänningskälla, och lasten $R_2 = R$. Vid tiden $t = 0$ öppnas kontakten.
a) Bestäm $u_C(t)$ för alla tider.
b) Bestäm den totala energin som förbrukas i R_2 för tidsintervallet $(0, \infty)$.

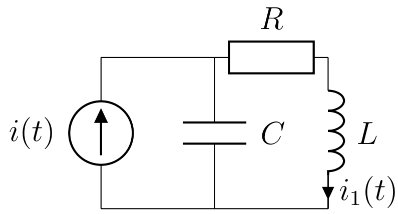


2) [6p] Strömkällan $i(t)$ har värdet $2I_0$ för $t < 0$ och I_0 för $t \geq 0$. Behandla operationsförstärkaren som ideal.
a) Bestäm $i_2(t)$ för alla tider.
b) Denna typ av operationsförstärkarkoppling är mycket användbar. Vad gör operationsförstärkarkopplingen i kretsen?

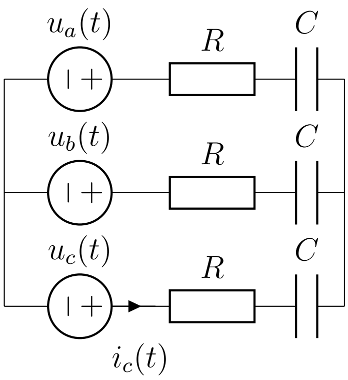


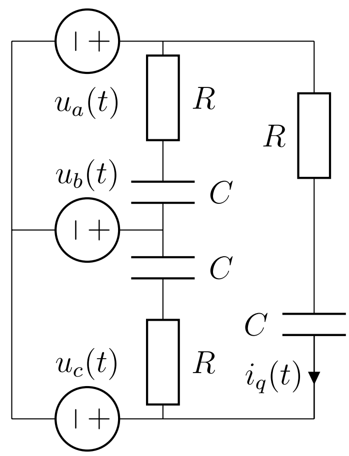
C – Växelström

3) [6p] Filterkretsen till höger matas av en strömkälla $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$ där $\omega < 1/\sqrt{LC}$.
a) Bestäm $i_1(t)$ och kontrollera dimensionerna. Strömmen $i_1(t)$ ska vara på formen $B \cos(\omega t + \beta)$, där B och β ska anges i de kända storheterna: I_0, ω, C, L, R.
b) Kan R väljas så att $\beta = -45°$? Om det är möjligt, hur ska resistansen R väljas för att uppnå detta?



4) [6p] I tre-fas systemen till höger är $u_a(t) = U_0 \cos(\omega t)$, $u_b(t) = U_0 \cos(\omega t - 120°)$, $u_c(t) = U_0 \cos(\omega t + 120°)$. Låt $\omega CR = 1$.
a) Bestäm strömmen $i_c(t)$.
b) Bestäm den komplexa strömmen motsvarande $i_q(t)$ i effektivvärdesskalan. Förenkla svaret så lång som möjligt och svara på polär form, dvs på formen $A\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha}$, med $A > 0$, ange A och α genom att använda de kända storheterna U_0, ω, R och C samt $\omega CR = 1$.

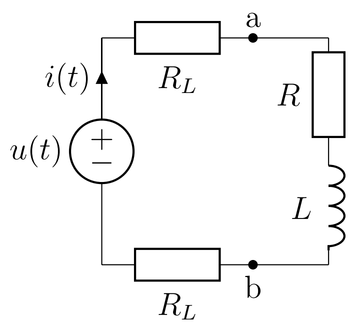




Var god vänd.

5) [6p] Lasten mellan ab är en borrmaskin. Källan är $u(t) = U_0 \sin(\omega t)$. Borrmaskinen är ansluten till en förlängningssladd som i figuren är representerad med R_L.

a) Bestäm borrmaskinens effektfaktor $P/|S|$, dvs aktiv effekt genom skenbar effekt för borrmaskinen här representerad med resistansen R och spolen L. Ge svaret i de kända storheter: U_0, ω, R, L, R_L.

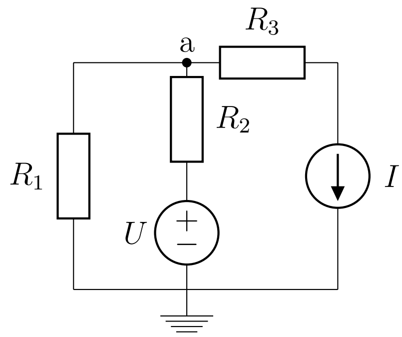


Total effektkompensering ska resultera i en effektfaktor som är ett. Den kan erhållas genom att man ansluter en lämplig passiv tvåpolskomponent direkt mellan noderna a och b. Låt $I_{\text{före}}(\omega)$ vara strömmen från källan utan effektkompensering dvs motsvarande $i(t)$ i figuren och låt $I_{\text{efter}}(\omega)$ vara strömmen från källan med effektkompensering.

b) Vilken komponent ska anslutas mellan noderna a och b för att erhålla total effektkompensering och hur stor ska den vara? Avgör om amplituden på strömmen från källan minskar eller ökar efter total effektkompensering. Som ett *första* steg för att visa om strömamplituden ökar eller minskar **bestäm** kvoten $|I_{\text{efter}}(\omega)/I_{\text{före}}(\omega)|$ i termer av de kända storheterna R, R_L, ω, C, U_0. I *andra* steget i betraktelsen av amplitudkvoten sätt in specialfallet $\omega L = R$ och $R_L \ll R$ och använd ledningen: $(1+\epsilon)^p \approx (1 + p\epsilon + \ldots)$, om $\epsilon \ll 1$. Kommentera resultatet!

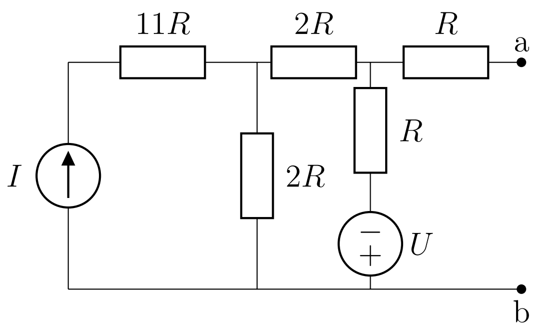
A – Likström

6) [5p] U är en likspänningskälla och I är en likströmskälla. Bestäm potentialen i a och dimensionskontrollera uttrycket.



---

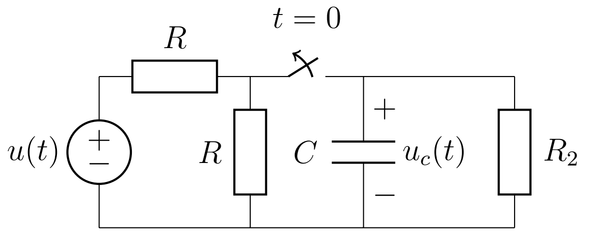
7) [5p] Här är U en likspänningskälla och I är en likströmskälla. Bestäm en ekvivalent Norton tvåpol med avseende på ab. Vilken last ska anslutas för största möjliga effektutveckling i lasten?



Lösningsförslag till tentamen i elkretsanalys

Kurser: EI1120 och EI1110 del 2. Datum: 2012-03-16. Examinator: Lars Jonsson

B och C: Transienter och växelström

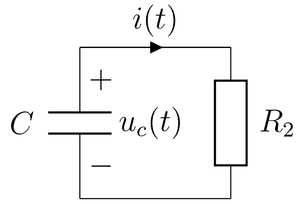


1a) För $t<0$ är ström och spänning i kretsen konstant, dvs kondensatorn uppför sig som ett avbrott. Notera att $R//R_2 = R/2$. Vi får genom spänningsdelning att **(delsvar:)**$u_c(t) = U(R/2)/(R/2+R) = U/3$ för $t<0$.

För $t>0$ vet vi att kondensatorn är uppladdad vid $t=0$ med initalspänningen $u_c(0+) = U/3$. (Kontinuitet)

I standard-kretsen som är kvar är $i = -Cdu_c/dt$, och potentialvandring ger

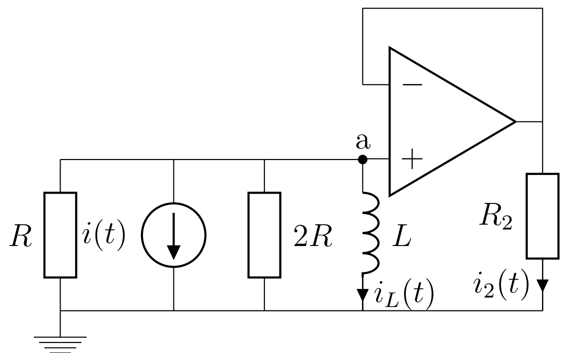
$$u_c - i(t)R = 0 \Rightarrow u_c + RC\frac{du_c}{dt} = 0 \Rightarrow u_c(t) = K\mathrm{e}^{-t/(RC)}. \tag{1}$$



Initialvillkoret ger **(delsvar:)**$u_c(t) = (U/3)\mathrm{e}^{-t/(RC)}$

1b) Effekten i $R_2 = R$ är $p(t) = u_c(t)i(t) = [u_c(t)]^2/R$. Energin blir: **(Svar)**

$$w = \int_0^\infty p(t)\,\mathrm{d}t = \frac{U^2}{9R}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-2t/(RC)}\,\mathrm{d}t = \frac{CU^2}{18}. \tag{2}$$



2a) Vi har en ideal op, dvs ingen ström på ingångarna och samma potential på båda ingångarna. **För** $t<0$ är strömmar och spänningar konstanta i kretsen, vilket ger att spolen är en kortslutning med strömmen $i_L(t) = -2I_0$. Dvs potentialerna på +-polen och −-polen av op:n är för $t<0$ noll. Vilket gör att **(delsvar:)**strömmen $i_2(t) = 0$A för $t<0$ då op:n är en spänningsföljare, och har 0V på utsignalen.

I nod a inför vi potentialen V_a. För spolen gäller: $V_a = Ldi_L/dt$. **För** $t>0$ noterar vi igen att det inte går någon ström in i op:n. Det gör att vi kan bestämma först i_L och där med V_a i a. KCL i a ger:

$$I_0 + V_a\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{2R}\right) + i_L(t) = 0 \Rightarrow \frac{di_L}{dt}\frac{3L}{2R} + i_L(t) = -I_0 \Rightarrow i_L(t) = K\mathrm{e}^{-t/\tau} - I_0, \tag{3}$$

där $\tau = 3L/2R$. Från $t<0$ vet vi att $i(0^-) = -2I_0$, kontinuitet hos strömmen genom spolen ger $i_L(t) = -I_0(1+\mathrm{e}^{-t/\tau})$. Spänningen blir

$$V_a = L\frac{di_L}{dt} = \frac{2}{3}RI_0\mathrm{e}^{-t/\tau}. \tag{4}$$

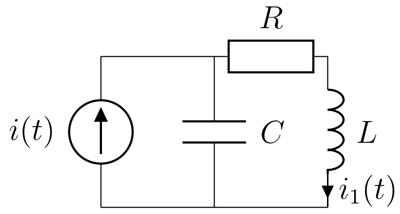
Operationsförstärkaren är en spänningsföljare vilket ger att för $t>0$ **(delsvar:)**

$$i_2(t) = \frac{V_a}{R_2} = \frac{2R}{3R_2}I_0\mathrm{e}^{-t/\tau},\ \tau = \frac{3L}{2R} \tag{5}$$

2b) Operationsförstärkarkopplingen är en spänningsföljare. Dvs spänningen på +-polen kommer att ligga på utgången av op:n. Funktionen är att op:n buffrar R_2 från övriga kretsen. Dvs en belastning som R_2 kommer inte att påverka tidskonstant i transienten och inte heller strömmana i övriga kretsen.

---

3) Strömkällan i komplex representation är $I = I_0$ (toppvärdesskala). Strömdelning ger



$$I_1(\omega) = I\frac{\frac{1}{R+\mathrm{j}\omega L}}{\frac{1}{R+\mathrm{j}\omega L}+\mathrm{j}\omega C} = I\frac{1}{1-\omega^2 LC+\mathrm{j}\omega CR} \tag{6}$$

Tidssignalen $i_1(t) = \mathrm{Re}(I_1(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})$ vilket blir **(Svar)**

$$i_1(t) = \frac{I_0}{\sqrt{(1-\omega^2 LC)^2+(\omega CR)^2}}\cos(\omega t - \arctan\frac{\omega CR}{1-\omega^2 LC}) \tag{7}$$

(Alternativ lösning innehåller $|I_0|$ i amplituden och ett extra $\arg I_0$ i fasen.)

Dimensionsanalys: Vi måste kontrollera amplitud och fas. Vi noterar att $[\omega L] = \Omega$, $[\omega C] = \Omega^{-1}$ vilket ger $[\omega^2 CL] = 1$. Dimensionen av R är Ω. Dvs $[\omega CR] = 1$. Vi får därför att nämnaren i amplituden blir dimensionslös.

$$[\sqrt{(1-\omega^2 LC)^2+(\omega CR)^2}] = 1. \tag{8}$$

Dimensionen av i_1 och I_0 är båda ampere, så amplitud-biten är korrekt. Om vi tittar på fasen: Uttrycket

$$[\frac{\omega CR}{1-\omega^2 LC}] = 1 \tag{9}$$

eftersom vi delar två dimensionslösa storheter med varandra, fasen blir också dimensionslös. **(Svar)**.

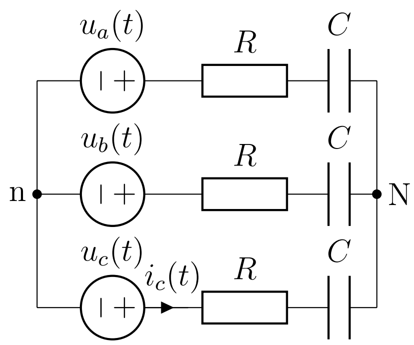
3b) Svar ja vi ska ha $\arctan 1 = 45°$. Vi ska välja R så att **(Svar)**

$$\omega CR = 1-\omega^2 CL \Rightarrow R = \frac{1-\omega^2 CL}{\omega C} \tag{10}$$

Vi ser att kravet $\omega < 1/\sqrt{LC}$ är nödvändigt för att få $R > 0$.

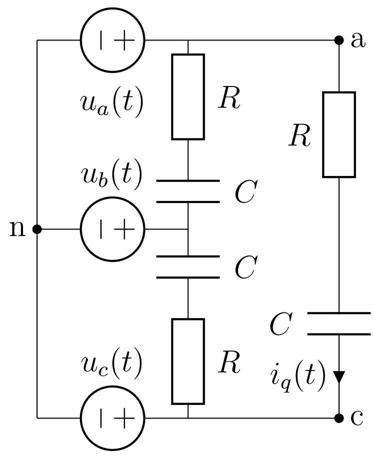
Notera att om $I_0 < 0$ fungerar ovanstående lösning om $B < 0$.

4a) Trefas systemet är ett symmetrisk Y-Y kopplad trefas dvs nod n och N har samma potential som vi väljer till noll. Vi kan alltså räkna per-fas. Den komplexa spänningen i effektivitetskalan motsvarande $u_c(t)$ blir $U_c = (U_0/\sqrt{2})\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi/3}$. Den komplexa strömmen motsvarande $i_c(t)$ blir



$$I_c(\omega) = \frac{U_c}{R+\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}} = \frac{\mathrm{j}\omega CU_c}{1+\mathrm{j}\omega RC} = \frac{\mathrm{j}\omega CU_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi/3}}{\sqrt{2}(1+\mathrm{j}\omega RC)} \tag{11}$$

Vi ska bestämma strömmen på tidsform (effeltivvärdeskala) $i_c(t) = \mathrm{Re}(\sqrt{2}I_c(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})$:



$$i_c(t) = \frac{\omega C|U_0|}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}\cos(\omega t+\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{2}-\arctan(\omega RC)+\arg U_0). \tag{12}$$

Genom att notera att $\omega CR = 1$ får vi

$$i_c(t) = \frac{\omega C|U_0|}{\sqrt{2}}\cos(\omega t+\frac{11\pi}{12}+\arg U_0). \tag{13}$$

Vi noterar att $\arg U_0 = 0$ om $U_0 > 0$ och $\arg U_0 = \pi$ om $U_0 < 0$.

4b) Notera de tre intressanta noderna n, a och c. Låt motsvarande potentialer vara V_n, V_a och V_c respektive och noterar att $V_c = U_c + V_n$ och likadant för V_a: Vi får då att

$$I_q = \frac{(V_a - V_n) - (V_c - V_n)}{R + \frac{1}{j\omega C}} = j\omega C \frac{U_a - U_c}{1 + j\omega CR}. \tag{14}$$

Vi söker I_q i effektivvärdesskalan. Spänningarna U_a och U_c är i effektivitetsskalan. Ur figuren nedan till höger följer att triangeln med bas $U_{ac} = U_a - U_c$ är likbent och triangelns vinklar är $30, 30, 120°$. Hypotenusan får alltså längden $2\cos(30°)|U_a| = \sqrt{3}|U_a|$ dvs

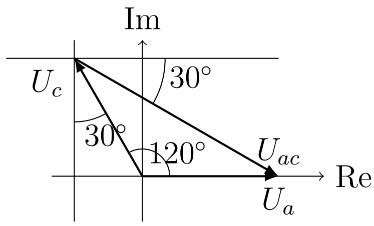
$$U_a = \frac{U_0}{\sqrt{2}},\ U_c = \frac{U_0}{\sqrt{2}} e^{j2\pi/3},\ U_{ac} = U_a - U_c = \sqrt{\frac{3}{2}} U_0 e^{-j\pi/6}. \tag{15}$$

Notera att $j\omega C = \omega C e^{j\pi/2}$, och $(1 + j\omega CR)^{-1} = (1 + (\omega CR)^2)^{-1/2} e^{-j \arctan \omega CR}$. Vi får därför att:

$$I_q = A e^{j\alpha},\ \text{med } A = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\omega C |U_0|}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}},\ \text{och } \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} - \arctan(\omega CR) + \arg U_0. \tag{16}$$

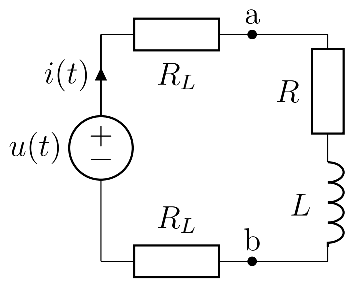
Om vi använder $\omega CR = 1$ får vi **(delsvar:)**

$$A = \frac{\sqrt{3}}{2} \omega C |U_0|,\ \text{och } \alpha = \frac{\pi}{12} + \arg U_0. \tag{17}$$



Vi ser att amplituden hos strömmen ökar för konstant last vid en delta koppling, jämfört med en Y-koppling av lasten.

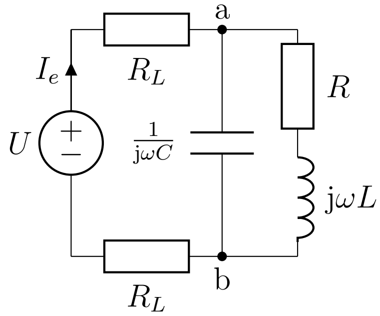
5a) Låt I vara den komplexa (toppvärdes)strömmen i kretsen. Vi får då komplex och aktiv effekt hos borrmaskinen till:



$$S = \frac{1}{2}|I|^2(R + j\omega L),\ P = \operatorname{Re} S = \frac{1}{2}|I|^2 R \tag{18}$$

Vilket ger effektfaktorn **(delsvar:)** $\cos\phi = R/\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$.

5b) Belastningen är induktiv, vi ska kompensera med en kondensator. För att bestämma kondensatorns storlek vill vi få effektfaktorn till ett, vilket är detsamma som att nollställa den reaktiva effekten, Q. Den komplexa effekten $S = P + jQ = \frac{1}{2}|I_e|^2 Z$, där $Z = (R + j\omega L)//\frac{1}{j\omega C}$. Att nollställa den reaktiva effekten är alltså detsamma som att Z (och $Y = 1/Z$) ska vara rent reell **(delsvar:)**



$$Y = \frac{1}{R + j\omega L} + j\omega C = \frac{R - j\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} + j\omega C \Rightarrow C = \frac{L}{R^2 + (\omega L)^2} \tag{19}$$

Med ovan angivna kapacitans blir $Q = 0$ då $\operatorname{Im} Z = 0$.

Låt $u(t)$ motsvara det komplexa $U(\omega)$ i toppvärdesskala. För att betrakta strömamplituderna noterar vi att före effektkompenseringen har vi $I_{\text{före}} = I$:

$$I = \frac{U}{2R_L + R + j\omega L}. \tag{20}$$

Efter effektkompensering har vi att $(R + j\omega L)//\frac{1}{j\omega C} = 1/Y = (R^2 + (\omega L)^2)/R$, för ovanstående värde av C. Vi får därför att $I_{\text{efter}} = I_e$:

$$I_e = \frac{U}{2R_L + 1/Y} = \frac{U}{2R_L + \frac{R^2+(\omega L)^2}{R}} \tag{21}$$

Vi söker **(delsvar:)**

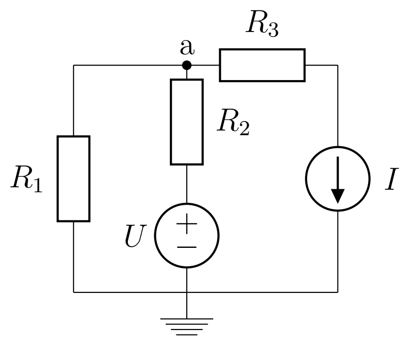
$$\left|\frac{I_e}{I}\right| = \frac{R\sqrt{(2R_L + R)^2 + (\omega L)^2}}{2R_L R + R^2 + (\omega L)^2} \tag{22}$$

För specialfallet $\omega L = R$ och $R_L \ll R$ får vi **(delsvar:)**

$$\begin{aligned}\left|\frac{I_{\text{efter}}}{I_{\text{före}}}\right| = \left|\frac{I_e}{I}\right| = \frac{R\sqrt{4R_L^2 + 4R_L R + 2R^2}}{2R_L R + 2R^2} = \frac{\sqrt{1 + \frac{2R_L}{R} + \frac{2R_L^2}{R^2}}}{\sqrt{2}(1 + \frac{R_L}{R})} \\ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{R_L}{R} + \mathcal{O}(\frac{R_L^2}{R^2})\right)\left(1 + \frac{R_L}{R} + \mathcal{O}(\frac{R_L^2}{R^2})\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \mathcal{O}(\frac{R_L^2}{R^2})\end{aligned} \tag{23}$$

Då vi kompenserat bort de reaktiva förlusterna och vi får en större(!) total impedans. Detta innebär att strömmen från källan minskar med en faktor $\sqrt{2}$, vilket lägre förluster i ledningen. Ytterligare räkningar visar att effekten i borrmaskinen ökar marginellt (räkna ut effektförändringen i borrmaskinen!). Detta fall liknar fallet i kap 11.6, men där är spänningen och effekt i lasten är konstant.

A – Likström



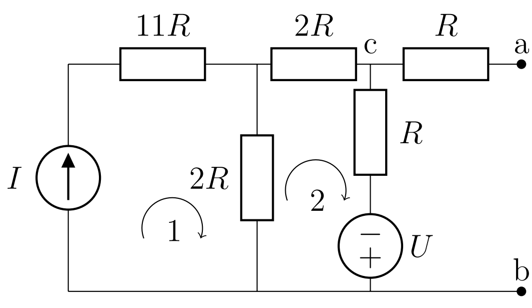
6) Vi har två noder. En är jordad. Genom att använda nodanalys får vi direkt potentialen V_a i a. Vi uttrycker alla strömmar ut ifrån a i termer av potentialen V_a och använder Kirchhoffs strömlag i a **(delsvar:)**

$$\frac{V_a}{R_1} + \frac{V_a - U}{R_2} + I = 0 \Rightarrow V_a = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}\left(\frac{U}{R_2} - I\right). \tag{24}$$

För att kontrollera dimensionerna noterar vi att resistanser har dimension Ω, ström A och spänning V, samt att V=ΩA och vi får då **(delsvar:)**

$$\text{V} = \frac{\Omega\Omega}{\Omega + \Omega}\left(\frac{\text{V}}{\Omega} + \text{A}\right) = \text{V} + \text{A}\Omega = \text{V} \tag{25}$$

Dvs höger och vänster led har samma dimension.



7) Vi får den inre resistansen genom att nollställa källorna (avbrott för I och kortslutning av U). Det ger den inre resistansen mellan ab till

$$R_{in} = (2R + 2R)//R + R = \frac{9}{5}R \tag{26}$$

Vi söker en Norton ekvivalent ström och om vi vet tomgångspänning och inre resistans kan vi bestämma strömmen. Notera att vid tomgång går ingen ström mellan a och c och därför kommer potentialen vara lika i nod a och c. Låt potentialen i a, b och c vara V_a, V_b och V_c. Vi får tomgångspänningen genom att bestämma spänningen mellan cb dvs

$U_{cb} = V_c - V_b$. Vi gör detta genom maskanalys vi har två maskor. I maska 1 finns en strömkälla i ytterledaren och därför är strömmen $I_1 = I$. I maska 2 får vi

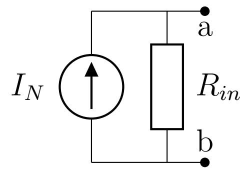
$$-2R(I_2 - I_1) - 2RI_2 - RI_2 + U = 0 \Rightarrow I_2 = \frac{1}{5R}(U + 2RI) \tag{27}$$

Potentialvandring från c till a ger tomgångspänningen:

$$V_c - I_2R + U = V_b \Rightarrow U_{ab} = U_{cb} = V_c - V_b = I_2R - U = \frac{1}{5}(U + 2RI) - U = \frac{1}{5}(2RI - 4U) \tag{28}$$

Tomgångspänningen ger oss Nortonkällans ström eller kortslutningsströmmen genom relationen **(Svar)**

$$I_N = \frac{U_{ab}}{R_{in}} = \frac{1}{9}(2I - \frac{4U}{R}) \tag{29}$$



och den inre resistansen är $9R/5$ de ska vara kopplade enligt figuren till höger. Tvåpolen ska belastas med den en last $R_L = R_{in}$ för att få maximal aktiv effektutvecklingen i lasten.
