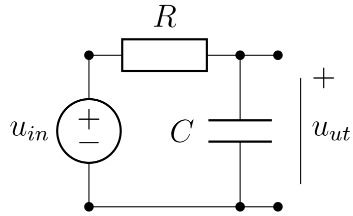
Tentamen i Elkretsanalys för EI1120 och EI1110 del 2

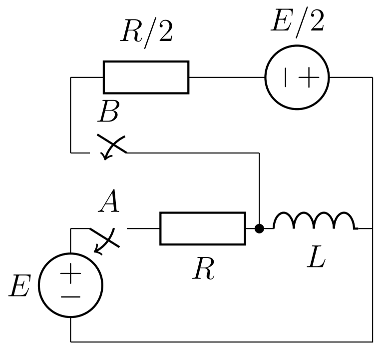
Datum/tid: 2012-06-11, kl 8-13. Hjälpmedel: Papper och penna. **Endast en** uppgift per blad.
Godkänt för EI1120 om ($A \geq 50\%$)&($B \geq 25\%$)&($C \geq 25\%$)&($B+C \geq 50\%$). Bonus för hemuppgifterna räknas in i B+C värdet. Godkänt mini-prov motsvarar avklarad A-del.
Godkänt för EI1110 del 2 om: ($B \geq 25\%$)&($C \geq 25\%$)&($B+C \geq 50\%$). Bonus för hemuppgifterna räknas in i B+C värdet. De som har del 1 kvar kan klara denna och del 2 om ($A \geq 50\%$)&($B+C \geq 50\%$).
Namn och personnummer på varje blad. Examinator: Lars Jonsson

B – Transienter

1) [6p] Antag att kondensatorn är oladdad vid $t = 0^-$. Bestäm utsignalen $u_{ut}(t)$ som funktion av tid, givet följande insignal:
a) $u_{in} = 0$ för $t < 0$ och $u_{in} = u_0$ för $t > 0$.
b) $u_{in} = 0$ för $t < 0$ och $u_{in} = tu_0/T$ för $t > 0$. Konstanten T är en given tid. Ledning: Det är nyttigt att kontrollera dimensionen i detta svar. Man kan också ha hjälp av $\int_A^B f'g\,\mathrm{d}t = fg|_A^B - \int_A^B fg'\,\mathrm{d}t$

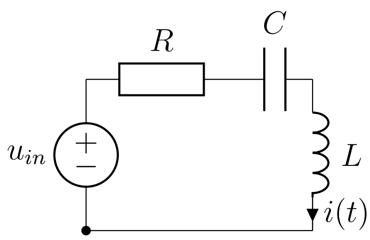


2) [6p] Kretsen till höger representerar en lamp-krets. Lamporna är här ersatta med två resistanser $R_1 = R/2$ och $R_2 = R$. Kontakterna är synkroniserade så att A öppnas och B stängs vid tiden $t = 0$. Betrakta kontakterna som ideala, dvs om A är öppen är B stängd och tvärt om. Källorna är likspänningskällor.
a) Bestäm absorberad effekt i respektive lampa som funktion av tid. Kretsen har vid $t = 0^-$ befunnit sig länge i det givna tillståndet.
b) Tillverkaren hävdar att den totala ljusmängden aldrig blir mindre än den vid mycket stora tider (dvs $t \to \infty$) för kretsen ovan. Vad blir den minsta ljusmängden från kretsen? Stämmer det överens med tillverkarens påstående? Motivera. Använd approximationen att ljusmängden är proportionell mot absorberad effekt.

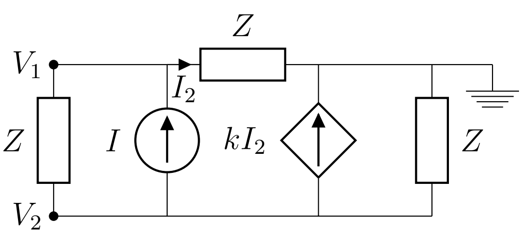


C – Växelström

3) [6p] Spänningen u är en harmonisk källa med vinkelfrekvens ω. Kretsen är en resonans-krets. Låt den komplexa strömmen motsvarande $i(t)$ betecknas $I(\omega)$, på samma sätt motsvars $u(t)$ av $U(\omega)$.
a) Bestäm överföringsfunktionen $H(\omega) = I(\omega)/I_0$, där $I_0 = U/R$.
b) Bestäm resonans-frekvens, bandbredd och ett uttryck för överföringsfunktionens fas.
c) Rita ett Bode-diagramet för $|H(\omega)|$, var noga att får rätt värde på x och y-axeln på kurvan vid minst en punkt, och indikera avtagande respektive ökning i dB/dec där de förekommer.



4) [6p] Kretsen till höger representerar en idealisering av en förstärkarkrets. Den beroende strömkällan levererar strömmen kI_2. Växelströmskällan i kretsen har den komplexa strömmen $I(\omega)$.
a) För att felsöka kretsen måste potentialerna V_1 och V_2 bestämmas. Uttryck potentialerna i termer av impedansen Z samt I och k. Observera: Strömmen I_2 är okänd och måste beräknas.



Var god vänd.

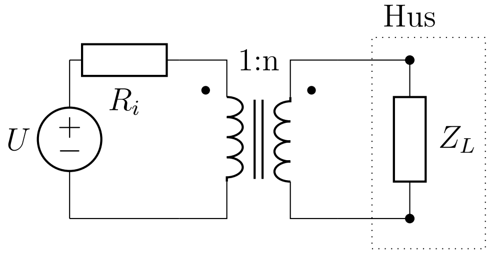
4b) Vid lämpligt val av förstärkning kan strömmen I_2 skrivas på formen (effektivvärde)

$$I_2 = \frac{R}{3R + \mathrm{j}X} I(\omega). \tag{1}$$

Källan I i komplexdomän har formen $I(\omega) = I_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi}$, där $I_0 > 0$ och den har den kända frekvensen f_0. Bestäm hur tidsdomänströmmen motsvarande I_2 ser ut. Identifiera speciellt strömmensamplitudens toppvärde och strömmens fas. Ledning: Använd endast kända storheter i svaret.

---

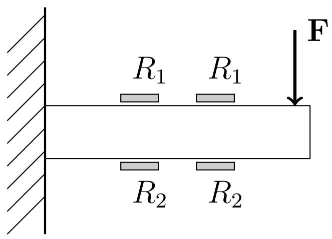
5) [6p] Strömförsörjning på avlägsna platser är ofta ett problem. En lösning är att använda små vattenkraftsverk för att tillhandahålla elektricitet. Generatorn är här illustrerad som växelströmskällan U (toppvärde) med en inre impedans R_i och den har vinkelfrekvensen ω_0. Varje hushåll, här illustrerad som en last $Z_L = R_L + \mathrm{j}X_L$ antas bestå av lampor, en spis och ett kylskåp och blir därför induktiv last dvs $X_L > 0$.

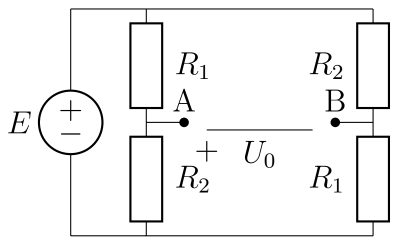


a) Bestäm den aktiva effekt P som hushållet förbrukar. Utryck svaret i R_i, R_L, X_L, U och n.
b) Vattenkraftverket är i detta fall är tyvärr något underdimensionerat, och någon föreslår att man ska använda effektkompensering. Visa hur och vad som bör kopplas in, och bestäm storleken på komponenten för att få perfekt effektkompensering, dvs effektfaktorn $P/|S|$ ska vara ett.

A – Likström

6) [5p] En töjningsgivare består av ett eller flera motstånd vars resistans påverkas av töjningen i materialet som de är fastlimmade på. I detta fall innehåller givaren fyra motstånd monterade på en balk enligt figuren till höger. På balken ansätts kraften $\mathbf{F}$. Motstånden är kopplade i en bryggkoppling enligt figuren till höger.

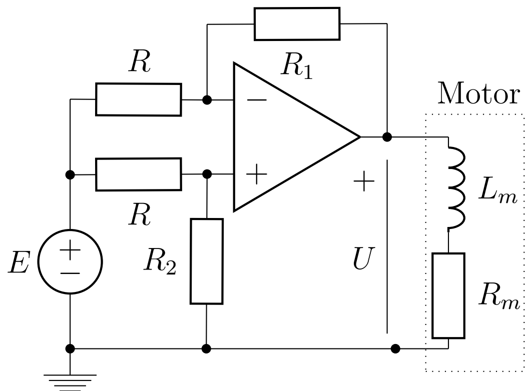




a) Bestäm tomgångspänningen U_0.
b) För att mäta spänningen ansluts en voltmeter med den inre resistansen R_{in} mellan AB. Voltmetern anger spänningsfallet över resistansen R_{in}. Det sanna värdet som behövs för att bestämma töjningen är tomgångspänningen. Bestäm det relativa felet som voltmetern visar jämfört med tomgångspänningen. Antag att $R_{in} = 4R_2$ och $R_1 = R_2 + R_\varepsilon$ där $R_\varepsilon \ll R_2$.

---

7) [5p] En solfångare kopplas till en motor som ska vrida den, så att den kontinuerligt är riktad mot solen. För att styra motorn används kretsen till höger. R_1 och R_2 är två fotomotstånd, dvs tvåpoler vilkas resistans varierar med ljusintensiteten. De är monterade så att de får lika stark belysning (samma resistans) när solfångaren är vänd mot solen. Spänningen E är en likströmskälla. Antag att operationsförstärkaren är ideal.

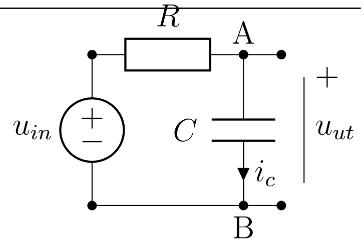


a) Beräkna spänningen över motorn när fotomotstånden får lika stor belysning.
b) Beräkna spänningen över motorn om fotomotstånden har olika belysning, dvs $R_1 \neq R_2$. Fungerar anordningen som avsett? Motivera!

Lösningsförslag till tentamen i elkretsanalys

Kurser: EI1120 och EI1110 del 2. Datum: 2012-06-11. Examinator: Lars Jonsson

B – Transienter



1) Nodanalys. Jorda i B. KCL i A ger:

$$\frac{u_{ut} - u_{in}}{R} + i_c = 0 \tag{1}$$

För kondensatorn gäller: $i_c = C\frac{du_{ut}}{dt}$, vilket ger ekvationen:

$$\frac{du_{ut}}{dt} + \frac{u_{ut}}{CR} = \frac{u_{in}}{CR} \tag{2}$$

Två populära metoder att lösa denna ekvation är ansats och integrerande faktor. För att demonstrera metoderna användes här ansats-metoden för a) och integrerande faktor för b).

För båda a och b gäller att för $t < 0$ är $u_{in} = 0$ och kretsen är i stationärt tillstånd, dvs kondensatorn är ett avbrott. Att den initialt är oladdad gör att $u_{ut} = 0$ för $t < 0$ i båda fallen (**delsvar**).

a) För $t > 0$ är $u_{in} = u_0$. Kondensatorn har kontinuerlig spänning, dvs $u_{ut}(0^-) = u_{ut}(0^+)$. Ekvationen har den homogena lösningen $K\mathrm{e}^{-t/(RC)}$ och partikulära lösningen u_0. Om man sätter in dessa båda i differentialekvationen ovan ser vi att detta är lösningar (Ansatsen ska ha samma karaktär som högerledet, här en konstant). Vi har alltså den totala lösningen $u_{ut}(t) = K\mathrm{e}^{-t/(RC)} + u_0$. För att bestämma konstanten K använder vi kontinuitetsvillkoret: $0 = u_{ut}(0^-) = u_{ut}(0^+) = K + u_0$, vilket ger att $K = -u_0$.

Vi får för $t > 0$ (**delsvar:**)$u_{ut}(t) = u_0(1 - \mathrm{e}^{t/(RC)})$.

b) Den integrerande faktorn är $\mathrm{e}^{t/(RC)}$. Om vi multiplicerar höger och vänster led med denna får vi:

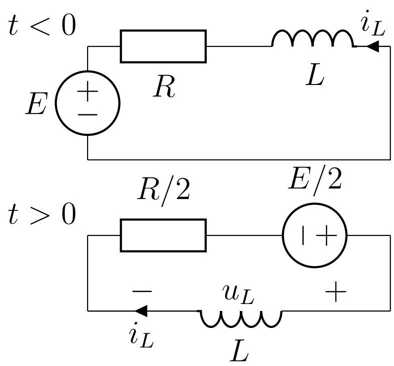
$$\mathrm{e}^{t/(RC)}\left(\frac{du_{ut}}{dt} + \frac{u_{ut}}{CR}\right) = \frac{d}{dt}\left(\mathrm{e}^{t/(RC)}u_{ut}\right) = \mathrm{e}^{t/(RC)}\frac{u_0 t}{TCR} \tag{3}$$

Integrera höger och vänster led över intervallet $[0, t]$ ger (använd ledningen)

$$\begin{aligned} u_{ut} = \mathrm{e}^{-t/(RC)}\left(K + \frac{u_0}{TRC}\int_0^t \mathrm{e}^{\tau/(RC)}\tau\,\mathrm{d}\tau\right) &= \mathrm{e}^{-t/(RC)}\left(K + \frac{u_0}{TRC}(RC\tau\mathrm{e}^{\tau/(RC)}\Big|_0^t - RC\int_0^t \mathrm{e}^{\tau/(RC)}\,\mathrm{d}\tau)\right) \\ &= K\mathrm{e}^{-t/(RC)} + \frac{u_0}{T}(t - RC + RC\mathrm{e}^{-t/(RC)}) \end{aligned} \tag{4}$$

Kontinuitetsvillkoret ger $K = 0$. Vi får för $t > 0$ (**delsvar:**)$u_{ut}(t) = u_0\frac{RC}{T}(\frac{t}{RC} - 1 + \mathrm{e}^{-t/(RC)})$.

Dimensionskontroll: RC har dimensionen tid (sekunder), liksom t och T. Vi får därför att volt$=[u_{ut}] = [u_0]\frac{s}{s}(\frac{s}{s} + 1 + 1\mathrm{e}^{-s/s}) = [u_0]$ =volt. Då u_0 är spänning ser vi att höger och vänster led har samma dimension.



2a) Till höger ser vi de två fallen $t < 0$ och $t > 0$. Strömmen genom spolen är indikerad i båda fallen (åt samma håll!).

För lampan som är ersatt med R gäller att stationärt tillstånd råder för $t < 0$, dvs $-i_L = E/R$. Spolen agerar endast som en kortslutning. Vi får att effekten i lampan är (**delsvar:**)$p(t) = i^2R = E^2/R$ för $t < 0$ och $p(t) = 0$ för $t > 0$ (då ingen ström går genom lampan för $t > 0$.

För lampan som är ersatt med $R/2$ gäller att för $t < 0$ är $i = 0$ och där med är effekten noll för $t < 0$. För att bestämma effekten efter

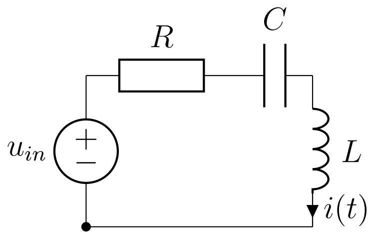
$t > 0$ måste vi hitta strömmen. För en spole är strömmen kontinuerlig.
Vi potentialvandrar i kretsen för $t > 0$ och får: ($u_L = Ldi_l/dt$)

$$\frac{1}{2}E - \frac{1}{2}Ri_L - u_L = 0 \Rightarrow \frac{di_L}{dt} + \frac{R}{2L}i_L = \frac{E}{2L} \Rightarrow i_L(t) = K\mathrm{e}^{-tR/(2L)} + \frac{E}{R} \tag{5}$$

Kontinuitetsvilkoret ger: $K = -2E/R$ och vi får för $t > 0$ $i_L(t) = \frac{E}{R}(1 - 2\mathrm{e}^{tR/(2L)})$. Effekten **(delsvar:)**före $t = 0$ är noll, och för $t > 0$ är $p(t) = i_L^2\frac{R}{2} = \frac{E^2}{2R}(1 - 2\mathrm{e}^{-tR/(2L)})^2$.
b) När $t \to \infty$ har $R/2$-lampan effekten $E^2/(2R)$, som tillvärkaren hävdar är det minsta värdet. Vi noterar dock att det finns ett $t > 0$ så att $(1 - 2\mathrm{e}^{tR/(2L)}) = 0$, och då har $R/2$ lampan ingen effekt. Dvs tillverkaren har fel.

C – Växelström

3a) Potentialvandring ger att

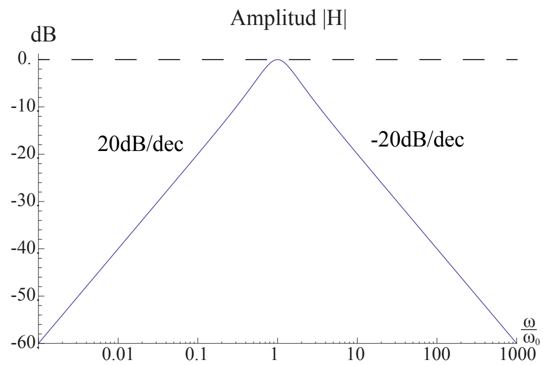


$$I = \frac{U}{R + \mathrm{j}\omega L + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}} \tag{6}$$

Överföringsfunktionen blir därför

$$H(\omega) = \frac{IR}{U} = \frac{1}{1 + \frac{\mathrm{j}}{R}(\omega L - \frac{1}{\omega C})} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}Q(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})} \tag{7}$$

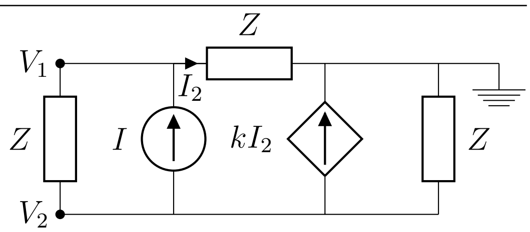
Där $\omega_0^2 LC = 1$ och $Q = \sqrt{L/C}/R$.
b) Resonans inträffar då imaginärdelen försvinner. Dvs vid $f = \frac{1}{2\pi}\omega = \frac{1}{2\pi}\omega_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$. Bandbredden är $\Delta\omega = \omega_0/Q = 1/(RC)$. Överföringsfunktionens fas är $\arg H = -\arctan\frac{1}{R}(\omega L - \frac{1}{\omega C}))$.
c) Bode-diagramet för $|H(\omega)|$. Notera att då $\omega = \omega_0$ är $|H| = 1$. Dvs $20\log_{10}|H| = 0$dB. Vi vet en punkt i Bode-diagramet, en streckad linje har dragits från 0dB över hela Bode-plotten för att indikera att max nivån är här. Vi har



$$|H| = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)^2}} \tag{8}$$

För $\omega \ll \omega_0$ har vi $|H| \sim \omega/(Q\omega_0)$ viket motsvarar växande med 20dB/dec. På samma sätt får vi $|H| \sim \omega_0/(Q\omega)$ för $\omega \gg \omega_0$, vilket motsvarar -20dB/dec. Kurvan blir som i grafen.

4a) Nodanalys. Vi har en jord-punkt. Vi ska bestämma potentialerna V_1, V_2. KCL i nod 1 ger:



$$\frac{V_1 - V_2}{Z} + \frac{V_1}{Z} - I = 0 \Rightarrow 2V_1 - V_2 = IZ \tag{9}$$

Vi noterar att $I_2 = V_1/Z$. KCL i nod 2 ger:

$$\frac{V_2 - V_1}{Z} + \frac{V_2}{Z} + I + kI_2 = 0 \Rightarrow \frac{V_2 - V_1}{Z} + \frac{V_2}{Z} + I + k\frac{V_1}{Z} = 0 \Rightarrow 2V_2 + (k-1)V_1 = -IZ \tag{10}$$

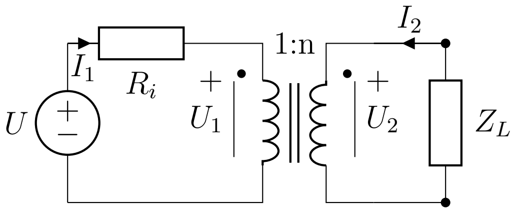
Lösning av ekvationssystemet ger **(delsvar:)**

$$V_1 = \frac{IZ}{3+k},\ V_2 = -IZ\frac{1+k}{3+k} \tag{11}$$

b) $I_2 = V_1/Z = I\frac{1}{3+k}$. Genom lämpligt val av $k = jX/R$ får vi den beskrivna funktionen. Givet är också att $I = I_0 e^{j\phi}$ och I_2 är ett effektivvärde. Vi får amplituden och fas av strömmen **(delsvar:)**

$$\sqrt{2}|I_2| = \frac{\sqrt{2}RI_0}{\sqrt{9R^2 + X^2}}, \beta = \arg I_2 = \phi - \arctan\frac{X}{3R} \tag{12}$$

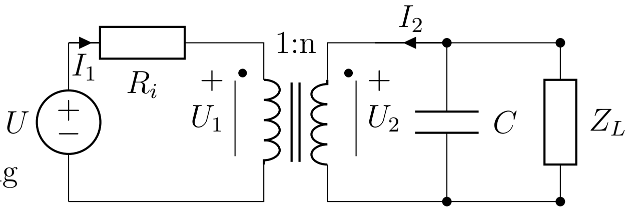
Tidssignalen blir **(delsvar:)**$i_2(t) = \frac{\sqrt{2}RI_0}{\sqrt{9R^2+X^2}}\cos(2\pi f_0 t + \beta)$.



5a) Vi söker effektförbrukningen i hushållet, dvs i lasten Z_L. För en ideal transformator gäller $nU_1 = U_2$, $I_1 = -nI_2$. KCL i båda slingorna ger:

$$U - I_1 R_i - U_1 = 0,\ U_2 + I_2 Z = 0 \tag{13}$$

Transformator relationerna tillsammans med elimination av U_2 ger



$$nU + n^2 I_2 R_i - U_2 = 0 \Rightarrow I_2 = \frac{-nU}{n^2 R_i + Z} \tag{14}$$

I_2 är i toppvärdesskalan. Hushållets aktiva effektförbrukning är **(delsvar:)**

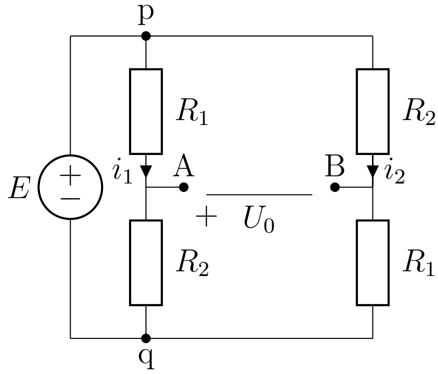
$$P = -\frac{1}{2}\operatorname{Re}(U_2(I_2)) = \frac{1}{2}|I_2|^2 \operatorname{Re} Z_L = \frac{|nU|^2 R_L}{(n^2 R_i + R_L)^2 + X_L^2} \tag{15}$$

b) Lasten är induktiv, så en kondensator behövs. Vi kopplar den parallellt med hus-lasten, enligt figuren. För att effektkompenseringen ska bli perfekt krävs att $P/|S| = 1$, men då $S = |I_2|^2 Z/2$ och $P = |I_2|^2 \operatorname{Re} Z/2$, där $Y = 1/Z = j\omega C + 1/Z_L$, räcker det med att bestämma C för ett givet ω_0 så att $\operatorname{Re} Y = 0$. Om vi studerar Y kan vi bestämma storleken på C vid $\omega = \omega_0$ för att Y ska bli rent reell. Vi får **(delsvar:)**

$$Y = j\omega C + \frac{1}{Z} = j\omega C + \frac{1}{R_L + jX_L} = j\omega C + \frac{R_L - jX_L}{R_L^2 + X_L^2} \Rightarrow C = \frac{X_L}{\omega_0(R_L^2 + X_L^2)} > 0 \tag{16}$$

Där C har valts för att Y enbart ska vara reell. Notera att den önskade kapacitancen $C > 0$ vilket stämmer i ekvationen ovan då $X_L > 0$, som var givet i uppgiften, och att det därför var korrekt att kompensera med en kondensator.

A – Likström



6a) Potentialvandring i respektive gren av bryggan ger:

$$E - i_1(R_1 + R_2) = 0 \Rightarrow i_1 = \frac{E}{R_1 + R_2}, \text{på samma sätt } i_2 = \frac{E}{R_1 + R_2} \tag{17}$$

Om q är jord har p potentialen E. Vi kan nu potentialvandra från p till A och från p till B för att få reda på U_0. Vi får:

$$E - i_1 R_1 = V_A,\ E - i_2 R_2 = V_B,\ U_0 = V_A - V_B = E\frac{R_2 - R_1}{R_1 + R_2} \tag{18}$$

Ett snabbare sätt att få fram samma information är spänningsdelning på vardera grenen, och differans.

b) Vi har tomgångsspänningen. Theveninkretsens inre resistans är $R_t = 2(R_1//R_2) = \frac{2R_1R_2}{R_1+R_2}$. Om vi nu ansluter resistansen R_{in} mellan polerna på Thevenin-kretsen får vi att spänningsfallet över R_{in}, U_m (samma polaritet som U_0 genom spänningsdelning **(delsvar:)**

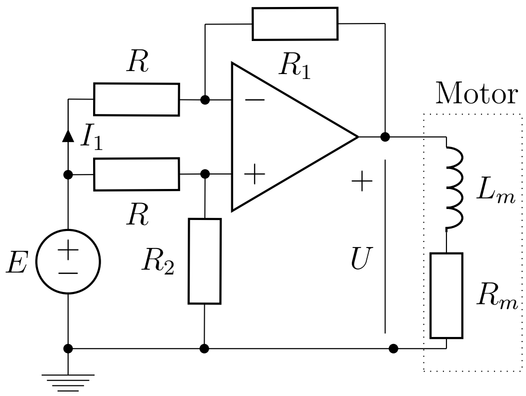
$$U_m = U_0\frac{R_{in}}{R_t + R_{in}} = U_0\frac{R_{in}}{R_{in} + \frac{2R_1R2}{R_1+R_2}} = U_0\frac{R_{in}(R_1 + R_2)}{R_{in}(R_1 + R_2) + 2R_1R_2} \tag{19}$$

Det relativa felet är ($\varepsilon = R_\varepsilon/R_2$) **(delsvar:)**

$$\frac{U_0 - U_m}{U_0} = 1 - \frac{R_{in}(R_1 + R_2)}{R_{in}(R_1 + R_2) + 2R_1R_2} = 1 - \frac{4R_2(R_\varepsilon + 2R_2)}{4R_2(R_\varepsilon + 2R_2) + 2(R_2 + R_\varepsilon)R_2} = 1 - 4\frac{(1 + \varepsilon/2)}{5 + 3\varepsilon} = \frac{1}{5} + \mathcal{O}(\varepsilon) \tag{20}$$

---

7) För en ideal operationsförstärkare går ingen ström in på +/- ingångarna. Detta ger att KVL från jord upp genom E ned genom R_2 ger att vi kan bestämma V_+. Vi får $V_+ = ER_2/(R + R_2) = V_-$, då op:n är ideal. KCL i minus-noden ger att I_1 blir



$$I_1 = \frac{E - V_-}{R} = \frac{V_- - U}{R_1} \Rightarrow \frac{E}{R} - E\frac{R_2}{R_2 + R}(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}) = -\frac{U}{R_1} \tag{21}$$

Förenkling ger:

$$U = E\frac{R_2 - R_1}{R_2 + R} \tag{22}$$

Notera att då op:n är ett aktivt element kan vi inte göra KCL i jord-punkten, ej heller mask-analys i slingor mellan tex +-nod och op:ns utgång.
a) Om $R_1 = R_2$ är **(delsvar:)**$U = 0$.
b) Om $R_1 \neq R_2$ är **(delsvar:)**$U = E\frac{R_2-R_1}{R_2+R}$

Vi ser från b att beroende på om R_1 eller R_2 är större får vi en positiv eller en negativ spänning som kan användas till att vrida motorn åt vardera hållet. Val av polaritet så att motorn roterar åt rätt håll är viktigt, liksom att rotations-utslaget är lagom stort vilket i någon mån kan regleras med valet av R. Samt att fotoresistanserna är tillräckligt känsliga för att detektera solriktning vid molnighet (vilket standardfotoresistanserna idag är). Kretsen är byggd och fungerar!
