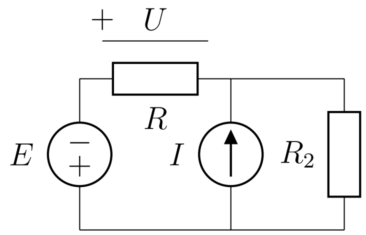
Tentamen i Elkretsanalys för EI1110 del 1

Datum/tid: 2012-10-20, kl 9-14. Hjälpmedel: Papper och penna. **Endast en** uppgift per blad.
Godkänt om ($A \geq 25\%$)&($B \geq 25\%$)&($A + B \geq 50\%$). Bonus räknas in i A+B värdet.
Namn och personnummer på varje blad. Examinator: Lars Jonsson

A – Likström och Transienter

1) [6p] Bestäm med hjälp av superposition källornas bidrag till spänningen U.

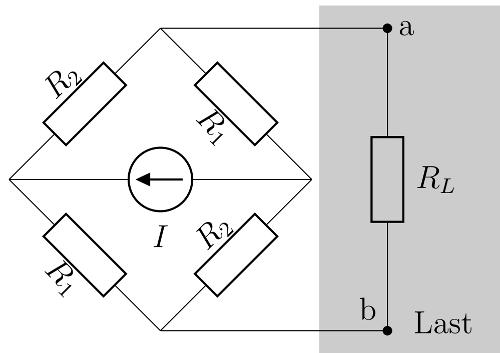
Här är E är en likspänningskälla och I är en likströmskälla.



2) [6p] Källan I är en likströmskälla. Komponenten i det gråskuggade området utgör en last till resten av kretsen.

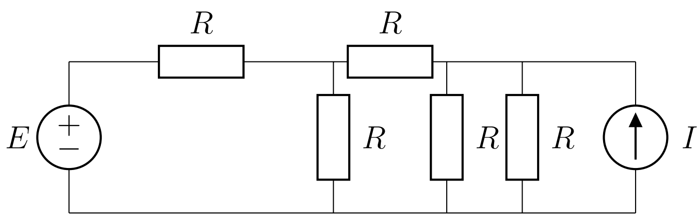
Bestäm R_L så att effekten i R_L blir maximal.

Koppla sedan bort lasten och bestäm **tomgångspänningen** mellan ab.



3) [6p] Bestäm spänningen över strömkällan *och* effekten som den levererar.

Här är E är en likspänningskälla och I är en likströmskälla.

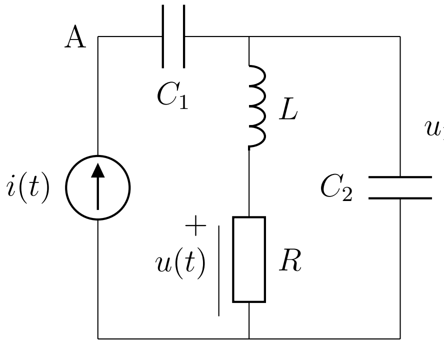


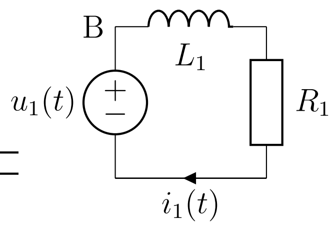
4) [2p] Kontinuitet är ofta en viktig del vid analys av transienta förlopp i elkretsen. Varför? Vilken eller vilka signalstorheter är kontinuerliga för en spole?

B – Växelström

Angivna komplexa strömmar och spänningar är i toppvärdesskalan med cossinus som referens. Använd toppvärdesskala och med cosinus som referens.

5) [8p]
a) Givet $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$ i krets A. Låt $U(\omega)$ vara den komplexa motsvarigheten till $u(t)$. Bestäm den komplexa jämviktsspänningen $U(\omega)$. Ange amplitud och fas av $U(\omega)$. Här är $\omega^2 LC_2 < 1$ och $I_0 > 0$.
b) Låt $\omega L_1 = R_1$. Om $u_1(t) = U_0[\cos(\omega t) + \sin(\omega t)]$ vad blir jämviktsströmmen $i_1(t)$ i krets B? Här är $U_0 > 0$.
Notera: Jämvikt = steady state.





Lösningsförslag till Elkretsanalys för EI1110 del 1

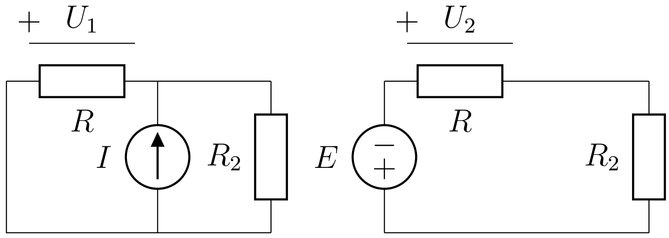
Datum/tid: 2012-10-20. Examinator: Lars Jonsson

---

1) Vi har två källor och får därför två fall. Visade till höger.

Vi har att $U = U_1 + U_2$. Vi får genom strömdelning **(delsvar:)**$U_1 = -RI\frac{R_2}{R_2+R}$.

Vidare har vi: **(delsvar:)**$U_2 = -E\frac{R}{R+R_2}$.



---

2) Vi vet att maximal effekt sker när lasten har samma resistans som den inre resistansen. Vi nollställer källan och tittar på källkretsen. Vi får resistansen mellan ab som**(delsvar:)**

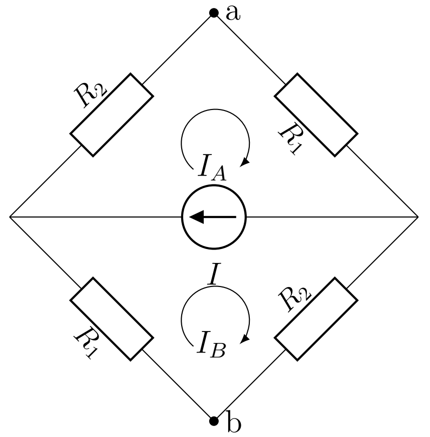
$$R_T = (R_1 + R_2)//(R_1 + R_2) = \frac{1}{2}(R_1 + R_2) = R_L \qquad (1)$$

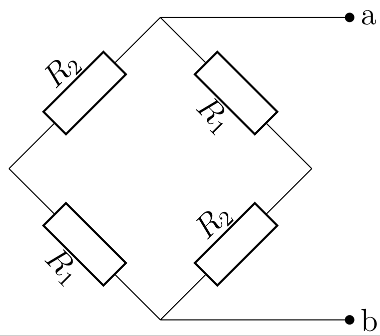
Tomgångspänningen får vi genom maskanalys. Vi har två maskor och en strömkälla i mitten. Vi får $I_A - I_B = I$ och en supermaska. KVL i supermaskan ger

$$-I_A R_2 - I_A R_1 - I_B R_1 - I_B R_2 = 0 \Rightarrow I_A = -I_B \qquad (2)$$

Om vi nu löser ekvationssystemet får vi $I_A = I/2$ och $I_B = -I/2$. Potentialvandring från a till b ger**(delsvar:)**

$$V_a - I_A R_1 - I_B R_2 = V_b \Rightarrow U_{ab} = V_a - V_b = I\frac{R_1 - R_2}{2} \qquad (3)$$





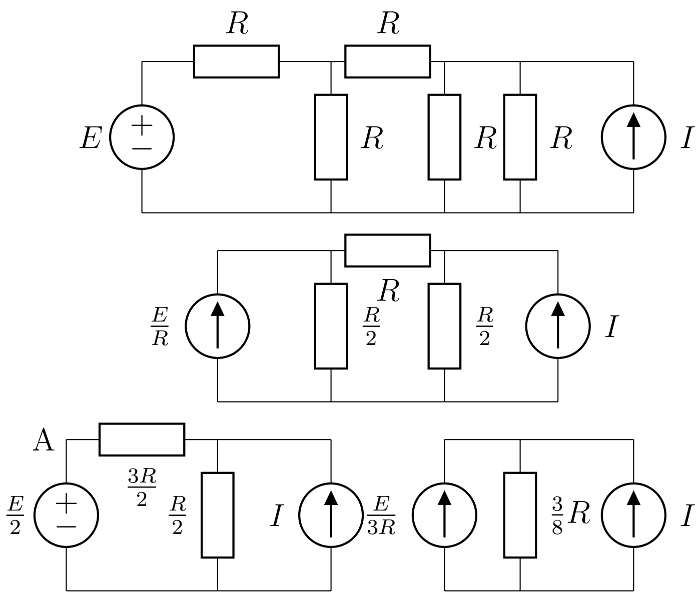
---

3) Vi förenklar kretsen genom att omvandla Theveninen till en Norton och parallellkoppla resistanserna. $R//R = R/2$. Vi får kretsen i mitten till höger. Ytterligare en Norton/Thevenin omvandling ger krets A. En sista Thevenin/Norton omvandling ger tillsammans med $(3R/2)//(R/2) = 3R/8$. Spänningen blir **(delsvar:)**

$$U = \frac{3}{8}R(\frac{E}{3R} + I) = \frac{1}{8}(E + 3IR).$$

Levererad effekt från strömkällan I blir **(delsvar:)** $p = UI = (EI + 3I^2R)/8$.

Alternativ: nod-analys.

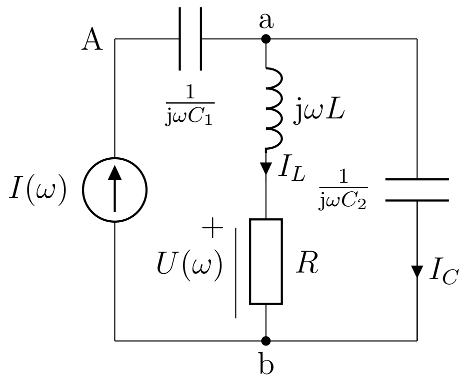


---

4) Kondensatorer och spolar har derivator i sina relationer mellan ström och spänning. Nodanalys eller maskanalys resulterar därför ofta i differentialekvationer för lämpliga signalstorheter (ström och/eller spänning). För att lösa sådana måste man veta initialvillkor. Initialvillkoret får vi genom kontinuitetsvillkoret på ström eller spänning.

Vi kan också notera en diskontinuerlig ström för en spole ($u = Ldi/dt$) skulle ge en mycket stor (oändligt) bidrag till spänningen, vilket inte är fysikaliskt.

För spolen gäller, $u = Ldi/dt$ och för helt kunna bestämma strömmen behöver vi ett initialvillkor $i(t_0)$. Vidare ser vi att u ska vara ändligt, vilket åtminstone kräver kontinuerlig ström.



5a) Kretsen är översatt till jω-domän. Den komplexa strömmen motsvarande $i(t)$ är $I(\omega) = I_0$. Kondensatorn C_1 påverkar inte kretsen då den är i serie med en strömkälla (och kan tas bort).

Vi använder nodanalys. Låt b vara referens, dvs $V_b = 0$. I nod a får vi från KVL:

$$V_a - I_L(R + j\omega L) = 0, \Rightarrow I_L = \frac{V_a}{R + j\omega L}, \tag{4}$$

$$V_a - I_C\frac{1}{j\omega C_2} = 0 \Rightarrow I_C = j\omega C_2 V_a \tag{5}$$

KCL i nod a ger:

$$\frac{V_a}{R + j\omega L} + j\omega C_2 V_a = I \Rightarrow V_a = I\frac{R + j\omega L}{1 - \omega^2 C_2 L + j\omega C_2 R} \tag{6}$$

Vi söker $U(\omega) = RI_L$, och får **(delsvar:)**

$$U(\omega) = R\frac{V_a}{R + j\omega L} = \frac{RI_0}{1 - \omega^2 LC_2 + j\omega C_2 R} \tag{7}$$

Vi noterar att då $[\omega C_2] = \Omega^{-1}$ och $[\omega L] = \Omega$ att vi har följande dimension på uttrycket

$$V = \frac{\Omega A}{1 + \Omega\Omega^{-1} + \Omega^{-1}\Omega} = \Omega A = V \tag{8}$$

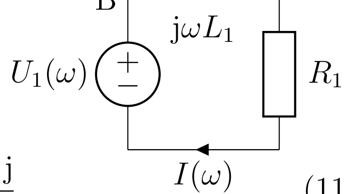
Dvs höger och vänster led har samma dimension. – Bra.

Amplitud och fas blir **(delsvar:)**

$$|U| = \frac{RI_0}{\sqrt{(1 - \omega^2 C_2 L)^2 + (\omega C_2 R)^2}}, \ \arg U = -\arctan\frac{\omega C_2 R}{1 - \omega^2 C_2 L}. \tag{9}$$

vi ser att då $\omega^2 CL < 1$ är realdelen positiv och arctan ger rätt vinkel. Vidare har vi använt att $I_0 > 0$ dvs $\arg I_0 = 0$.

b) Vi har $u_1 = u_a + u_b$. Här är $u_a = U_0\cos(\omega t)$ och $u_b = U_0\sin(\omega t) = U_0\cos(\omega t - \pi/2)$. Vi får därför



$$U_a(\omega) = U_0, \text{ och } U_b = U_0 e^{-j\pi/2} = -jU_0. \tag{10}$$

Vi får alltså att $U_1 = U_0(1 - j)$. Vi söker strömmen $I(\omega)$ och får från KVL att**(delsvar:)**

$$U_1 - (j\omega L_1 + R_1)I = 0 \Rightarrow I = \frac{U_1}{R_1 + j\omega L_1} = \frac{U_0}{R_1}\frac{1 - j}{1 + j}, \tag{11}$$

där vi använt $\omega L_1 = R_1$. Amplitud och argument

$$|I| = \frac{U_0}{R_1}\frac{|1 - j|}{|1 + j|} = \frac{U_0}{R_1}, \ \arg I = \arg(1 - j) - \arg(1 + j) = -2\arctan 1 = -\frac{\pi}{2} \tag{12}$$

där vi använt att $U_0 > 0$. Tidssignalen blir **(delsvar:)**$i(t) = \mathrm{Re}(|I|e^{j\omega t}) = (U_0/R_1)\cos(\omega t - \pi/2) = (U_0/R_1)\sin(\omega t)$.