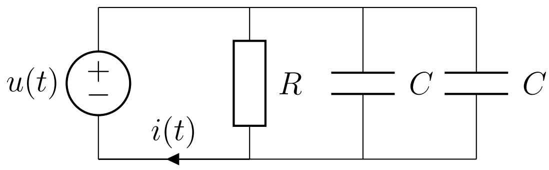
Tentamen i Elkretsanalys för EI1102/EI1100

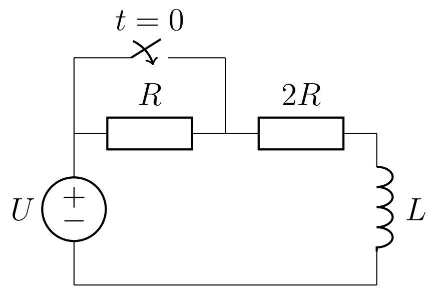
Datum/tid: 2012-10-20, kl 9-14. Hjälpmedel: Papper och penna. **Endast en** uppgift per blad.
Godkänt om $(A \geq 25\%)\&(B \geq 25\%)\&(A+B \geq 50\%)$. Bonus räknas in i A+B värdet.
Namn och personnummer på varje blad. Examinator: Lars Jonsson

A – Likström och Transienter

1) [4p] Antag att kondensatorerna är fullt laddade vid $t = 0^-$. Ge uttrycket för strömmen $i(t)$ som funktion av tid för $t > 0$. Här är $u(t)$ en godtycklig insignal. Storheter tillåtna i svaret: $u(t)$, R, C.



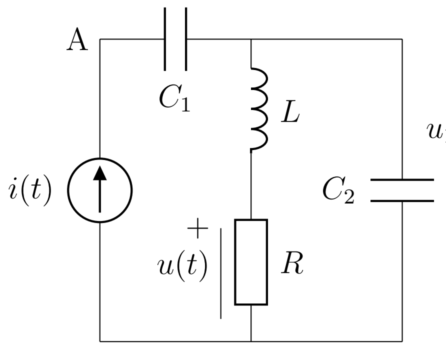
2) [6p] Här är U en likspänning. Kända storheter är R, L och U. Vi antar att kretsen har varit länge i tillståndet med öppen switch vid $t = 0$.
a) Bestäm strömmen genom spolen *och* spänningen över spolen för $t > 0$. Var noggrann med tecken och riktningar.
b) Rita graferna för spänning och ström som funktion av tid och visa hur/var kontinuitetsvillkoret är uppfyllt.

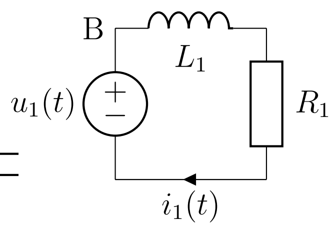


B – Växelström

Angivna komplexa strömmar och spänningar är i toppvärdesskalan med cossinus som referens. Använd toppvärdesskala och med cosinus som referens.

3) [8p]
a) Givet $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$ i krets A. Låt $U(\omega)$ vara den komplexa motsvarigheten till $u(t)$. Bestäm den komplexa jämviktsspänningen $U(\omega)$. Ange amplitud och fas av $U(\omega)$. Här är $\omega^2 LC_2 < 1$ och $I_0 > 0$.
b) Låt $\omega L_1 = R_1$. Om $u_1(t) = U_0[\cos(\omega t) + \sin(\omega t)]$ vad blir jämviktsströmmen $i_1(t)$ i krets B? Här är $U_0 > 0$.
Notera: Jämvikt = steady state.

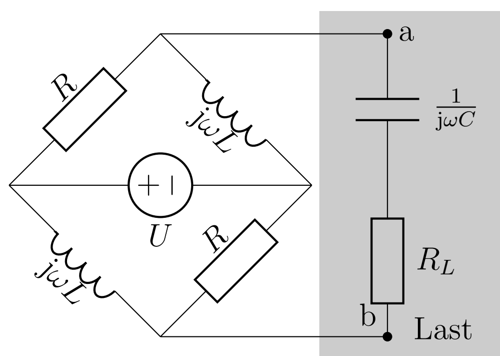




4) [6p] Källan U är en komplex spänningskälla med vinkelfrekvensen ω. Komponenterna i det grå-skuggade området utgör en last till resten av kretsen.

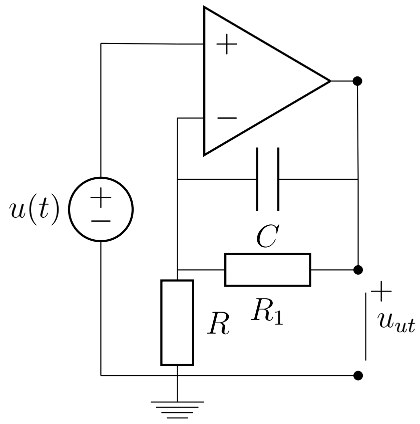
Bestäm lastresistansen R_L och lastkapacitancen C så att den aktiva effekten i R_L blir maximal.

Koppla sedan bort lasten och räkna ut **tomgångsspänningen** mellan ab.
Antag att kretsen är i sitt jämviktstillstånd.



Var god vänd.

5) [6p] Kretsen visar en förenklad del av signalanalysdelen för laborationen. Låt $R_1 = 50R$.



a) Givet en insignal $u(t) = U_1 \cos(\omega t)$. **Bestäm** överföringsfunktionen H som kvoten mellan ut- och insignal i lämplig domän. **Bestäm** eventuella gränsfrekvenser. **Rita** också ett Bode-diagram för $|H|$. Vilket filter beskriver kretsen?

Ledning a: Behandla operationsförstärkaren som ideal. $\log_{10}(50) \approx 1.7$.

b) I laborationen var signalen $u(t) = U_0 + U_1 \cos(\omega t)$. Här precis som i labben har vi operationsförstärkarens matningen som $U_{max} = 9.0V$ och $U_{min} = 0V$ (dvs jord). Insignalen har $U_0 = 4.5V$ och $U_1 \ll U_{max}$, $\omega = 1/(2R_1C)$. Vad blir utsignalen $u_{ut}(t)$? Kommentera!

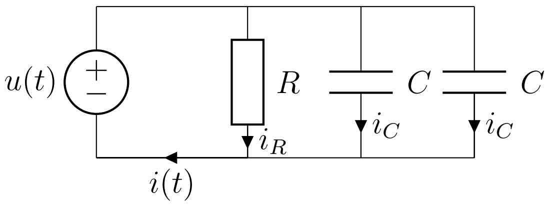
Ledning b: Insignalen kan ses som de två första termerna i en Fourier serie. Använd superposition. Operationsförstärkaren kan behandlas som ideal i matarområdet.

Lösningsförslag till Elkretsanalys för EI1102/EI1100

Datum/tid: 2012-10-20, Examinator: Lars Jonsson

---

1) Notera att alla komponenter har samma spänning. Strömmen genom resistorn blir $i_R = u(t)/R$, och genom vardera av kondensatorerna: $i_C = Cdu/dt$. KCL ger **(Svar)**



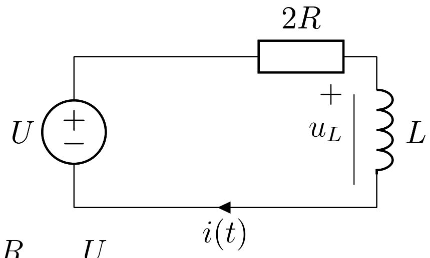
$$i(t) = i_R + 2i_C = \frac{u(t)}{R} + 2C\frac{du(t)}{dt} \tag{1}$$

Notera att informationen om att kondensatorn är fulladdad ej behövs i denna uppgift.

---

2) Före $t = 0$ är kontakten öppen och den har varit länge i detta tillstånd. Dvs, vi har likström och likspänning vilket resulterar i att spolen uppträder som en kortslutning. Från KVL får vi $i(0) = U/(3R)$.

För $t > 0$ är kontakten stängd och vi har kortslutit R. Detta resulterar i figuren till höger. För en spole gäller $u_L = Ldi/dt$. Potentialvandring ger:



$$U - 2Ri - u_L = 0 \Rightarrow L\frac{di}{dt} + 2Ri = U \Rightarrow \frac{di}{dt} + \frac{2R}{L}i = \frac{U}{L} \tag{2}$$

Lösningen till denna ekvation är $i(t) = K\mathrm{e}^{-2Rt/L} + U/(2R)$. För att bestämma konstanten K använder vi kontinuitet och initial-villkoret:

$$i(0) = K + \frac{U}{2R} = \frac{U}{3R} \Rightarrow K = -\frac{U}{6R} \tag{3}$$

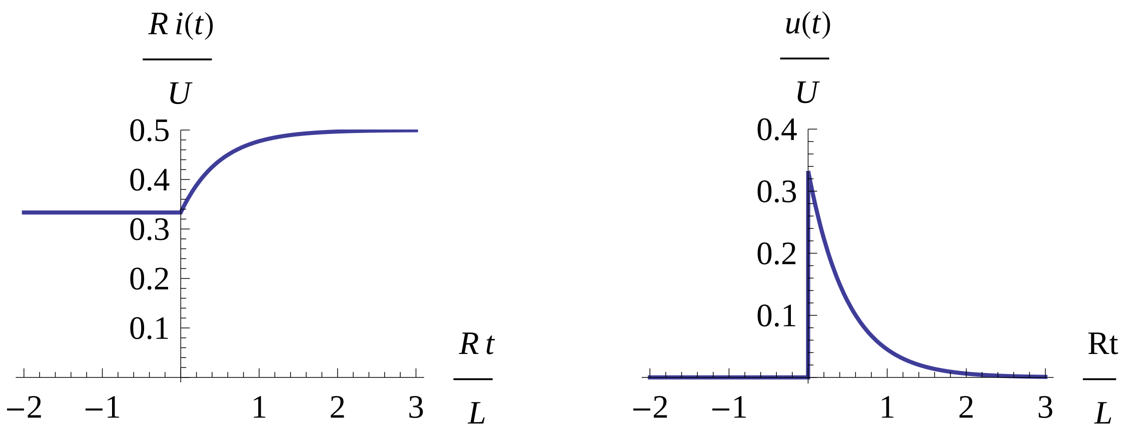
För $t \geq 0$ får därför **(delsvar:)**

$$i(t) = \frac{U}{6R}(3 - \mathrm{e}^{-2Rt/L}) \tag{4}$$

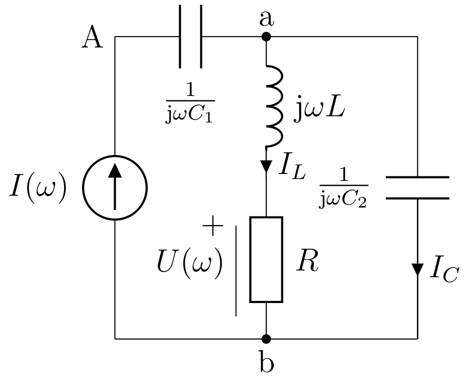
Spänningen fås genom $u_L = Ldi/dt$ och blir **(delsvar:)**

$$u_L(t) = \frac{U}{3}\mathrm{e}^{-2Rt/L} \tag{5}$$

b)



Notera att strömmen är kontinuerlig vid $t = 0$ medan spänningen är diskontinuerlig vid samma tid.



3a) Kretsen är översatt till jω-domän. Den komplexa strömmen motsvarande $i(t)$ är $I(\omega) = I_0$. Kondensatorn C_1 påverkar inte kretsen då den är i serie med en strömkälla (och kan tas bort).

Vi använder nodanalys. Låt b vara referens, dvs $V_b = 0$. I nod a får vi från KVL:

$$V_a - I_L(R + j\omega L) = 0, \Rightarrow I_L = \frac{V_a}{R + j\omega L}, \tag{6}$$

$$V_a - I_C \frac{1}{j\omega C_2} = 0 \Rightarrow I_C = j\omega C_2 V_a \tag{7}$$

KCL i nod a ger:

$$\frac{V_a}{R + j\omega L} + j\omega C_2 V_a = I \Rightarrow V_a = I \frac{R + j\omega L}{1 - \omega^2 C_2 L + j\omega C_2 R} \tag{8}$$

Vi söker $U(\omega) = RI_L$, och får **(delsvar:)**

$$U(\omega) = R \frac{V_a}{R + j\omega L} = \frac{RI_0}{1 - \omega^2 L C_2 + j\omega C_2 R} \tag{9}$$

Vi noterar att då $[\omega C_2] = \Omega^{-1}$ och $[\omega L] = \Omega$ att vi har följande dimension på uttrycket

$$V = \frac{\Omega A}{1 + \Omega\Omega^{-1} + \Omega^{-1}\Omega} = \Omega A = V \tag{10}$$

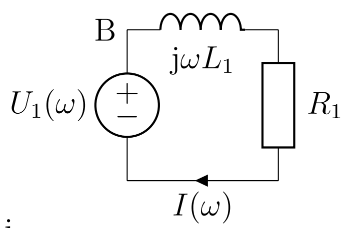
Dvs höger och vänster led har samma dimension. – Bra.

Amplitud och fas blir **(delsvar:)**

$$|U| = \frac{RI_0}{(1 - \omega^2 C_2 L)^2 + (\omega C_2 R)^2}, \quad \arg U = -\arctan \frac{\omega C_2 R}{1 - \omega^2 C_2 L}. \tag{11}$$

vi ser att då $\omega^2 CL < 1$ är realdelen positiv och arctan ger rätt vinkel. Vidare har vi använt att $I_0 > 0$ dvs $\arg I_0 = 0$.

b) Vi har $u_1 = u_a + u_b$. Här är $u_a = U_0 \cos(\omega t)$ och $u_b = U_0 \sin(\omega t) = U_0 \cos(\omega t - \pi/2)$. Vi får därför



$$U_a(\omega) = U_0, \text{ och } U_b = U_0 e^{-j\pi/2} = -jU_0. \tag{12}$$

Vi får alltså att $U_1 = U_0(1 - j)$. Vi söker strömmen $I(\omega)$ och får från KVL att**(delsvar:)**

$$U_1 - (j\omega L_1 + R_1)I = 0 \Rightarrow I = \frac{U_1}{R_1 + j\omega L_1} = \frac{U_0}{R_1} \frac{1 - j}{1 + j}, \tag{13}$$

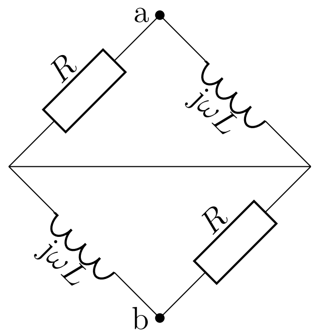
där vi använt $\omega L_1 = R_1$. Amplitud och argument

$$|I| = \frac{U_0}{R_1} \frac{|1 - j|}{|1 + j|} = \frac{U_0}{R_1}, \quad \arg I = \arg(1 - j) - \arg(1 + j) = -2 \arctan 1 = -\frac{\pi}{2} \tag{14}$$

där vi använt att $U_0 > 0$. Tidssignalen blir **(delsvar:)**$i(t) = \mathrm{Re}(|I| e^{j\omega t}) = (U_0/R_1) \cos(\omega t - \pi/2) = (U_0/R_1) \sin(\omega t)$.

---

4) Vi söker källkretsens impedans Z_T mellan ab. Källkretsen med nollställd strömkälla är ritad i figuren till höger. Den inre impedansen som blir

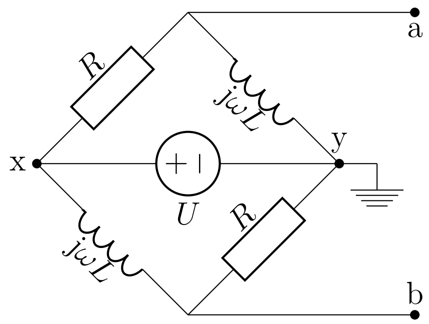


$$Z_T = 2R//(\mathrm{j}\omega L) = \frac{2\mathrm{j}\omega LR}{R+\mathrm{j}\omega L} = \frac{2\mathrm{j}\omega LR(R-\mathrm{j}\omega L)}{R^2+(\omega L)^2} = \frac{2R(\omega L)^2}{R^2+(\omega L)^2} + \mathrm{j}\frac{2R^2\omega L}{R^2+(\omega L)^2} \tag{15}$$

Vi vet nu att lasten $Z_L = Z_T^*$ ger maximal effekt i lasten. Här är $Z_L = R - \frac{\mathrm{j}}{\omega C}$ och kan därför läsa av att **(delsvar:)**

$$R_L = 2R\frac{(\omega L)^2}{R^2+(\omega L)^2} \text{ och } C = \frac{1}{\omega\,\mathrm{Im}(Z_L)} = \frac{1}{2\omega^2 L}\left(1+\frac{(\omega L)^2}{R^2}\right)$$

Vi använder nod-analys för att bestämma tomgångspänningen. Vi har fyra noder abxy och väljer y som referens. Vi ser att i x är $V_x = U$. Nodanalys i a ger:



$$\frac{V_a - U}{R} + \frac{V_a}{\mathrm{j}\omega L} = 0 \Rightarrow V_a = U\frac{\mathrm{j}\omega L}{R+\mathrm{j}\omega L}$$

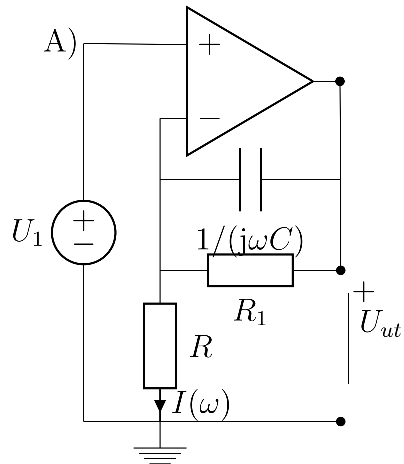
och i nod b:

$$\frac{V_b - U}{\mathrm{j}\omega L} + \frac{V_b}{R} = 0 \Rightarrow V_b = U\frac{R}{R+\mathrm{j}\omega L}$$

Theveninsspänningen $U_{ab} = V_a - V_b$ blir **(delsvar:)**

$$U_{ab} = U\frac{\mathrm{j}\omega L - R}{\mathrm{j}\omega L + R}$$

5a) Vi har en harmonisk insignal. Vi använder $j\omega$-metoden för att bestämma överföringsfunktionen. Insignalen $u_(t)$ motsvaras av det komplexa $U(\omega) = U_1$. Utsignalen blir $U_{ut}(\omega)$. Krets A är ritad i frekvensdomän finns till höger.



En ideal operationsförstärkare har $V_+ = V_-$, och $I_+ = I_- = 0$. Här $V_+ = U_1$.

KVL från -pol till jord ger $I(\omega) = U_1/R$. KVL från minus pol till utgång ger:

$$U_{ut} = U_1 + I(R_1//(1/(\mathrm{j}\omega C))) = U_1\left(1+\frac{R_1}{R(1+\mathrm{j}\omega CR_1)}\right) \Rightarrow \tag{16}$$

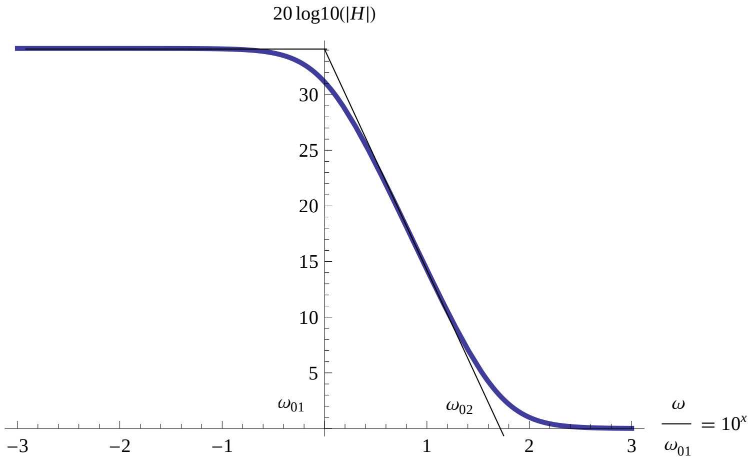
$$H(\omega) = \frac{U_{ut}}{U_1} = \frac{(R+R_1)(1+\mathrm{j}\omega C\frac{R_1R}{R+R_1})}{R(1+\mathrm{j}\omega CR_1)} \textbf{ delsvar.} \tag{17}$$

Om vi byter $\mathrm{j}\omega = s$ får vi utrycket i Laplace domän.

Vi jämför överföringsfunktionen med standardformen för två första ordningens filter dvs $(1+\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_0})$. Vi ser att gränsfrekvensen i nämnaren är $\omega_{01} = \frac{1}{R_1C}$ och i täljaren $\omega_{02} = \frac{R_1+R}{CRR_1} = 51\omega_{01}$ **(delsvar)**.

För $\omega \to 0$ får vi förstärkningen $(R+R_1)/R = 51$ ggr. För $\omega \to \infty$ får vi förstärkningen 1. För att plotta Bode-diagrammet noterar vi att $\log_{10} 1 = 0$ och $20\log_{10} 51 \approx 34$

Vi har ett lågpassfilter med förstärkning 51 ggr. gränsfrekvens ω_{01}. Frekvenser högre än ω_{02} förstärks signalen med 1. Se figuren nedan för Bode-diagrammet.



5b) Insignalen är $u(t) = U_0 + U_1(\cos\omega t)$. Superposition gör att vi studera likströmsfallet $u^{(1)}(t) = U_0$ och växelströmsfallet $u^{(2)}(t) = U_1\cos(\omega t)$. Fall 2 har vi redan löst i (a). Fall (1) får vi genom att titta på likströmsrepresentationen av kretsen. Alternativt kan vi konstatera att eftersom det är likström motsvarar det $\omega = 0$ och vi får $H(\omega = 0) = 51$.

Totala utsignalen får vi genom superposition den blir $u_{ut} = 51U_0 + \mathrm{Re}(H(\omega)U_1(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})$, om operationsförstärkaren är ideal. Här har vi matarspänningarna 9V och 0V, och vi konstaterar att $51U_0 \approx 230\mathrm{V} \gg 9\mathrm{V}$ dvs operationsförstärkaren bottnar.

(Svar)utsignalen blir $u_{ut}(t) = U_{max} = 9V$ då operationsförstärkaren bottnar.