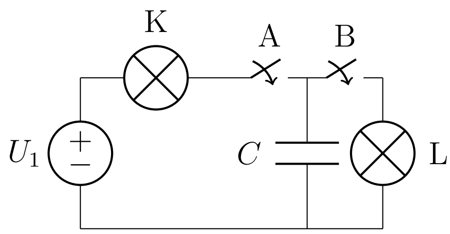
Hemuppgift för EI1110/EI1120 nr 1 av 4, deadline 3/1 2012

Inlämning den 3/1 först på övningen, där efter **kamraträttning**. Obs: För att uppgiften ska tillgodoräknas måste du delta i både att lösa uppgiften (före aktuellt datum) och i rättningen.
När du löser uppgiften, tänk på att **uppgifterna ska kamraträttas**, skriv därför en tydlig lösning som går lätt att följa, med tydliga bilder, introducera storheter, vad som söks, lösningsgång samt väl förenklade svar på delfrågorna.
Häfta ihop lösningsbladen och **skriv namn** på framsidan. Examinator: Lars Jonsson

---

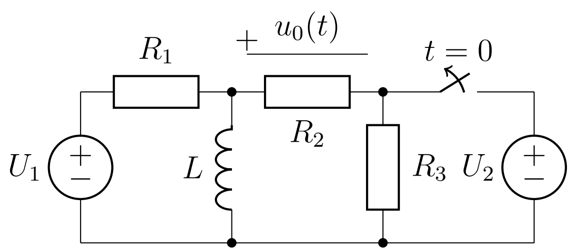
1 av 3) Figuren beskriver experimentet som visades på föreläsningen. Vi börjar med att stänga switch A. Antag att lamporna är identiska och kan modeleras med resistansen R. I samtliga uppgifter var noggrann med att rita en figur, och att sätta ut strömmar och spänningar. Antag att U_1 är en likströmskälla.



a) Beräkna ström, spänning och effekt i lamporna och kondensatorn med A nyligen stängd och B öppen.
b) Öppna A. Bestäm ström, spänning och effekt över lamporna och kondensatorn.
c) Stäng switch B. Bestäm, ström spänning och effekt över lampor och kondensatorn.
d) Lampa L är en 25W lampa och slocknar i uppgift c på c:a 12 sekunder. Kondensatorn är på C =2.2mF. Uppskatta lampans resistans. Hur många gånger tidskonstanten lyser lampan? Kom ihåg att lampans ljusstyrka är approximativt proportionell mot effekten som förbrukas i den.
e) I experimentet var U_1 en växelströmskälla och vi kopplade en diod mellan U_1 och K. Vad gjorde dioden för oss? Rita signalen in till lampa K vid tillståndet i uppgift a).

---

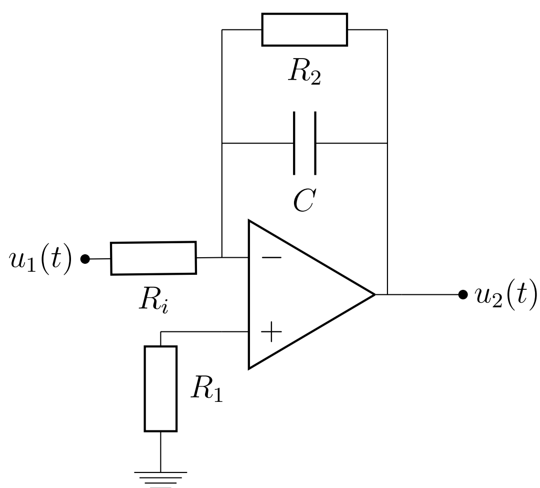
2 av 3) Transienter, inkopplingsförlopp. Här är U_1 och U_2 likströmskällor.



a) Bestäm u_0 och strömmen genom spolen före switchen öppnas.
b) Vad händer efter det att switchen öppnas? Rita om kretsen. Inför lämpliga noder.
c) Bestäm u_0 efter kontakten öppnats. Använd lämpligen nodanalys. Vad är tidskonstanten?
d) Efter en lång stund, dvs $t \gg \tau$, där τ är tidskonstanten för kretsen, är det stationärt tillstånd i kretsen igen. Bestäm u_0. Stämmer detta med gränsvärdet då $t \to \infty$ på det uttrycket av $u_0(t)$ som du fick ovan.

---

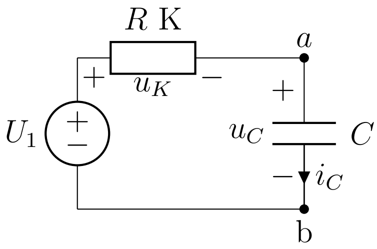
3 av 3 Kretsen till höger har en godtycklig insignal $u_1(t)$. In och utsignal mäts relativt jorden.



a) Bestäm utsignalen som funktion av $u_1(t)$ och resistanser och kapacitanser.
b) Antag att $R_2C \gg \max(t)$, vilken(vilka) operation(er) utför (approximerar) kretsen på u_1.
c) Byt plats på C och R_i, vilken relation får u_2 i termer av insignal och komponenter?
d) Om R_1 istället var en likspänningskälla U_0 som höjer potentialen i plusingången på op-förstärkaren. Vad händer då med utsignalen i c?

Lösningsförslag till hemuppgift 1 för EI1110/EI1120 VT 2012

Examinator: Lars Jonsson



1a) Ström och spänning och effekt i lampa L är noll **(delsvar)**. Den är frånkopplad. Det som är kvar av kretsen syns i figuren. Före A slöts var kondensatorn urladdad, dvs $u_C(0^-) = 0$ och $i_C(0^-) = 0$. Vi vet att i kondensatorer är laddningen kontinuerlig, och därför blir spänningen $u = q/C$ också kontinuerlig. Dvs $u_C(0^+) = 0$. Vi söker differential ekvationen för spänningen u_C. Vi ersätter lampa K med en resistor. Nodanalys i a, ger oss en relation som leder till den sökta diffekvationen. Låt potentialen i a vara v_a och sätt potentialen i b som referens. Vi får (potentialvandringar i respektive grenar, för att uttrycka strömmarna i potentialer).

$$\frac{v_a - U_1}{R} + i_C = 0, \tag{1}$$

Vi uttrycker inte i_C i potentialer direkt, då vi att $i_C = C du_C/dt$ (passiv konvention!). Detta ger att också i_C är uttryckt i v_a då $u_C = v_a - 0$. Vi får

$$\frac{v_a - U_1}{R} + C\frac{dv_a}{dt} = 0, \Rightarrow \frac{dv_a}{dt} + \frac{v_a}{RC} = \frac{U_1}{RC}. \tag{2}$$

Vi multiplicerar med den integrerande faktorn $\mathrm{e}^{t/(RC)}$ på båda sidor, noterar att vänsterledet är en exakt derivata och får:

$$\mathrm{e}^{t/(RC)}(\frac{dv_a}{dt} + \frac{v_a}{RC}) = \mathrm{e}^{t/(RC)}\frac{U_1}{RC} \Rightarrow \frac{d}{dt}(\mathrm{e}^{t/(RC)}v_a) = \mathrm{e}^{t/(RC)}\frac{U_1}{RC} \tag{3}$$

Integration av båda sidor leder till (U_1, R och C är oberoende av t)

$$\mathrm{e}^{t/(RC)}v_a(t) = k + \frac{U_1}{RC}\int^t \mathrm{e}^{\tau/(RC)}\,\mathrm{d}\tau = k + U_1\mathrm{e}^{t/(RC)} \Rightarrow v_a(t) = k\mathrm{e}^{-t/(RC)} + U_1 \tag{4}$$

där k är en konstant. Vi bestämmer k utifrån initial villkoret: $v_a(0) = 0$ vilket ger att $k = -U_1$ och vi får **(delsvar)**:

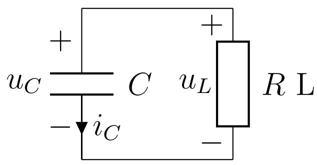
$$v_a(t) = U_1(1 - \mathrm{e}^{-t/(RC)}) = u_C(t) \Rightarrow i_C = C\frac{du_C}{dt} = \frac{U_1}{R}\mathrm{e}^{-t/(RC)}, \Rightarrow p_C = u_C i_C = \frac{U_1^2}{R}\mathrm{e}^{-t/(RC)}(1 - \mathrm{e}^{t/(RC)}) \tag{5}$$

Eftersom strömmen blir noll efter någon några tidskonstanter RC slocknar lampan. Strömmen i_C går genom hela kretsen. Vi har från KVL att $U_1 = u_K + u_C$ dvs

$$u_K = U_1 - u_C = U_1\mathrm{e}^{-t/(RC)}, \Rightarrow p_K = \frac{U_1^2}{R}\mathrm{e}^{-2t/RC} \tag{6}$$

1b) Lampan slocknar efter några tidskonstanter. Nu öppnar vi A. Ingen lampa lyser, dvs ström och spänning i lamporna är noll. Den enda komponent som har förändrat sig är kondensatorn som är uppladdad. Det går ingen ström genom kondensatorn så $i_C(t) = 0$, där med är också $p_C(t) = 0$, medan spänningen $v_a = u_C$ ligger kvar på U_1 (vi antar att vi väntat tillräckligt länge för att $\mathrm{e}^{-t/(RC)} \approx 0$, dvs $t \gg RC$). Typiskt räcker det med säg 5 tidskonstanter.

1c) Switch A är öppen dvs det går ingen ström genom lampa K. ström, spänning och effekt där är alla noll. Vi kan bortse från den biten av kretsen. Det som är kvar är lampa L, med spänningen u_L i figuren markerad med en resistans R samt kondensatorn enligt figur. Lampan betraktar vi här som en resistor. Notera att $u_C = u_L = -Ri_C$. Vi vet att $u_C = U_1$ när switchen B slöts, låt oss kalla tiden för T, dvs $u_C(T) = U_1$. Strömmen i_C är har passiv konvention för kondensatorn och $i_C = Cdu_C/dt$ (och aktiv konvention för resistorn), och går (KVL) genom hela kretsen vi får



$$u_C + i_C R = 0 \Rightarrow u_C + RC\frac{du_C}{dt} = 0 \Rightarrow u_C(t) = k_2 \mathrm{e}^{-t/(RC)} \tag{7}$$

För att bestämma konstanten sätter vi $t = T$ och får

$$u_C(T) = U_1 = k_2 \mathrm{e}^{-T/(RC)} \Rightarrow k_2 = U_1 \mathrm{e}^{T/(RC)} \tag{8}$$

så för $t > T$ får vi att spänningen blir $u_C(t) = U_1 \mathrm{e}^{-(t-T)/RC}$ **(delsvar)**. Notera att när $t \to \infty$ får vi $u_C = 0$. Vi får strömmen som **(delsvar)**

$$i_C = C\frac{du_C}{dt} = -\frac{U_1}{R}\mathrm{e}^{-(t-T)/(RC)}, \; p_L = u_C i_C = -\frac{U_1^2}{R}\mathrm{e}^{2(T-t)/RC}, \quad t > T \tag{9}$$

Notera strömkonventionen. Vi får alltså $|p_L|$ absorberad i lampan, och kondensatorn levererar $|p_L|$ för $t > T$. Summan av effekterna absorberade i kretsen är noll!

---

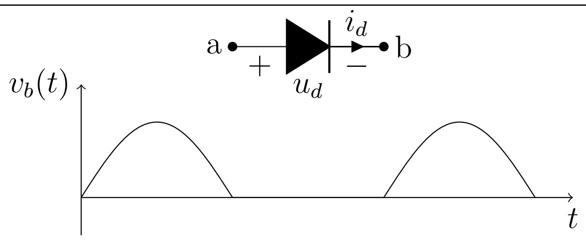
d) Lite klurigt: Om vi ansluter en 25W lampa till en armatur, har vi 230V effektivvärde i växelspänning. Dvs vi får $P = |U|^2/R$ vilket ger $R = |U|^2/P$ och resistansen blir 2.1kΩ**(delsvar)**. Tidskonstanten är $\tau = RC$=4.65s$\approx$ 4.6s. **(delsvar)**Vi får att den lyser c:a $12/\tau \approx 2.6$ggr tidskonstanten. **(delsvar)**(Obs endast 2 värdesiffror i svar!)

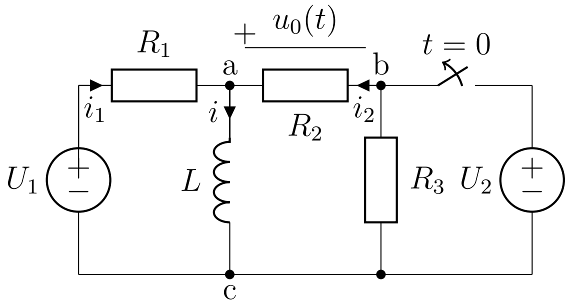
Om man mäter just denna lampas resistans (oinkopplad) får man ca R_0=200Ω. Skillnaden mellan det beräknade värdet och det uppmätta värdet ligger i att lampans resistans varierar med tid. En uppskattning baserad på en andra ordningens serieutveckling av resistansen i termer av spänningen är: (små spänningar)

$$\frac{dR(t)}{dt} = -\frac{R(t) - R_0}{t_0} + (u_L(t))^2 k \tag{10}$$

där $u_L(t)$ är spänningen över lampan, R_0 är den obelastade resistansen, t_0 är en tidskonstant och k är en konstant. Den första termen är avkylningstermen, medan den andra är motsvarar den dynamiska ökningen av resistans vid uppvärmning. Vi kommer oftast att anta att lampan kan approximeras enbart med en tidsoberoende resistans.

1e) En ideal diod uppträder som en kortslutning så fort som $u_d > 0$. När $u_d < 0$ uppträder dioden som ett avbrott. Dvs så länge strömmens riktning är i diod-pilens riktning kommer en ström att flyta. Och ingen ström flyter när den resulterande strömmen 'vill' (vår lösning visar på att den) gå(r) åt andra hållet. Notera här att detta är ett antingen eller villkor, dvs för att lösa strömmar i kretsen måste vi först anta att strömmen är (säg) positiv i diodens riktning, räkna ut strömmen (utan diod) kolla tecknet. Där efter säger vi att strömmen går åt andra hållet, vi ersätter dioden med ett avbrott och kollar vad vi får för ström/spänning. Vi återkommer till dioder i 21/2 i samband med labben. En icke-fylld diod symbol innebär en icke-ideal diod, vilken typiskt behöver att $u_d > u_{d0}$ för att fungera. Om vi tänker oss att potentialen a är v_a en sinus-signal. Då kommer potentialen i b, v_b för vår krets att se ut som i figuren.





2a) Före $t = 0$ råder stationärt tillstånd. Källor och alla strömmar är likström. Detta innebär att spolen är en korslutning och nod a och c är samma punkt. (Det är en ideal spole emellan och den har ingen resistans). Vi ska bestämma u_0 och strömmen i. Vi kan naturligtvis använda nodanalys om vi inser att a och c är samma punkt. Men här är det nästan lättare att direkt använda KVL. Eftersom $v_a = v_c$ kan vi använda denna nod som referens. Vi får då två egentligen separerade kretsar.

Om vi går från c genom U_1 vidare till a och ned till c igen får vi att

$$U_1 = R_1 i_1, \; i_1 = \frac{U_1}{R_1} \tag{11}$$

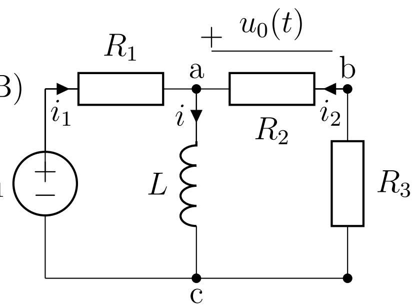
och detta är en av de strömmarna som kommer fram till nod a. Från den andra källan får vi att spänningen över bc är U_2, eftersom $v_a = v_c$ dvs $u_0 = -U_2$ (**delsvar**). Vilket ger att strömmen genom R_2 är

$$i_2 = \frac{-u_0}{R_2} = \frac{U_2}{R_2} \tag{12}$$

KCL i nod a ger att $i = i_1 + i_2 = U_1/R_1 + U_2/R_2$ (**delsvar**).

2b,c) Notera att det är strömmen i genom spolen för $t = 0$ som kommer att vara initial värdet för spolens diff-ekvation.

B)



Vi ska nu betrakta $t \geq 0$. Nu kan vi rita om kretsen. Se figur B. Vi kan göra en tvåpol av detta, dvs vi ser att spolen och $(R_1 + R_2)$ är parallell kopplade, så vi kan byta plats på dem. Sedan kan vi göra spänningskällan och resistanserna till en tvåpol och gå vidare enligt boken med spolen som last.

Alternativt kan vi följa ledningen och titta på nodanalys. Före vi försöker bestämma $u_0(t)$ måste vi hitta och lösa diffekvationen för spolen. Vi börjar med det. Vi har två intressanta noder, a och c. Jorda c då har vi en okänd potential v_a och vi behöver en ekvation. Vi gör nodanalys i nod a

$$\frac{v_a - U_1}{R_1} + i(t) + \frac{v_a}{R_2 + R_3} = 0, \Rightarrow v_a\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + R_3}\right) = \frac{U_1}{R_1} - i(t) \tag{13}$$

Vi får tillslut

$$v_a = \frac{R_2 + R_3}{R_1 + R_2 + R_3}(U_1 - i(t)R_1) \tag{14}$$

Notera att vi inte känner $i(t)$ här. Vi vet att spänningen över spolen $u_L = v_a - v_c = v_a$ är relaterad till strömmen genom $v_a = u_L = L\frac{di}{dt}$. Innan vi går vidare tittar vi på (14). Först noterar vi att U_1 är en konstant likströmskälla. Dess spänning påverkas inte av spolens flödes förändring. Vi har också en massa resistanser, låt oss kalla den dimensionslösa konstanten för k:

$$k = \frac{R_2 + R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \tag{15}$$

Med relationen mellan ström och spänning får vi

$$L\frac{di(t)}{dt} = kU_1 - i(t)R_1 k, \Rightarrow \frac{di(t)}{dt} + k\frac{R_1}{L}i(t) = \frac{kU_1}{L} \tag{16}$$

Denna ODE är på standard form och kan enkelt lösas, vi får:

$$i(t) = \frac{U_1}{R_1} + K\mathrm{e}^{-tkR_1/L}. \tag{17}$$

För att bestämma konstanten K måste vi använda initial värdet $i(t=0) = U_1/R_1 + U_2/R_2$. Vi får

$$i(t=0) = \frac{U_1}{R_1} + K = \frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_2}. \tag{18}$$

Vi får att $K = U_2/R_2$. Vi har nu fått strömmen $i(t)$ som

$$i(t) = \frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_2}\mathrm{e}^{-tkR_1/L}, \text{ där } k = \frac{R_2+R_3}{R_1+R_2+R_3}. \tag{19}$$

Men vi söker egentligen $u_0(t)$, men detta vet vi när vi vet v_a över de seriekopplade resistanserna R_2 och R_3 och kan bestämma u_0 genom spänningsdelning. Vi får att

$$v_a(t) = L\frac{di(t)}{dt} = -\frac{U_2R_1k}{R_2}\mathrm{e}^{-ktR_1/L}.$$

Vi får nu u_0 genom spänningsdelning. Med känt v_a och får

$$u_0(t) = \frac{v_a(t)R_2}{R_2+R_3} = -U_2\frac{R_1}{R_2}\frac{R_2}{R_2+R_3}\frac{R_2+R_3}{R_1+R_2+R_3}\mathrm{e}^{-tkR_1/L} = -U_2\frac{R_1}{R_1+R_2+R_3}\mathrm{e}^{-tkR_1/L} = \textbf{delsvar}$$

med k som i (19). Vi får tidskonstanten $\tau = L/(kR_1)$, med k som ovan (**delsvar**).

2d) Rimlighetskontroll. Vi går tillbaka till krets B) ovan. Vi har likspänning i U_1 detta innebär att efter en lång tid har vi likström i hela kretsen, dvs i =konst. Spänningen $v_a - v_c = Ldi/dt = 0$. Dvs $R_2 + R_3$ är korslutna av spolen i likström. Vilket betyder att efter en lång tid finns det ingen spänning mellan ac och därför ska $u_0(t) = 0$V (**delsvar**) i det stationära tillståndet efter transienten.

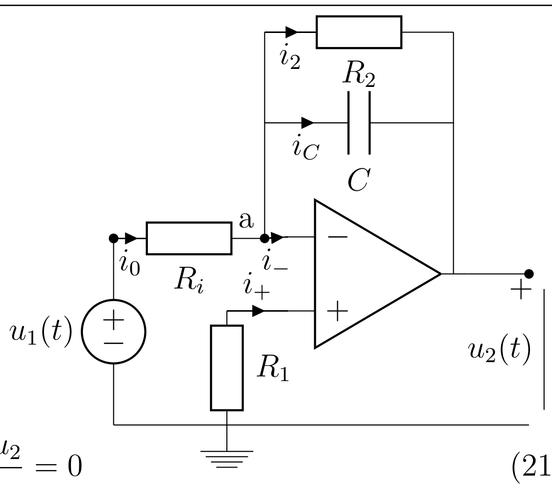
Låt oss kolla om vårt svar ger detta.

$$\lim_{t\to\infty} u_0(t) = -U_2\frac{R_1}{R_1+R_2+R_3}\lim_{t\to\infty}\mathrm{e}^{-tkR_1/L} = 0 = \textbf{delsvar}. \tag{20}$$

Vi får att både gränsvärdet och beräknandet av det stationära tillståndet ger samma resultat.

3a) Potentialerna i +-ingången är v_+ och potentialen i −-ingången är v_-. Vi antar att det är en ideal operationsförstärkare. Dvs $i_- = i_+ = 0$ och $v_+ = v_-$. Då $i_+ = 0$ kan vi potentialvandra från jord upp till +-ingången och få: $0 - i_+R_1 = v_+$. Men då $i_+ = 0$ får vi direkt att $v_+ = 0$. Vi får $v_- = 0$ då op:n är ideal.

För insignaler kan vi alltid tänka att vi har en källa ansluten, med just denna signal. Se figur. Vi söker $u_2(t)$ som funktion av $u_1(t)$. Nodanalys i noden a ger först KCL: $-i_0 + i_- + i_C + i_R = 0$. Vi uttrycker dessa strömmar i nodpotentialen. Vi får:



$$\frac{v_a - u_1}{R_i} + 0 + i_C + \frac{v_a - u_2}{R_2} = 0 \tag{21}$$

Notera att $i_C = Cdu_C/dt = Cd(v_a - u_2)/dt = -Cdu_2/dt$, då $v_a = 0$. v_a är i samma potential som v_- ovan. Vi får därför att

$$-\frac{u_1}{R_i} - C\frac{du_2}{dt} - \frac{u_2}{R_2} = 0 \Rightarrow \frac{du_2(t)}{dt} + \frac{u_2(t)}{CR_2} = -\frac{u_1(t)}{CR_i} \tag{22}$$

Denna ekvation känner vi igen! Vi kan lösa diff-ekvationen och får: **(Svar)**

$$u_2(t) = \mathrm{e}^{-t/(R_2C)}K - \int_0^t \frac{\mathrm{e}^{-(t-t')/(R_2C)}}{CR_i}u_1(t')\,\mathrm{d}t' \tag{23}$$

Notera att vi inte kan bestämma konstanten K, då inget initial tillstånd på u_2 är givet. Vi observerar också att termen med K försvinner med tidskonstant R_2C. Om vi antar att signalen u_2 är försumbar vid $t = 0$ får vi

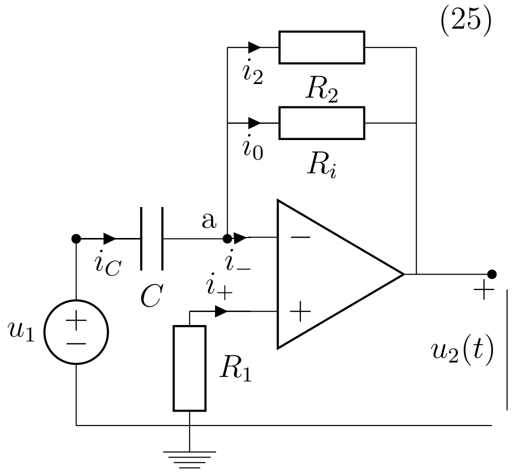
$$u_2(0) = 0 = K - 0 \tag{24}$$

vilket i så fall hade gett $K = 0$.

Titta på in-delen av kretsen. Det går en ström i_0 genom källan. Det går ingen ström över u_2 (utkretsen är öppen, tomgångsspänning!). Gör en nod-analys i jord-punkten. Var ifrån måste i_0 komma?

3b) Om t är litet i förhållande till R_2C så kan vi serieutveckla exponenten runt nollan och få att för små t gäller $\mathrm{e}^{t/(R_2C)} \approx 1$. Då t, t' båda ligger mellan $0, \max(t)$ kan vi approximera integranden också med $1/(CR_i)$. (Taylor expansion). Vi får då att kretsen har funktionen **(Svar)**

$$u_2(t) = K - \frac{1}{R_iC}\int_0^t u_1(t')\,\mathrm{d}t' \tag{25}$$



Dvs vid rätt val av kapacitans och R_2 får vi operationerna: integration och en skalning med faktorn $1/(CR_i)$ plus en konstant K. Det är nyttigt att kolla dimensioner. $[RC] = s$ så vi får $[u_2] = V = [K] + [u_1]/[R_iC][dt'] = [K] + (V/s)s$. Vi får att K måste vara en spänning.

3c) Vi har nu bytt plats på C och R_i vi får kretsen som i figuren. Vi ska bestämma u_2. Vi gör en nod-analys i a, och precis som ovan har vi $v_a = 0 = v_- v_+ = 0$. KCL ger: $-i_C + i_0 + i_2 = 0$ då vi har ($i_- = 0$) vilket vi uttrycker i potentialer:

$$-i_C + \frac{v_a - u_2}{R_i} + \frac{v_a - u_2}{R_2} = 0 \tag{26}$$

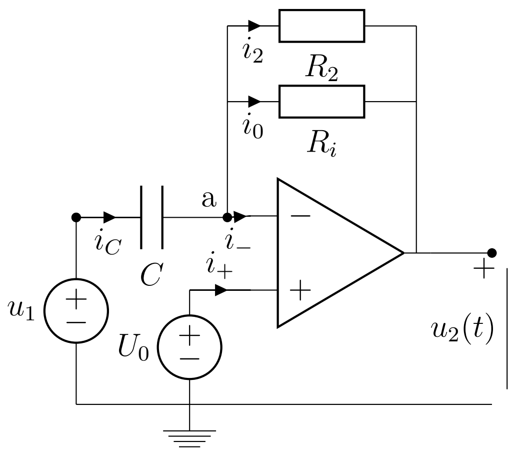
Vi kommer ihåg att för kondensatorn gäller att $i_C = Cdu_C/dt = Cd(u_1 - v_a))/dt = Cdu_1/dt$ (vid passiv konvention). Vi får ($v_a = 0$)

$$-C\frac{du_1}{dt} + \frac{-u_2}{R_i} + \frac{-u_2}{R_2} = 0 \tag{27}$$

Vi vill beskriva $u_2(t)$ som en funktion av i_1 vi får:**(Svar)**

$$u_2(\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_2}) = -C\frac{du_1}{dt} \Rightarrow u_2(t) = -\frac{CR_iR_2}{R_i + R_2}\frac{du_1}{dt} \tag{28}$$

3d) Det första vi observerar är att potentialen i +-polen måste nu vara: U_0, vilket då ger att $v_a = v_- = v_+ = U_a$. Vi får exakt samma ekvation som ovan, men med v_a nollskild:



$$-i_C + \frac{v_a - u_2}{R_i} + \frac{v_a - u_2}{R_2} = 0 \tag{29}$$

$v_a = U_0$, $i_C = du_1/dt$ ger

$$-\frac{du_1}{dt} + \frac{U_0 - u_2}{R_i} + \frac{U_0 - u_2}{R_2} = 0 \tag{30}$$

Vi löser för u_2 och får **(Svar)**

$$u_2(t) = U_0 - \frac{R_iR_2}{R_i + R_2}\frac{du_1}{dt} \tag{31}$$