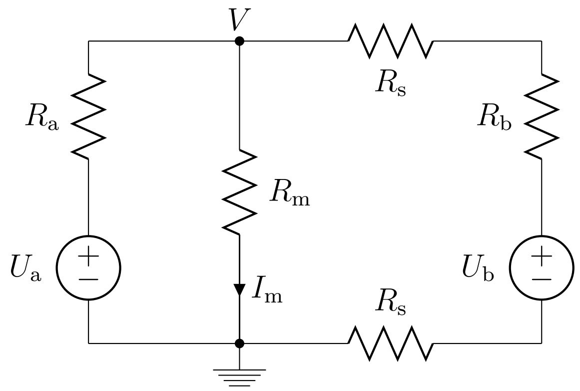
Kontrollskrivning: EI1120 Elkretsanalys (CENMI), 2013-01-25, kl 9–10

Hjälpmedel: Papper och penna.
Lösningar ska förenklas så mycket som möjligt om inte annat är specificierat.
Det finns stark tidspress om man ska svara på alla uppgifter! Ta hänsyn till poängvärdet av uppgifterna.
Var försiktig med att *inte* satsa för mycket tid på bara en uppgift om du fastnar.
Godkänt vid ≥50%. Ansvarig (frågor, rättning): Nathaniel Taylor

---

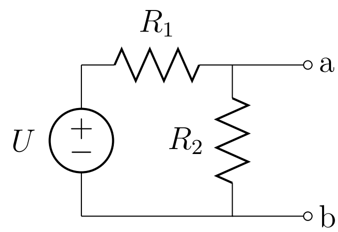
1) [12p] I det kalla vintervädret har batteriet i bil A inte kunnat starta bilen. För att starta bilen har man parallellkopplat batteriet från bil B med hjälp av två stora sladdar. Varje sladd har en serieresistans R_s. Startmotorn med tillhörande kablar modelleras (mycket approximativt) av en resistans R_m. Batterierna i bilar A och B modelleras av idealiska spänningskällor U_a & U_b, och seriekopplade 'internresistanser' R_a & R_b (antagligen är batteri B friskare, med lägre internresistans och lite högre spänning).



Uppgiften är att uttrycka I_m som funktion av de andra variablerna (vilka betraktas som kända).
Situationen är som beskriven ovan i texten och kretsdiagrammet.
a) [1p] Rita noggrant ett eget kretsdiagram som kan lösas för att få I_m. Det här är ett bra tillfälle att införa eventuella lätta förenklingar som inte har inflytande på I_m. Tips: förenkla serieresistorer!
b) [4p] Använd superposition för att lösa I_m som funktion av kända variabler.
c) [4p] Lös samma problem som i b), men nu med nodanalys.
d) [1p] Stämmer lösningarna till b) och c) med varandra?
e) [2p] Gör dimensionskoll på lösningen. Om lösningarna från b) och c) inte stämde med varandra, gör dimensionskoll på båda lösningarna och se om det ger en ledtråd om vilken som var fel!

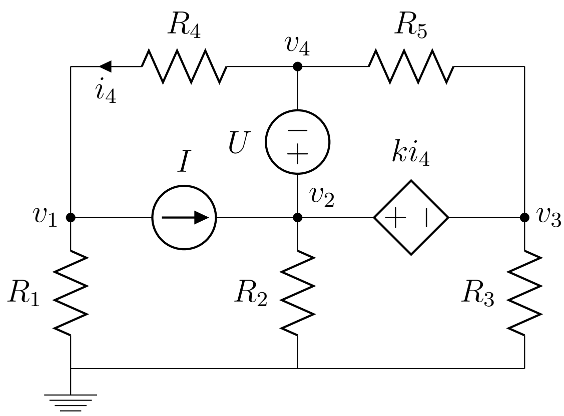
---

2) [3p] Hitta Nortonekvivalenten för kretsen till höger, med hänsyn till noderna a och b.



---

3) [5p] Utveckla nodekvationerna av kretsen till höger. Du **måste inte** lösa eller förenkla ekvationerna. Ekvationerna ska vara tillräckliga att *kunna* lösas för kretsens potentialer (vilka definieras i diagrammet som v_1, v_2, v_3, v_4).

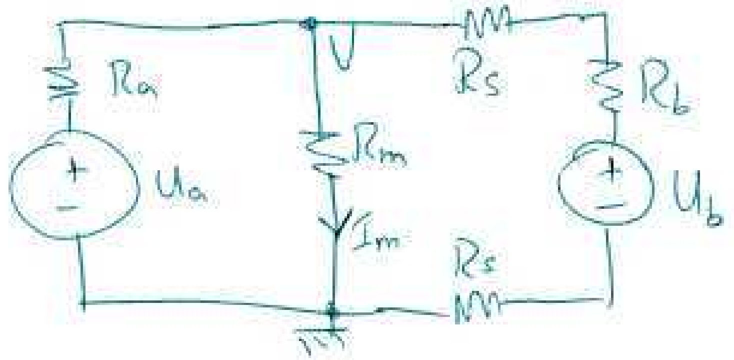


Tips: Det finns flera sätt att behandla spänningskällor i nodanalys: du får välja. De olika metoderna kan resultera i olika antal ekvationer (innan förenkling). Kolla på att antalet ekvationer är lika med: 4 (potentialer) plus antalet eventuella extra variabler du har infört.

[Observera, om du kollar dimensionerna av resultatet, att faktorn k har dimension Ω.]

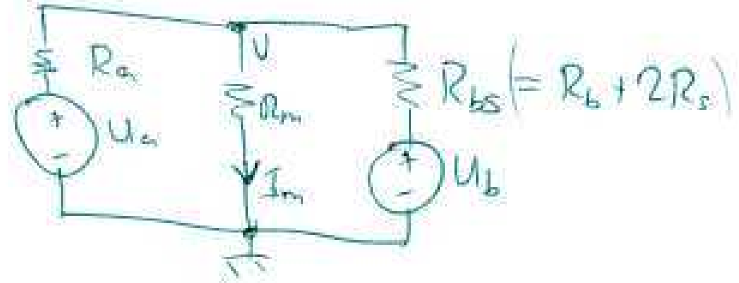
EI1120 KS VT13 25/1/2013 facit

1) Den ursprungliga kretsen är som här:



(a)

Vill man hitta I_m (och inte, tex, potentialen mellan R_s & R_b) så kan man sätta ihop alla tre seriekopplade resistorer i gren b:



Den här blir förenklande för algebran senare!

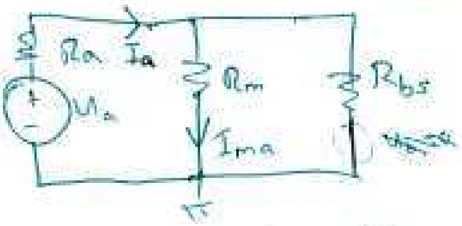
(b) "Lös I_m genom superposition".

Det finns bara 2 oberoende källor; U_a och U_b.

Vi tar en på en gång, med den andra nollställd (spänningskällor blir kortslutningar)

<u>fall 1 av 2:</u> U_a aktiv, U_b nollställd (kortslutning)

Låt strömmen i R_m vara I_{ma} (I_m komponent orsakad av bara U_a)



Strömmen $\underline{\underline{I_a}}$ blir då $= \dfrac{U_a}{R_a + R_m \| R_{bs}} = \dfrac{U_a}{R_a + \frac{R_m R_{bs}}{R_m R_{bs}}}$

1b) forts.

Strömgrening mellan R_m och R_{bs} ger att:

$$I_{ma} = \frac{I_a R_{bs}}{R_m + R_{bs}} = \frac{U_a}{\left(R_a + \frac{R_{bs}R_m}{R_{bs}+R_m}\right)} \frac{R_{bs}}{(R_{bs}+R_m)}$$

därför, $I_{ma} = \dfrac{U_a R_{bs}}{R_a(R_{bs}+R_m) + R_{bs}R_m}$

fall 2 U_a nollställd (kortsluten) och U_b aktiv.

Genom symmetrin av den förenklade kretsen kan vi se att uttrycket för I_{mb} (I_m komponent p.g.a. bara U_b) blir av samma form som för I_{ma}, men med alla 'a' och 'bs' bytt med varandra.

$$I_{mb} = \frac{U_b R_a}{R_{bs}(R_a + R_m) + R_a R_m}$$

Superposition ger att $I_m = I_{ma} + I_{mb}$.

$$I_m = \frac{U_a R_{bs}}{R_a(R_{bs}+R_m) + R_{bs}R_m} + \frac{U_b R_a}{R_{bs}(R_a+R_m) + R_a R_m}$$

$$\boxed{I_m = \frac{U_a R_{bs} + U_b R_a}{R_a R_{bs} + R_a R_m + R_{bs} R_m}}$$

(c) Nodanalys för att lösa I_m.

De två spänningskällorna har en pol på jordnoden. Därför måste vi inte beräkna deras strömmar, för att noderna ovanpå källorna har blivit delar i en supernod som inkluderar jordnoden.

Det finns bara en nod kvar, 'V'.

KCL i nod V ger:

$$\frac{U_a - V}{R_a} + \frac{U_b - V}{R_{bs}} - \frac{V}{R_m} = 0$$

$$\frac{U_a}{R_a} + \frac{U_b}{R_{bs}} = V\left(\frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_{bs}} + \frac{1}{R_m}\right)$$

$$V = \frac{\frac{U_a}{R_a} + \frac{U_b}{R_{bs}}}{\frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_{bs}} + \frac{1}{R_m}} = \frac{U_a R_{bs} + U_b R_a}{R_a R_{bs}\left(\frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_{bs}} + \frac{1}{R_m}\right)}$$

$$V = R_m \frac{U_a R_{bs} + U_b R_a}{R_a R_{bs} + R_a R_m + R_{bs} R_m}$$

$$\boxed{I_m = \frac{V}{R_m} = \frac{U_a R_{bs} + U_b R_a}{R_a R_{bs} + R_a R_m + R_{bs} R_m}}$$

(d) Svaren b) och c) stämmer direkt,

e) Dimensionskoll:

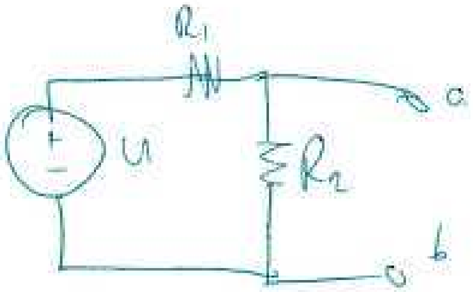
likadana dimensioner i summan

$$\underbrace{I_m}_{[A]} = \frac{\overbrace{U_a R_{bs}}^{V \cdot \Omega} + \overbrace{U_b R_a}^{V \cdot \Omega}}{\underbrace{R_a R_{bs}}_{\Omega^2} + \underbrace{R_a R_m}_{\Omega^2} + \underbrace{R_{bs} R_m}_{\Omega^2}} = \frac{[V][\Omega]}{[\Omega]^2} = \frac{[V]}{[\Omega]} = [A]$$

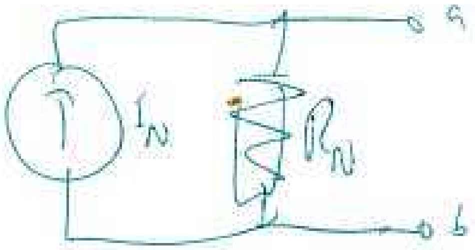
likadana dimensioner i summan

Stämmer

2)



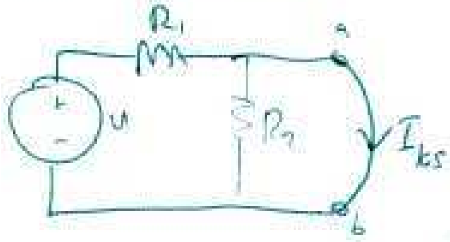
denna krets . . . .



ska omvandlas till ekvivalent ... med hänsyn till a och b.

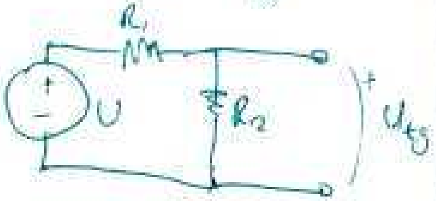
Vilken som helst **två** av de tre följande kvantiteter kan ge oss komponentvärden:

- Kortslutningsström:



kortslutningen R_2 kan försummas.
Därför är $I_{ks} = U/R_1$

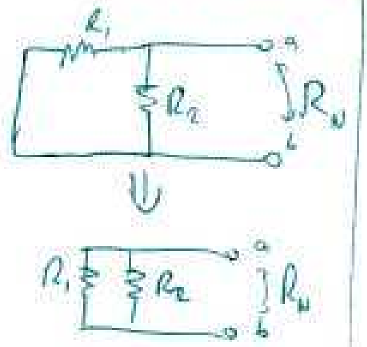
- Tomgångsspänning



Spänningsdelare formeln ger oss:

$$U_{tg} = \frac{U R_2}{R_1 + R_2}$$

- Resistans a→b med oberoende källor nollställda

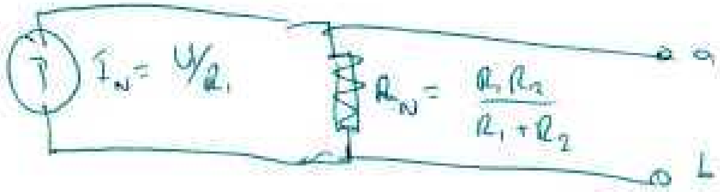


$$R_N = R_1 \| R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

(man väljer de lättaste två att använda - kom ihåg att resistansmetoden kan bli svårt om man har beroende källor; men här har vi inte.)

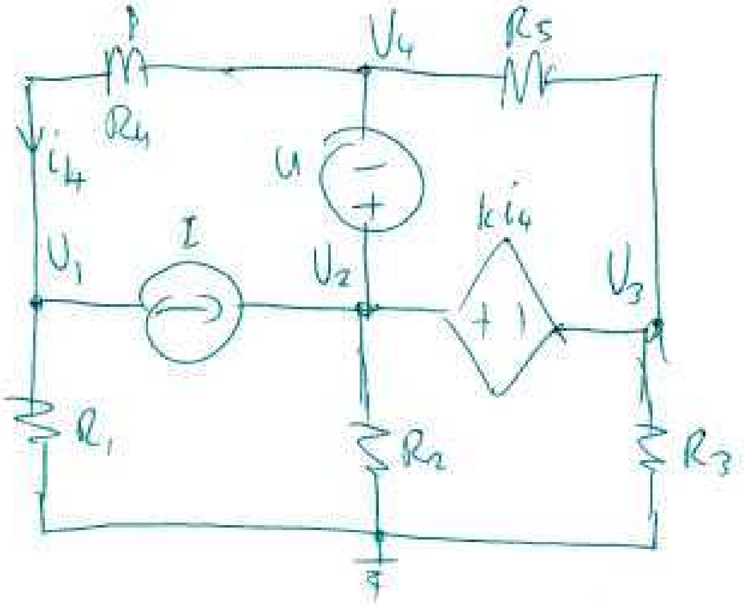
Här verkar I_{ks} och R_N bästa valet, för att de båda var enkla uttryck och de ger oss I_N och R_N direkt.

Lösningen är



(Alternativ beräkning av R_N är $R_N = \frac{U_{tg}}{I_{ks}} = \frac{\left(\frac{U R_2}{R_1 + R_2}\right)}{\left(\frac{U}{R_1}\right)} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$)

③



Det finns flera sätt att hantera spänningskällor i nodanalys.
Det finns också flera sätt att skriva KCL ekvationerna,
(till exempel, $a+b=0$, $-a-b=0$, $a=-b$,).
De följande metoderna fungerar, och andra kan göra så också.

i) "mekaniskt" metod (ingen "supernod"),
för varje spänningskälla, introducera en ny okänd ström, (vilken går in på en nod och ut av en annan); men introducera också ett nytt samband mellan nodspänningar, som källan orsakar. Därför en till ekvation plus okänd. Som vanligt uttrycker man en beroende källas styrvariabel som funktion av nodparametrar.

KCL nod ①
$$\frac{V_4-V_1}{R_4} - I - \frac{V_1}{R_1} = 0$$

KCL, nod ②
$$I - I_u - I_r - \frac{V_2}{R_2} = 0$$
← I_r & I_u är de okända strömmarna i de två spänningskällorna

KCL, nod ③
$$I_r - \frac{V_3}{R_3} + \frac{V_4-V_3}{R_5} = 0$$

KCL, nod ④
$$I_u + \frac{V_1-V_4}{R_4} - \frac{V_3-V_4}{R_5} = 0$$

p.g.a. spänningskälla →
$$V_2 - V_4 = u$$

p.g.a. beroende källa →
$$V_2 - V_3 = k\,\frac{(V_4-V_1)}{R_4}$$

(Obs att om man hade en spänningskälla kopplad till jord, så borde man inte ta hänsyn till KCL på den andra noden heller.)

ii) Supernod metoden

Här använder man supernodprincipen för att förenkla problemet innan man skriver ekvationerna.

Obs noder 2, 3, 4 kopplas med spänningskällor. Därför är dessa noder en supernod.
KCL räknas i den hela supernoden.
Man kan antingen behålla alla nodpotentialer som okända, och lägg till extra ekvationer som i den tidigare metoden, eller man kan som man gjorde dittills i en supernod uttrycka olika nodpotentialerna i supernoden med hänsyn till en av de (de andra har samband bestämd av spänningskällorna).

Här kan man uttrycka ~~att~~ alla KCL i två nodpotentialer:
Obs att man här har valt V_2 som referenspotential inom supernoden:

KCL (1)
$$-\frac{V_1}{R_1} - I + \frac{(V_2 - U) - V_1}{R_4} = 0$$

KCL (2,3,4)
$$0 = \frac{V_1 - (V_2 - U)}{R_4} + I - \frac{V_2}{R_2} - \frac{V_2 - k\frac{((V_2-U)-V_1)}{R_4}}{R_3}$$

Sedan, eller tillsammans i ett system av 4 okända och 4 ekvationer, kan man lägga till att:

$$k\left(\frac{V_4 - V_1}{R_4}\right) = V_2 - V_3$$
$$U = V_2 - V_4$$

för att få ut alla potentialer.