Hemuppgift 1/4.

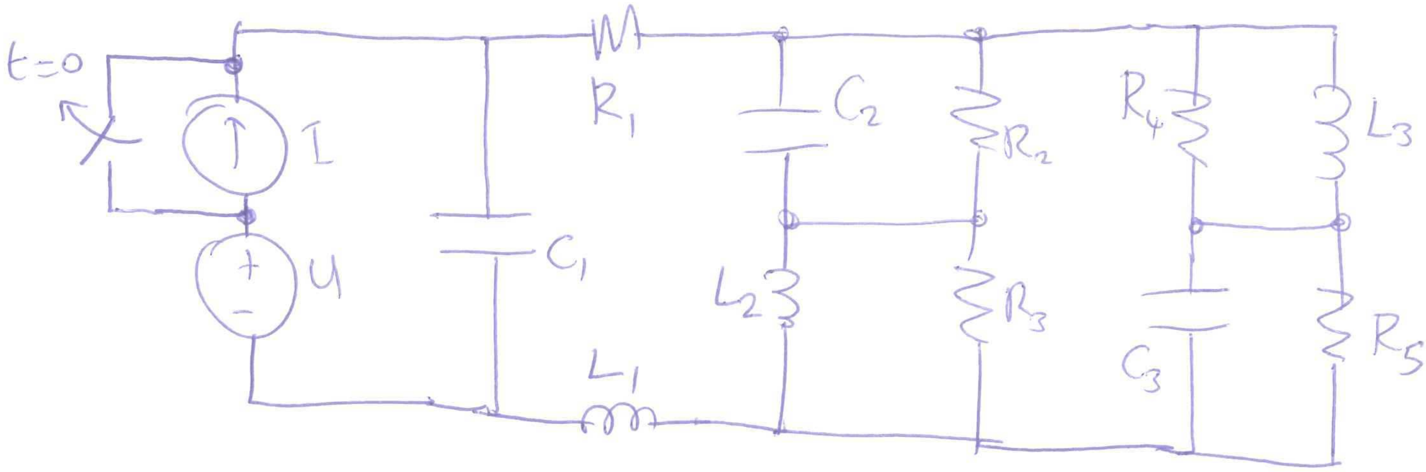
EI1120.

VT 2013.

Redovisas 2013-02-01.

Handskriven p.g.a. tidsbrist.

1



Just innan tid $t=0$ har kretsen kommit till ett jämviktsläge: (källorna U och I är konstanta över alla tid).
Skriv spänning och ström på varje komponent!
(Gör egen definition. En tabell rekommenderas.)

Sedan vid $t=0$ är brytaren öppnad (avslagen).
Skriv alla variabler igen för tiden "$t=0^+$"
(direkt efter öppnandet).

Slutligen: skriv igen för det nya jämviktsläget $t \to \infty$.

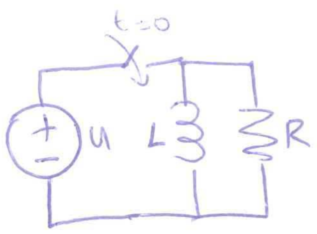
Rekommenderad sätt:

	$t=0^-$		$t=0^+$		$t\to\infty$	
	u	i	u	i	u	i
U	U		U		U	
I		I		I		I
C_1						
L_1						
R_1						
o.s.v.						

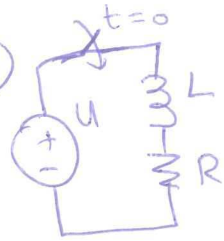
2 I varje krets här, är källorna konstanta (likström) och alla kondensatorspänningar och spolströmmar (energier) noll vid tid $t=0$.

Skriv i varje fall uttryck för spänningen över och strömmen genom varje komponent (R, U eller I, L eller C) som funktion av tid för $t \geq 0$.

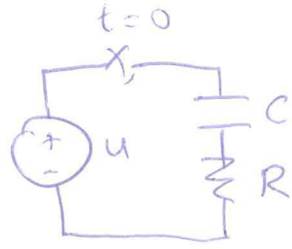
(A)



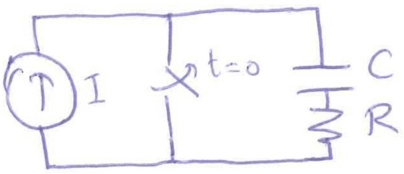
(B)



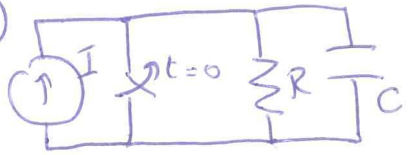
(C)



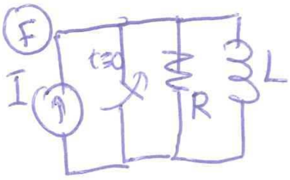
(D)



(E)

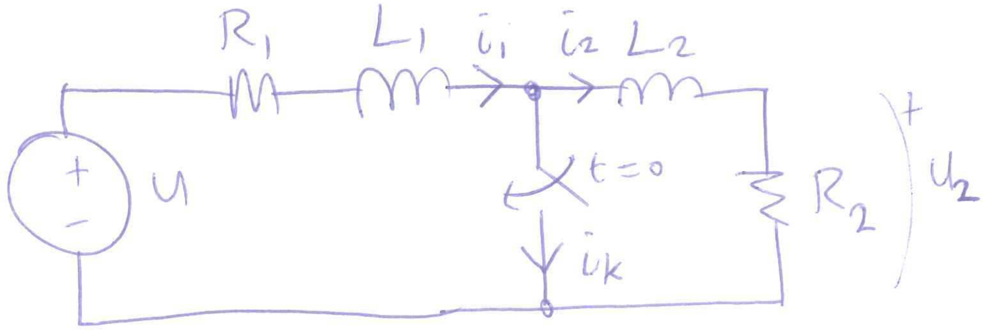


(F)



<u>Obs</u> borde vara 6 svar för varje fall: 3 komponenter, varje med en spänning och ström. Vissa är konstanta eller triviala.

③ (Jämviktsberäkning,
Diff. ekvation utformning och lösning, med icke noll initialvärde.)

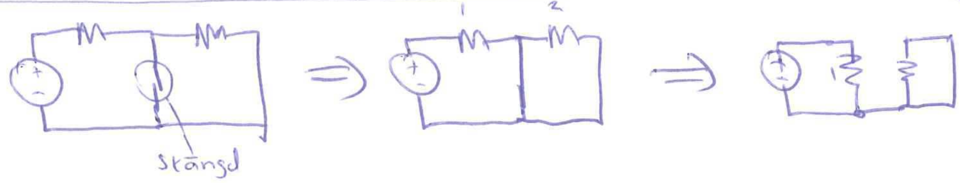


Kretsen modellerar ett elkraftsystem som försörjer lasten R_2.
Det blir ett kortslutningsfel vid tid $t = 0$.
Man vill se hur spänningen blir vid lasten (u_2),
och vad kortslutningsströmmen i_k och källans ström i_1 blir.
[Och man måste inte förstå texten ovan för att lösa diagrammet!]

ⓐ Beräkna jämviktsläget (i_1, i_2, u_2)
innan kortslutningen ($t = 0^-$).

ⓑ ~~Stans~~ Beräkna strömmen i_k, strömmen i_1
och spänningen u_2 som tidsfunktioner
för tider $t \geq 0$.
(Använd initialvillkor från ⓐ.)

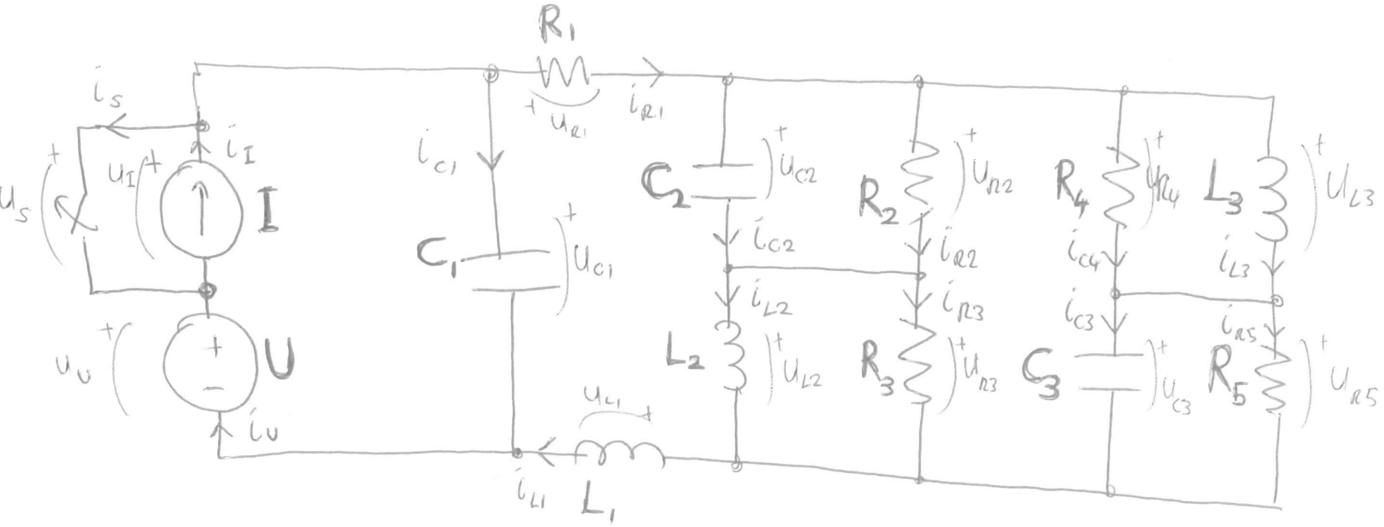
Obs
Tips



Homework 1, EI1120 (CENMI) VT2013.

Handwritten, scanned solutions.
The long full solution of Q1 is given here, followed by the short "final answers" page that was provided during the review session (redovisning).

1 [detaljförklaring]

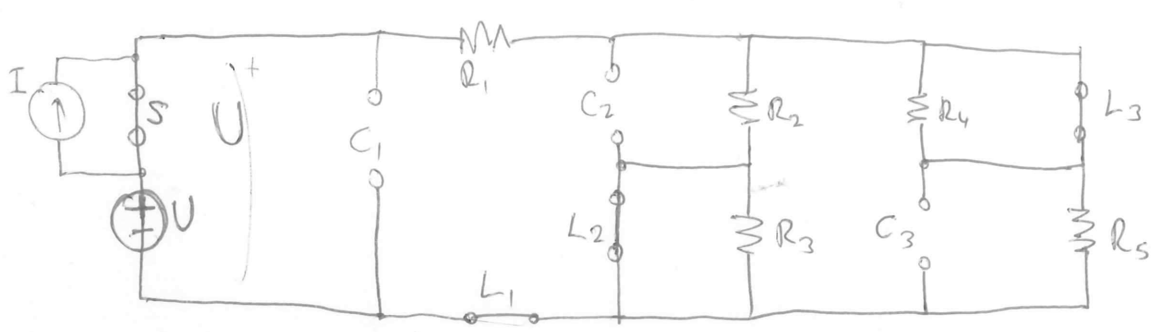


Här är den ursprungliga kretsen, med definitioner av komponenters strömmar och spänningar. Dessa har namn u_x eller i_x där komponenten kallas 'x'. (Här är definitioner med spänningens +-pol uppe i vertikala grenar, och till höger på botten eller vänster på toppen. Passivkonvention bestämmer strömreferensen för passiva komponenter, och aktivkonvention för källorna. Man får bestämma sina egna referensriktningar, och en negativtecken förväntas om man jämför med en lösning där referensen var tvärtom.)

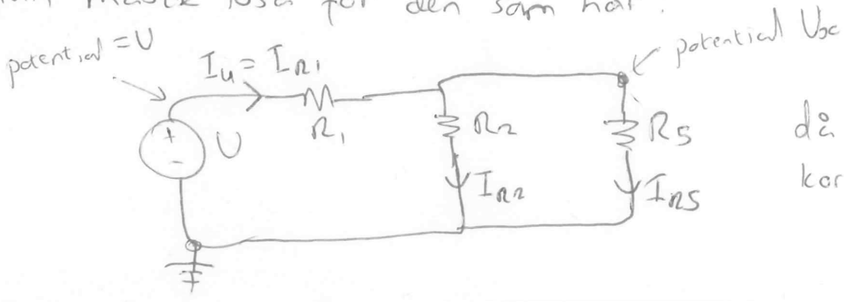
fall 0^-

Ta först jämviktstillståndet vid $t=0^-$ (brytaren fortfarande påslagen).

Kretsen kan analyseras som här, genom att kortsluta spolar och öppenkrets vid kondensatorer.:



Man måste lösa för den som här:



då R_4 och R_3 är kortslutna av L_3 och L_2.

Det finns därför bara två potentialer och tre olika strömmar i kretsen (om man inte räknar med "noll" strömmar eller med en "jordad" potential — vi kan definiera botten av spänningskällan som jord).

$$I_u = \frac{U}{R_1 + \frac{R_2 R_5}{R_2 + R_5}}$$

$$I_{R2} = \frac{I_u R_5}{R_2 + R_5} \quad \text{(strömdelning)}$$

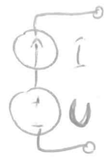
$$I_{R5} = \frac{I_u R_2}{R_2 + R_5}$$

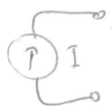
$$U_x = R_5 I_{R5} = \frac{I_u R_2 R_5}{R_2 + R_5} = \frac{U R_2 R_5}{R_1(R_2+R_5) + R_2 R_5}.$$

Nu går det att fylla in hela tabellen för alla u och i vid fall "0⁻", genom KCL & KVL:

komponent	u (varför)	i (varför)
U	U (per definition)	I_u (ovan)
I	0 (kortsluten av S)	I (per definition)
S	0 (stängd brytare → KS)	$I - I_u$ (KCL)
C_1	U (KVL)	0 (jämviktsläge [j.v.l.])
R_1	$R_1 I_u$ (ovan; KCL ohm)	I_u (KCL)
L_1	0 (jämviktsläge [j.v.l.])	I_u (KCL)
C_2	V_x (ovan)	0 (j.v.l.)
L_2	0 (j.v.l.)	$U_x/R_2 = I_{R2}$ (ovan)
R_2	U_x	$U_x/R_2 = I_{R2}$ (ovan)
R_3	0 (kortsluten av L_2)	0 (ohms lag, KVL, när $U_{R3}=0$)
R_4	0 (kortsluten av L_3)	0 (ohms lag, KVL)
C_3	V_x	0 (j.v.l.)
L_3	0 (j.v.l.)	U_x/R_5 (KCL)
R_5	U_x	$U_x/R_5 = I_{R5}$ (ovan)

fall 0^+

Nu är brytaren öppet. kombinationen 

beter sig precis som en strömkälla I med hänsyn till resten av kretsen! 

(men kom ihåg att spänningen över denna "ekvivalent" strömkälla ~~skrivs~~ 'U' ~~är~~ det samma som spänningen över den riktiga strömkällan.)

Vi kan inte ersätta L och C med kort resp. öppet kretsar, då vi inte vet att alla $\frac{di}{dt}$ och $\frac{du}{dt}$ är lika med noll. (Det blir dem bara om $IR_e = U$ där U e I är källornas värden och R_e är total kretsresistans i jämviktsläge, d.v.s. $R_1 + \frac{R_2 R_5}{R_2 + R_5}$.)

Så, vi fyller in kända strömmar (I, och alla strömmar i spolar, genom kontinuitet $0^- \to 0^+$) och spänningar (över kondensatorer, genom kontinuitet). Sedan kan vi använda dessa tillsammans med resistanserna för att lösa resten av variabler (ohm, KVL, KCL).

MEN: här är C_1 parallellkopplad med I och med resten av kretsen. Spänning på C_1 är fortfarande som den var vid tid 0^- (kontinuitet). Därför 'ser' resten av kretsen samma situation som förut (fall 0^-). Det är bara källorna, C_1 och brytaren där det har varit ändring. (Ändringar kommer att hända, om inte $U = \left(R_1 + \frac{R_2 R_5}{R_2 + R_5}\right) I$, [se ovan], men de tar tid — strömkällan måste ta tid för att ändra spänningen på kondensatorn C_1.).

Så går det att kopiera u och i för $L_1 \ldots L_3$, $R_1 \ldots R_5$ och $C_2 \ldots C_3$ från 0^- över till 0^+ ... bara p.g.a. detta speciellfall att C_1 skyddar dem från snabba ändringar.

komponent	u	i
U	U (definition)	I (KCL: seriekopplad med strömkälla)
I	0 (KVL med U och C_1)	I (definition)
S	0 (parallell med I)	0 (definition av öppen brytare)
C_1	U (kontinuitet från 0^-)	$I - \underbrace{I_{R1}}_{=I_u\ (t=0^-)}$ (KCL; man får I_{R1} från $t=0^-$)
resten enligt fall 0^-		

fall $t \to \infty$

Nu löser vi igen för jämviktsläge.
Den enda skillnaden från det första fallet är att nu har man en strömkälla i stället för en spänningskälla som driver kretsen.

Med hänsyn till derivationerna från fall 0^- kan man säga den följande (här tar jag U_x' för att visa ett nytt värde av U_x till skillnad från fall 0^-).

$$I_u' = I \qquad \left(I_{R2}' = \frac{I_u' R_5}{R_2 + R_5} \;,\; I_{R5}' = \frac{I_u' R_2}{R_2 + R_5} \right)$$

$$U_x' = \frac{R_5 R_2}{R_2 + R_5} I$$

Man kan fylla in tabellen för komponenterna till höger av C_1 genom bara att byta $U_x \to U_x'$, $I_{R2} \to I_{R2}'$ o.s.v. från fall 0^-.

för
fall $t \to \infty$

komponent	U	I
U	U (definition)	I (seriekopplad: KCL)
I	$U_x' + IR_1 - U$ (KVL)	I (definition)
S	$U_x' + IR_1 - U$ (KVL)	0 (definition: öppet)
C_1	$U_x' + IR_1$ (KCL + KVL)	0 (jämviktsläge)
resten	såsom fall 0^-, men med U_x bytt till U_x',	I_u bytt till I,

HU1/4 EI1120 VT2013 lösningsförslag NTaylor

(1)

Sammanfattning av svaret för tal 1.
Nästa sidorna ger förklarning.
Definitionsriktningar för komponentspänningar och strömmar finns på nästa sidan.

Definiera: (obs versaler)

$$I_u = \frac{U}{R_1 + \frac{R_2 R_5}{R_2 + R_5}}$$

$$I_{R2} = \frac{I_u R_5}{R_2 + R_5} = \frac{U R_5}{R_1(R_2+R_5) + R_2 R_5}$$

$$U_x = \underbrace{R_2 I_{R2}}_{\text{(samma som } R_5 I_{R5}\text{)}} = \frac{U R_2 R_5}{R_1(R_2+R_5) + R_2 R_5}$$

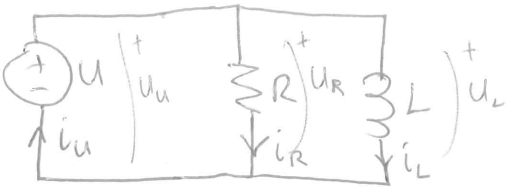
$$I'_{R2} = \frac{I R_5}{R_2 + R_5}$$

$$U'_x = \frac{R_5 R_2}{R_2 + R_5} I$$

komponent	fall 0^-		fall 0^+		fall $\to \infty$	
(variabel ⇒ på komponenten)	u	i	u	i	u	i
källa U	U	I_u	U	I	U	I
källa I	0	I	0	I	$U'_x + IR_1 - U$	I
brytare S	0	$I - I_u$	0	0	$U'_x + IR_1 - U$	0
C_1	U	0	U	$I - I_u$	$U'_x + IR_1$	0
R_1	$R_1 I_u$	I_u	samma som fall 0^- ⇐		$R_1 I$	I
L_1	0	I_u			0	I
C_2	U_x	0			U'_x	0
L_2	0	U_x/R_2			0	U'_x/R_2
R_2	U_x	U_x/R_2			U'_x	U'_x/R_2
R_3	0	0			0	0
R_4	0	0			0	0
C_3	U_x	0			U'_x	0
L_3	0	U_x/R_5			0	U'_x/R_5
R_5	U_x	U_x/R_5			U'_x	U'_x/R_5

② (Alla energier ~~antas~~ noll vid $t=0$.)

Ⓐ



Lätt. R & L är parallellkopplade, till en spänningskälla. Därför är deras strömmar oberoende av varandra.

$$\begin{cases} i_R = \dfrac{u_R}{R} = \dfrac{U}{R} \quad \text{(alla tider } t \geq 0\text{)} \\ L\dfrac{di_L}{dt} = u_L = U \quad \therefore \; i_L = \dfrac{Ut}{L} \\ i_U = i_R + i_L = U\left(\dfrac{1}{R} + \dfrac{1t}{L}\right) \\ u_L = u_R = u_U = U \quad \text{(parallellkoppling)} \end{cases}$$

Ⓑ Klassiskt fall av "Théveninliknande krets" hos induktans. Boken skulle omvandla till Norton. Vi kan lika väl lösa ekvationen direkt:

$$u_U = U = u_L + u_R \quad \text{(KVL)}$$

$$U = L\frac{di}{dt} + Ri$$

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{U}{L}$$

$$\therefore \; i = \frac{U}{R} + Ae^{-t/\left(\frac{L}{R}\right)}$$

(Standard lösning t.ex. med integrationsfaktor: $\dfrac{dy}{dx} + ay = b \Rightarrow y = \dfrac{b}{a} + Ae^{-at}$ ⇑ räknas från begynnelsevärde)

vid $t=0$ är $i=0$ och $e^{-0}=1$

A hittas genom att:

$$i = 0 = \frac{U}{R} + A$$

$$\therefore \; A = -\frac{U}{R}.$$

$$i(t) = \frac{U}{R} - \frac{U}{R}e^{-t/\frac{L}{R}} = \frac{U}{R}\left(1 - e^{-t/\frac{L}{R}}\right)$$

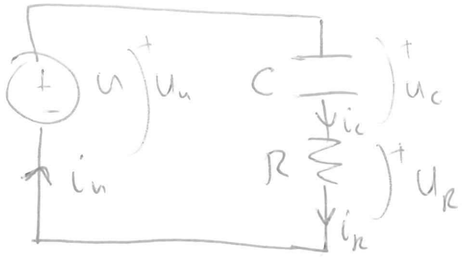
$$i_L = i_R = i_U = i \quad \text{(seriekoppling)}$$

$$u_R = Ri_R = Ri = U\left(1 - e^{-t/\frac{L}{R}}\right)$$

$$u_L = U - u_R = Ue^{-t/\frac{L}{R}}$$

(2)

(C)



(kortare förklarning denna gång)

$$i = i_u = i_R = i_C$$
$$u = u_u = u_C + u_R$$

(Bäst att ta u_C som funktionen i differentialekvation — tar man istället ström så blir du en integral av ström som ger spänningen.)

$$u = iR + u_C$$
$$i = C\frac{du_C}{dt}$$

$$u = RC\frac{du_C}{dt} + u_C$$

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{RC} = \frac{u}{RC}$$

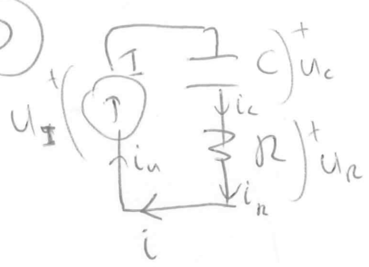
$$u_C = u + Ae^{-t/RC}$$

$$u_C(t=0) = 0 \Rightarrow 0 = u + A$$
$$\therefore A = -u.$$

$$\therefore u_C(t) = u - ue^{-t/CR}$$
$$= u(1 - e^{-t/CR}).$$

$$u_R = u - u_C = ue^{-t/CR}$$

(D)



$$i_u = i_C = i_R = I$$

Lätt, för att strömmen är bestämd över hela kretsen. Jämför med krets (A) som har likhet i sina ekvationer.

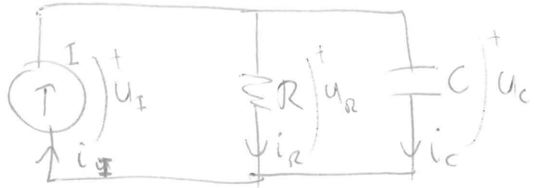
$$u_I = u_C + u_r.$$
$$u_r = IR.$$

$$C\frac{du_C}{dt} = I$$

$$\therefore u_C = \frac{I}{C}t \quad (\text{begynnelsevärde av } u_C = 0)$$

2

E



$$u_I = u_C = u_R$$

$$i_R + i_C = i_I = I$$

$$I - C\frac{du_C}{dt} = i_R = \frac{u_C}{R}$$

$$\therefore \frac{d}{dt}u_C + \frac{u_C}{RC} = \frac{I}{C}$$

$$u_C = IR + Ae^{-t/RC}$$

$u_C(t=0) = 0$ (begynnelsesverdiet)

$$\Rightarrow 0 = IR + A$$

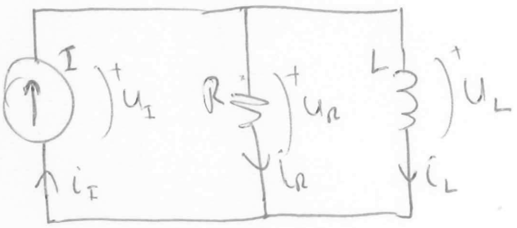
$$A = -IR$$

$$u_C(t) = IR\left(1 - e^{-t/RC}\right)$$

$$i_R = \frac{u_R}{R} = \frac{u_C}{R} = I\left(1 - e^{-t/RC}\right)$$

$$i_C = I - i_R = Ie^{-t/RC}$$

F



$$u_L = u_R = u_I$$

$$i_R + i_L = i_I = I$$

$$L\frac{di_L}{dt} = u_L = u_R = i_R R = (I - i_L)R$$

$$\Downarrow$$

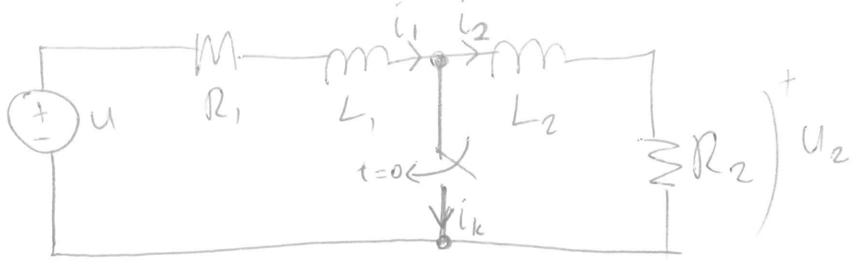
$$\therefore \frac{di_L}{dt} + \frac{i_L R}{L} = \frac{IR}{L}$$

$$i_L = I\left(1 - e^{-t/\frac{L}{R}}\right)$$

$$i_R = I - i_L = Ie^{-t/\frac{L}{R}}$$

$$u_I = i_R R = IRe^{-t/\frac{L}{R}}$$

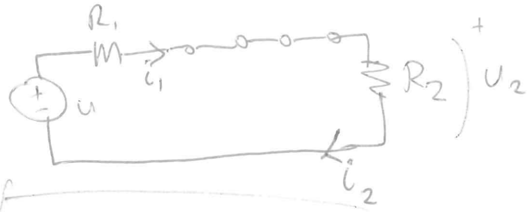
③



Kretsen ovan ska analyseras för tider $t \geq 0$. U är konstant.

ⓐ Först behövs ett begynnelsevärde för strömmarna i spolarna. Vi får detta från jämnviktsläget just innan $t=0$ $(t=0^-)$.

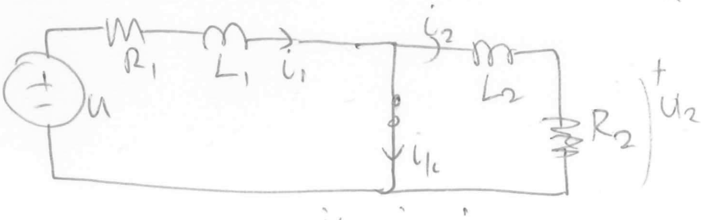
$t = 0^-$:

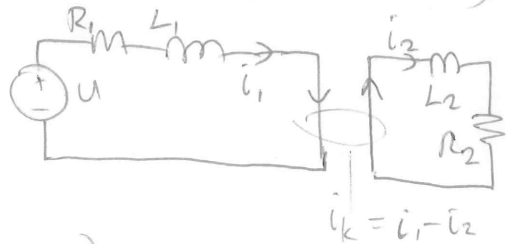


$$\boxed{i_1 = i_2 = \frac{U}{R_1 + R_2}}$$

$$\boxed{U_2 = R_2 i_2 = \frac{U R_2}{R_1 + R_2}}$$

ⓑ Efter brytaren stängs har man esentligen två enskilda kretsar (från analysperspektiv! Med hänsyn till beräkning av i_k är det båda delar som måste användas, men diffekvationerna kan lösas på enskild sätt).





$i_k = i_1 - i_2$

$i_k = i_1 - i_2$

$i_1(0) = i_2(0) = \frac{U}{R_1 + R_2}$ (från delsvar ⓐ och kontinuitet)

Från diagrammet till höger:

$$\frac{di_1}{dt} + \frac{i R_1}{L_1} = \frac{U}{L_1}$$

$$i_1 = \frac{U}{R_1} + A e^{-t/\frac{L_1}{R_1}}$$

$$i_1(0) = \frac{U}{R_1 + R_2} = \frac{U_1}{R_1} + A \quad \left[\therefore A = \frac{-R_2}{R_1(R_1 + R_2)} \right]$$

$$i_1 = \frac{U}{R_1}\left(1 - \frac{R_2}{R_1 + R_2} e^{-t/\frac{L_1}{R_1}}\right) \quad (t \geq 0)$$

och (andra slingan):

$$L_2 \frac{di_2}{dt} + i_2 R_2 = 0$$

$$i_2 = A e^{-t/\frac{L_2}{R_2}}$$

begynnelsevärde: $i_2(0) = \frac{U}{R_1 + R_2} = A$

$$i_2 = \frac{U}{R_1 + R_2} e^{-t/\frac{L_2}{R_2}}$$

---

från $i_k = i_1 - i_2$ har vi:

$$\boxed{i_k = \frac{U}{R_1}\left(1 - \frac{R_2}{R_1 + R_2} e^{-t/\frac{L_1}{R_1}}\right) - \frac{U}{R_1 + R_2} e^{-t/\frac{L_2}{R_2}}}$$

och från $U_2 = R_2 i_2$,

$$\boxed{U_2 = \frac{R_2 U}{R_1 + R_2} e^{-t/\frac{L_2}{R_2}}}$$