EI1120 Elkretsanalys (CENMI), Hemuppgift 2/4.

Redovisas med kamraträttning 2013-02-08, kl 11–12 (efter övningen 09–11).

Nathaniel Taylor, feb 2013

---

1) För varje av de följande komplexa uttrycken (a)–(l), ge de följande egenskaperna (i)–(v). Anta att (R, L, C, ω) är reella och positiva. Ett exempel är givet för det komplexa talet $z = -10\sqrt{\mathrm{j}}$.

i:	absolutbelopp (amplitud)	$\lvert z\rvert = 10$
ii:	argument (fasvinkel)	$\angle z = 5\pi/4 = 225^\circ = -3\pi/4 = -135^\circ$
iii:	polärform ($A\angle\alpha$)	$10\angle\frac{5\pi}{4}$
iv:	kartesiskform ($a + \mathrm{j}b$)	$-\frac{10}{\sqrt{2}}(1+\mathrm{j})$
v:	rit talet på det komplexa talplanet.	[inget exempel!]

(a) 1 **(b)** $-\mathrm{j}$ **(c)** $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi}$ **(d)** $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{3\pi}{2}}$ **(e)** $3 + \mathrm{j}4$ **(f)** $4 - 3\mathrm{j}$ **(g)** $15\angle 135^\circ$ **(h)** $-16\angle{-150^\circ}$

(i) $A\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha}$ **(j)** $\dfrac{1}{R + \mathrm{j}\omega L}$ **(k)** $R + \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}$ **(l)** $\dfrac{R + \mathrm{j}\omega L}{R + \mathrm{j}\omega L + R + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}}$

---

2) För båda delproblem (a) och (b), gör de följande beräkningarna med de två givna komplexa talen:
i: skriv båda i kartesisk form; multiplicera i kartesisk form; omvandla resultatet till polärform.
ii: gör som i (i), men *addera* i stället för att multiplicera.
iii: gör som i (i), men byt 'kartesisk' och 'polär' i beskrivningen.
(a) $(5 + 10\mathrm{j})$, $(-2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/2})$
(b) $10\angle 45^\circ$, $3(-1+\mathrm{j})/\sqrt{2}$

---

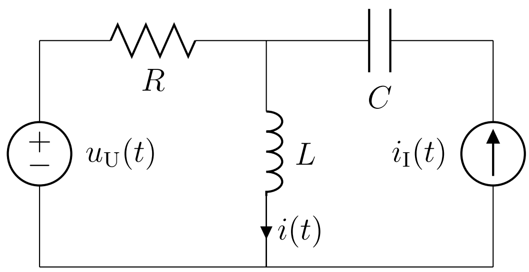
3) Skriv på komplexform (cosinusreferens) de följande tidsdomänsignalerna:
(a) $u_1\cos(\omega t + \phi_1) + u_2\cos(\omega t - \phi_2)$ **(b)** $u\sin(\omega t)$ **(c)** $\cos(\omega t) + \sin(\omega t)$
(d) Varför går inte $\cos(\omega t + \phi_1) + \cos(2\omega t + \phi_2)$ att omvandla till ett komplext tal som i (a)–(c)?
Skriv motsvarande tidsfunktioner (cosinusreferens och toppvärdesform) för de följande frekvensdomän signalerna: **(e)** $A\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha}$ **(f)** $A\angle\alpha$ **(g)** $(a+\mathrm{j}b)(c+\mathrm{j}d)$ **(h)** $\mathrm{j}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi}$ **(i)** $A\mathrm{e}^{\mathrm{j}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/2}}$

---

4) Lös den följande, för $i(t)$, genom den komplexa metoden (stationär växelström).

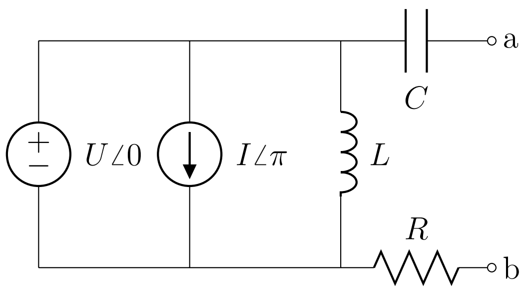
Källorna ger växelström enligt:
$u_\mathrm{U}(t) = A\cos(\omega t + \alpha)$
$i_\mathrm{I}(t) = -I\sin(128\omega t)$.

Varför behöver man använda superposition här?



---

5) I kretsen till höger är båda källorna växelströmskällor med samma vinkelfrekvens ω. Värdena är redan översatta till komplexa tal som beskriver källorna i frekvensdomänen. (Den här uppgiften är gjord helt i frekvensdomänen.)
(a) Bestäm kretsens Nortonekvivalent (sett från a-b).
(b) Gör dimensionskoll på resultaten (I_N och R_N).
(c) Gör rimlighetskoll på resultaten (t.ex. vad händer i ekvationerna när $I \to 0$ eller $R \to \infty$, $U \to 0$, o.s.v., och hur stämmer detta med kretsen?).



EI1120 Elkretsanalys (CENMI), LÖSNINGAR till Hemuppgift 2/4.

Redovisning med kamraträttning 2013-02-08, kl 11–12 (efter övningen 09–11).

Innehållet av hemuppgiften är viktigt för förståelse av växelströmsberäkningar. Genom att rätta någon annans svar får du en chans att öva mer (t.ex. när du kollar om ett svar stämmer med lösningen här, trots olika uttrycksform). Men du borde också försäkra, efter redovisningen, att dina egna svar var rätta, eller annars att du förstår varför. Det kan vara mycket användbart att jobba med någon annan när du försöker förstå om, och hur, ett svar var fel. Facit var gjort ganska snabbt ... ta upp genast eventuella fel i facit på KTH social för att varna andra och få snabbt svar! Jag hoppas hemuppgiften var rimligare i svårighet, och facit mer läsbar, än förra veckan.

Nathaniel Taylor, feb 2013

Anmärkningar (för kamraträttare med tålamod för olika uttrycksform!).
* Grader kan användas i stället för radian (med tydlig '°' tecken); det spelar ingen roll vilken man använder, och förslag i tabellen nedan är blandade.
* Man kan också skriva en fas (argument) α som $\alpha + 2\pi N$ där N är vilket som helst heltal; men konventionellt ska man alltid omvandla fasen till mellan -2π och 2π, ibland även $-\pi$ och π.
* Det handlar om smak om man väljer $a + \mathrm{j}b$ eller $a + b\mathrm{j}$ (eller $a + ib$!), eller om man skriver eller inte skriver nollkomponenter t.ex. $0 + 1\mathrm{j}$ eller bara 1j eller j.
* Negativtecken på hela komplexatalet motsvarar ändring av argument med π; men här borde man kräva att slutresultat i polärform följer 'standardform' där amplituden är positiv reell.
* Funktionerna atan() och $\tan^{-1}()$ är synonymer.
* Trevliga vinklar som π, $\pi/4$, $\pi/6$ osv har trevliga sinus och cosinus värden som man ibland ersätter dem med $\left(\text{t.ex. } \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1, 0, \text{ osv}\right)$; det är bra att bli van med dessa.

---

1) Den följande tabellen visar deltal a) till i). Obs: z är bara ett vanligt namn till ett godtyckligt komplextal; den är inte meningen ovan att z handlar om impedans (vilken brukar vara versal, Z).

deltal	z	$\lvert z\rvert$	$\angle z$	polärform	kartesisk form
a)	1	1	0	1 (alt. $1\angle 0$)	1 (alt. 1+0j)
b)	$-\mathrm{j}$	1	$-\pi/2$	$1\angle -\frac{\pi}{2}$	0−1j
c)	$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi}$	1	π	$1\angle \pi$	-1
d)	$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{3\pi}{2}}$	1	$-\pi/2$	$1\angle -\frac{\pi}{2}$	$0 - 1\mathrm{j}$
e)	$3 + \mathrm{j}4$	5	$\tan^{-1}(4/3)$	$5\angle \tan^{-1}(4/3)$	3+j4
f)	$4 - 3\mathrm{j}$	5	$\tan^{-1}(-3/4)$	$5\angle \tan^{-1}(-3/4)$	4−j3
g)	$15\angle 135°$	15	135°	$15\angle \frac{3\pi}{4}$	$15\cos 135° + \mathrm{j}15\sin 135°$, alt. $\frac{15}{\sqrt{2}}(-1+\mathrm{j})$
h)	$-16\angle -150°$	16	30°	$16\angle 30°$	$16\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{j}\frac{1}{2}\right)$
i)	$A\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha}$	A	α	$A\angle \alpha$	$A\cos\alpha + \mathrm{j}A\sin\alpha$

'Rit på det komplexatalplanet' (Argand diagram): detta kan man kolla på själv eller fråga kurskamrater eller övningsassistenten.

j) $\dfrac{1}{R + \mathrm{j}\omega L}$.

Nämnaren $R + \mathrm{j}\omega L$ har absolutbelopp $\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$ och argument $\tan^{-1}(\frac{\omega L}{R})$.
Därför har $\frac{1}{\text{nämnaren}}$ absolutbelopp $1/\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$ och argument $-\tan^{-1}(\frac{\omega L}{R})$.
Dessa går direkt in i polärformen.
Den kartesiska formen kan man få genom komplexkonjugat: $\frac{1}{R+\mathrm{j}\omega L} = \frac{R-\mathrm{j}\omega L}{(R+\mathrm{j}\omega L)(R-\mathrm{j}\omega L)} = \frac{R-\mathrm{j}\omega L}{R^2+\omega^2 L^2}$.

k) $R + \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}$.

Kartesisk form följer direkt: $R - \frac{\mathrm{j}}{\omega C}$.
Absolutbeloppet är $\sqrt{R^2 + 1/(\omega^2 C^2)}$.
Argumentet är $\tan^{-1}(-1/(\omega C R))$.
Polärformen följer direkt från absolutbelopp och argument.

l) $\dfrac{R + \mathrm{j}\omega L}{R + \mathrm{j}\omega L + R + 1/(\mathrm{j}\omega C)}$.

En första förenkling är att dra tillsammans reella och imaginära delar i nämnaren:

$$R + \mathrm{j}\omega L + R + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} \quad \to \quad 2R + \mathrm{j}(\omega L - 1/(\omega C)).$$

Om vi bara ville få ut lösningen i polärform, så vore det tydligt bäst att räkna polärt: vi har en kvot av två tal t/n där $t = R + \mathrm{j}\omega L$ och $n = R + \mathrm{j}\omega L + R + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}$. Den polära lösningen är

$$\frac{|t|}{|n|}\angle(\angle t - \angle n),$$

vilken blir, med hänsyn till värdena t och n,

$$\sqrt{\frac{R^2 + \omega^2 L^2}{4R^2 + (\omega L - 1/(\omega C))^2}}\angle\left(\tan^{-1}\tfrac{\omega L}{R} - \tan^{-1}\tfrac{\omega L - 1/(\omega C)}{2R}\right).$$

Den här polärform *kan* användas för att få den kartesiska formen, men en sådan omvandling brukar ge otrevliga uttryck om inte man har specialfall där de trigonometriska funktionerna kan lösas direkt. Här har vi variabler, inte kända faser som 90°, 45° o.s.v., och därför blir uttrycket:

$$\sqrt{\frac{R^2 + \omega^2 L^2}{4R^2 + (\omega L - 1/(\omega C))^2}}\cos\left(\tan^{-1}\frac{\omega L}{R} - \tan^{-1}\frac{\omega L - 1/(\omega C)}{2R}\right) + \cdots$$
$$\mathrm{j}\sqrt{\frac{R^2 + \omega^2 L^2}{4R^2 + (\omega L - 1/(\omega C))^2}}\sin\left(\tan^{-1}\frac{\omega L}{R} - \tan^{-1}\frac{\omega L - 1/(\omega C)}{2R}\right).$$

Vill man ha en lösning i kartesisk form (t.ex. om man kommer att summera lösningen med andra komplexa tal i senare steg) så blir det ofta bättre att stanna i kartesisk form, genom att använda komplexkonjugat. Här blir den kartesiska lösningen:

$$
\begin{aligned}
& \frac{R+\mathrm{j}\omega L}{2R+\mathrm{j}(\omega L-1/(\omega C))}\cdots \\
= \quad & \frac{(R+\mathrm{j}\omega L)\quad(2R-\mathrm{j}(\omega L-1/(\omega C)))}{(2R+\mathrm{j}(\omega L-1/(\omega C)))\quad(2R-\mathrm{j}(\omega L-1/(\omega C)))}\cdots \\
= \quad & \frac{\left(2R^2+\omega^2L^2-\frac{L}{C}\right)+\mathrm{j}\left(2R\omega L+\frac{R}{\omega C}-R\omega L\right)}{4R^2+\omega^2L^2+1/(\omega^2C^2)-2L/C}\cdots \\
= \quad & \frac{2R^2+\omega^2L^2-L/C}{4R^2+\omega^2L^2+1/(\omega^2C^2)-2L/C}+\mathrm{j}\frac{2R\omega L+\frac{R}{\omega C}-R\omega L}{4R^2+\omega^2L^2+1/(\omega^2C^2)-2L/C} \\
= \quad & \frac{1}{4R^2+\omega^2L^2+1/(\omega^2C^2)-2L/C}\left\{\left(2R^2+\omega^2L^2-\frac{L}{C}\right)+\mathrm{j}\left(2R\omega L+\frac{R}{\omega C}-R\omega L\right)\right\}.
\end{aligned}
$$

---

2)

(a) $(5+10\mathrm{j})$, $(-2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/2})$.

i) Kartesisk form: (5+10j), (2j).

Multiplicera: (5+10j) $\cdot$ (2j) $= -20+10\mathrm{j}$.

ii) Addera: (5+10j) + (2j) $= 5+12\mathrm{j}$.

iii) Polärform: $(\sqrt{125}\angle\tan^{-1}(10/5))$, $(2\angle\frac{\pi}{2})$.

Multiplicera: $(\sqrt{125}\angle\tan^{-1}2)\cdot(2\angle\frac{\pi}{2}) = 10\sqrt{5}\angle(\frac{\pi}{2}+\tan^{-1}2)$.

(b) $10\angle 45^\circ$, $3(-1+\mathrm{j})/\sqrt{2}$

i) Kartesisk form: $(\frac{10}{\sqrt{2}}(1+\mathrm{j}))$, $(\frac{3}{\sqrt{2}}(-1+\mathrm{j}))$.

Multiplicera: $(\frac{10}{\sqrt{2}}(1+\mathrm{j}))\cdot(\frac{3}{\sqrt{2}}(-1+\mathrm{j}) = \frac{30}{2}\{(1+\mathrm{j})(-1+\mathrm{j})\} = -30$.

ii) Addera: $\frac{10}{\sqrt{2}}(1+\mathrm{j})+\frac{3}{\sqrt{2}}(-1+\mathrm{j}) = \frac{7}{\sqrt{2}}+\mathrm{j}\frac{13}{\sqrt{2}}$.

iii) Polärform: $10\angle\pi/4$, $3\angle 3\pi/4$.

Multiplicera: $(10\angle\pi/4)\cdot(3\angle 3\pi/4) = (10\cdot 3)\angle\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{4} = 30\angle\pi = -30$.

---

3) Skriv tidsdomänsignalerna på komplexform (cosinusreferens). [Kartesisk eller polärform.]

(a) $u_1\cos(\omega t+\phi_1)+u_2\cos(\omega t-\phi_2) \rightarrow \quad u_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi_1}+u_2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\phi_2}$, vilken är möjlig för att både komponenterna i tidssignalen har den samma frekvensen; men man vill få ut ett enda komplext tal, så vi skriver om som $(u_1\cos\phi_1+u_2\cos\phi_2)+\mathrm{j}(u_1\sin\phi_1-u_2\sin\phi_2)$ i kartesisk form. Vill man har polärform, kanske för att skriva tillbaka till en tidsfunktion, kan det skrivas som: $\sqrt{u_1^2+u_2^2+2u_1u_2(\cos\phi_1\cos\phi_2-\sin\phi_1\sin\phi_2)}\angle\tan^{-1}\frac{u_1\sin\phi_1-u_2\sin\phi_2}{u_1\cos\phi_1+u_2\cos\phi_2}$ (kom ihåg identitetet $\cos^2\phi+\sin^2\phi\equiv 1$ och att $\cos\phi\equiv\cos-\phi$ och $\sin\phi\equiv-\sin-\phi$!).

(b) $u\sin(\omega t)\rightarrow u\angle-\frac{\pi}{2}$.

(c) $\cos(\omega t)+\sin(\omega t)\rightarrow 1-\mathrm{j}$.

(d) $\cos(\omega t+\phi_1)+\cos(2\omega t+\phi_2)$. Den här går inte att omvandla till ett komplext tal som i (a)–(c), för att det fins flera än en frekvens (ω i en del av signalen, 2ω i en annan term).

(e) $Ae^{j\alpha} \to A\cos(\omega t+\alpha)$.

(f) $A\angle\alpha \to A\cos(\omega t+\alpha)$.

(g) $(a+jb)(c+jd) \to \quad \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}\cos(\omega t+\tan^{-1}\frac{ad+cb}{ac-bd})$, så länge $ac-bd\geq 0$; annars måste man ta $\tan^{-1}(\frac{ad+cb}{ac-bd})+\pi$.

(h) $je^{j\pi} \to \cos\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)$.

(i) $Ae^{j+e^{-j\pi/2}} \to A\cos(\omega t)$.

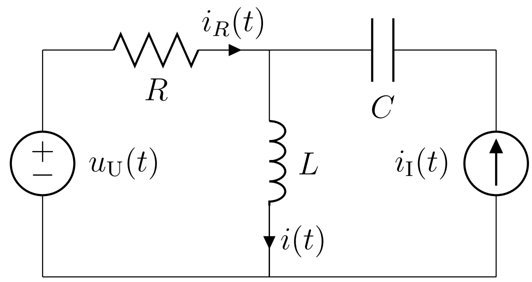
De följande två var inte i hemuppgiften, men de är viktiga: man måste kolla på att argumentet till exp är imaginär, annars beskriver det inte precis fasen:

(jω) $Ae^{\pi/2}$. Det här är bara ett reelt tal: motsvarar $Ae^{\pi/2}\cos(\omega t)$ i tid.

(h) $Ae^{1+j\pi}$. Kan skrivas om som $Ae^1e^{j\pi}$ därför $Ae\cos(\omega t+\pi)$ i tid, eller $-Ae\cos(\omega t)$.

---

4) Lös den följande, för $i(t)$, genom den komplexa metoden (stationär växelström).
Källorna ger växelström enligt:
$u_U(t) = A\cos(\omega t+\alpha)$
$i_I(t) = -I\sin(128\omega t)$.



Kretsen är driven med flera än en frekvens: därför, om man använder stationärväxelströms antagendet (1 frekvens) måste man behandla varje frekvens en på en gång (superposition).

Ta spänningskällan först. I frekvensdomänen, med cosinus referens, är spänningen $U_U(\omega) = A\angle\alpha$. Strömkällan nollställd är öppenkrets, vilken gör att hela grenen av strömkällan och kondensatorn försvinner. Därför är bidraget till spoleströmmen bara p.g.a. spänningskällan givit av $U_U/(R+j\omega L)$, vilken blir

$$\text{pgaU} \quad = \quad \frac{A\angle\alpha}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}\angle\tan^{-1}\frac{\omega L}{R}} \quad = \quad \frac{A}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\angle\alpha-\tan^{-1}\frac{\omega L}{R}.$$

Ta nu spoleströmmen p.g.a. bara strömkällan. I frekvensdomänen är strömmen $I_I(\omega) = I\angle\pi/2$, men kom ihåg att frekvensen är inte samma som förut. Spänningskällan är en kortslutning, därför har man parallella grenar av R och L. En annan komponent seriekopplad med en strömkälla är irrelevant från perspektivet av resten äv kretsen (utanför seriegrenen), därför kan C försummas (som om kortslutet) och vi har bara en strömkälla med sin ström delad mellan grenerna R och L. Men strömdelningsformeln är strömmen i spolen $I_IR/(R+j128\omega L)$, vilken blir

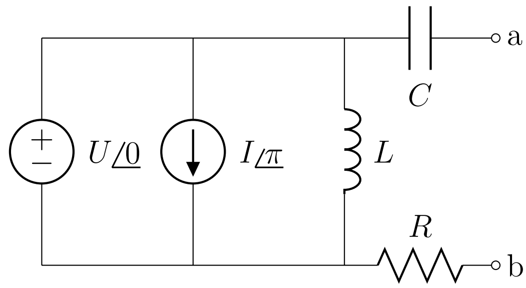
$$\text{pgaI} \quad = \quad I\angle\pi/2\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2+(128\omega L)^2}}\angle-\tan^{-1}\frac{128\omega L}{R} \quad = \quad \frac{IR}{\sqrt{R^2+(128\omega L)^2}}\angle\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\frac{128\omega L}{R}.$$

Tillbaka till en tidssignal, vi använder superposition för att sätta ihop både dessa bidrag. Tänk på att det inte finns en (rimlig) betydelse på summan av de komplexa kvantiteterna för bidragen från ström- och spänningskällorna, för att frekvenserna inte är lika. Endast när vi omvandlar till tid får signalerna 'tillbaka' sina frekvenser tillsammans med amplitud och fas, och kan summeras!

$$i(t) = \frac{A}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\cos\left(\omega t+\alpha-\tan^{-1}\frac{\omega L}{R}\right)+\frac{IR}{\sqrt{R^2+(128\omega L)^2}}\cos\left(128\omega t+\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\frac{128\omega L}{R}\right).$$

---

5) I kretsen till höger är båda källorna växelströmskällor med samma vinkelfrekvens ω. Värdena är redan översatta till komplexa tal som beskriver källorna i frekvensdomänen. (Den här uppgiften är gjord helt i frekvensdomänen.)



(a) Nortonekvivalent (sett från a-b).
Spänningskällan är parallelkopplade till spolen och strömkällan. Därför, från perspektivet av resten av kretsen (C, R, och utanför a-b) är dessa tre komponenter precis som om bara spänningskällan var där. Så söker vi ekvivalent för en serieskoppling av U, C och R. Nortonimpedansen är (med nollställd spänningskälla),

$$Z_{\mathrm{N}} = R - \mathrm{j}/(\omega C).$$

Kortslutningsströmmen (Norton strömkälleströmmen) är bara

$$I_{\mathrm{N}} = \frac{U\underline{/0}}{Z_{\mathrm{N}}} = \frac{U\underline{/0}}{R-\mathrm{j}/(\omega C)} = \frac{U}{\sqrt{R^2+1/(\omega C)^2}}\underline{/\tan^{-1}\frac{1}{\omega CR}}.$$

(för att den förenklade seriekretsen är precis en Theveninkrets).

(b) Gör dimensionskoll på resultaten (I_{N} och R_{N}).
Gå långsamt genom detta: bli van med hur ωC har dimension av admittans (d.v.s. [I]/[V], reciprocal av impedans), och ωL är tvärtom – en impedans.

(c) Gör rimlighetskoll på resultaten. [Några exempel: man kan väl ge längre beskrivningar än dessa, och tänka på fas samt absolutbelopp.] $I \to 0$ gör ingenting, för att parallellkopplade grenar till en spänningskälla har inte inflytande på varandra. $R \to \infty$ gör att $Z_{\mathrm{N}} \to \infty$ och därför att $I_{\mathrm{N}} \to 0$. $\omega C \to 0$ gör att $Z_{\mathrm{N}} \to -\mathrm{j}\infty$, vilken är rimlig då en mycket liten kapacitans eller frekvens gör att lite ström kan gå.

Compiled: 19:28, 8 februari 2013.