

EI1120 Elkretsanalys (CENMI), Hemuppgift 3/4.

Redovisning med kamraträttning 2013-02-22, kl 11–12 (efter övningen 09–11).

Den här är ett försök att bygga in mer praktisk information om elkraftsystem, och att man skapar sitt eget kretsdigram från en beskrivning. Uppgifterna täcker växelströmsanalys, effekt (aktiv och reaktiv), effektfaktor, och även lätt på filterkretsar. De är också en inledning till det senare ämnet 3-fas system.

Om det upplevs som för svårt att förstå från texten vilka kretsar som går att använda för uppgifterna, så kan jag ge en 'ledning' vid slutet av en föreläsning. Det är bra om ni diskuterar med varandra också.

Redovisningssystemet kommer att ändras denna gång genom att uppgifterna ska hämtas in efter sessionen, för att vi ska kunna kolla lite mer på innehållet och identifiera problemområden. Som vanligt måste man inte ha besvarat alla tal rätt, utan ha gjort ett rimligt försök (vilken rigorös definition!).

Har man gjort alla uppgifter, så har man säkerligen förstått mycket, vilket blir en fördel vid tentan och senare kurser. Har man också seriöst läst texten och länkarna så har man fått bra bakgrundskunskap om det viktiga ämnet elektrisk överföring av energi.

Nathaniel Taylor, feb 2013

Först finns det en beskrivning av spänningarna som används i elsystem. Läs den följande texten, och försök att bygga upp en översiktsbild av ett elnät. Det finns länkar: läs dem och ta hänsyn till källorna: t.ex. SvK är Sveriges stamnätoperatör, och ENTSO-E koordinerar sådana operatörer över Europa. (För Wikipedia och Desertec länkarna, titta bara översiktligt, för att få ut inom ett fåtal minuter information om senaste teknologier).

Växelström

Mellan olika länder har man mindre och större skillnader i elnätet. Alla länder använder växelström för kundförsörjning och inom det mesta av det högspända elnätet. Växelströmsfrekvensen är antingen 50 Hz (vanligaste) eller 60 Hz (Nordamerika, delar av Sydamerika, halv Japan!). Frekvenserna valdes för cirka 100 år sedan, och beror på många faktorer. Roterande maskiner (generatorer, motorer) och transformatorer måste byggas större om driftfrekvensen är *lägre*. Seriereaktanser ($X = j\omega L$) och parallellsusceptanser ($B = 1/X = j\omega C$), i luftledningarna och kablar, blir större vid *högre* frekvenser (ω), vilken ger orsak till mer bortfall av spänning och ström i nätet. Rimliga mekaniska hastigheter för roterande maskiner (generatorer, stora motorer) måste också ha spelat en roll. Man ville klart ha tillräckligt hög frekvens att man inte märkte ändringen i ljusintensitet av en glödlampa under de korta tiderna under en cykel där en växelspanning är nära noll: härifrån får man en lägre gräns.

Det högspända elnätet, från tiotals till flera hundratals kilovolt, är ganska lika i olika länder. Det är alltid '3-fas' (mer beskrivning senare) med 3 ledare som används för effektöverföring. De flesta system i Europa har 400 kV som den högsta nivån. I Nordamerika och Ryssland, samt i andra stora länder som Indien och Kina, har man också en högre nivå på cirka 750 kV. Valet är en optimering av kapitalkostnader (vilka blir högre för isolering vid högre spänning) mot kostnader för de högre förlusterna och de andra nackdelarna av en 'svag' (lägrespänd) förbindelse.

Stora skillnader behövs mellan spänningar i hemmet och i stamnätet. I ett hem måste det vara mycket lätt att isolera spänningen, även hos de många billiga utrustningar som används. Ett fåtal hundra volt har blivit en vanlig spänning: även denna spänning har nackdelen att den är livsfarlig, men den har fördelen att man kan få effekterna som krävs av sådana laster som en vattenkokare eller diskmaskin utan att behöva tjocka sladdar (jämför med de korta tjocka kablarna mellan en 12 V bilbatterie och en startmotor, trots att startmotorn inte drar så stor effekt som en bra vattenkokare). I högre nivåer i nätet, däremot, överförs även tusentals megawatt över hundratals kilometer; det blir viktigt att minska effektförluster i ledarna (I^2R) genom att använda låga strömmar och därför höga spänningar av hundratals *kilovolt*. Transformatorer används för att omvandla effekten mellan olika spänningsnivåer i ett växelströmsystem.

Det kan möjligen vara några 5 transformatorer mellan en stor generator och en slutkund. Stora generatorer har optimalkonstruktion, med hänsyn till isolering, vid 10–30 kV (och mindre generatorer såsom vind- och vågkraft, har ännu mindre optimala spänningar). Från generatoren transformeras effekten upp till (t.ex. för en stor effekt) 400 kV, i stamnätet ('transmission system'). På vägen till kunderna kommer elen från stamnätet genom regions- och lokalnät ('distribution system'), vilka exempelvis kan innebära nivåer av 130 kV, 50 kV, sedan 10 kV upp till några hundra meter från slutkunderna, och sedan till 'vanlig' spänning

av hundratals volt till bostäderna. Definitionen 'lågspänning' (LV) betyder under cirka 1000 V; sedan har man (ibland) en definition av mellanspänning (MV) upp till några tiotals kilovolt, och sedan högspänning (HV) och ännu högre nivåer EHV (ofta inklusive 400 kV) och UHV (t.ex. 750 kV).

Den traditionella bilden var att generatorer alla har stora effekter, såsom 50 MW eller även 1000 MW i extrema fall, i vattenkraft eller kol/kärnkraftverk; dessa kopplas till stamnätet, vilket matar mindre nät ner till kunderna. Många nya förnybara källor består av mindre generatorer: ibland är dessa ihopkopplade i en stor grupp som ger en hög totaleffekt och kopplas därför till stamnätet. I andra fall, såsom små grupper vindturbiner, eller solceller på ett tak, har sådana källor lågeffekt och kopplas därför till nätet vid mellan- eller lågspänning. När många sådana källor används har man möjlighet till en situation som aldrig hade betraktats vid tidpunkten när de flesta elnät byggdes: att man kan få ett effektflöde 'upp' i systemet från lägre till högre spänningsnivåer, i stället för alltid en envägs utspridning av effekt från stamnätet. Den här är bara en av många utmaningar som uppstår vid övergången till olika energikällor.

Varje spänningsnivå brukar ha cirka 1000 A som en typisk markström, och i storleksordning 10 000 A kortslutningsström. Därför är effekten tydligt mindre i en ledning i ett system med lägre spänning: effekten sprids ut, genom att varje transformator från en högre till en lägre spänning delar sin ström till flera av de lägre spännande ledningar. Alla spänningsnivåer bestäms av ett optimalt val mellan kapitalkostnader och driftkostnader (ink. förluster).

Likström

Det finns ett fåtal undantag där likström används för överföring av stora effekter mellan noder i växelströmssystem. Likströmmen omvandlas från och till växelström genom effektelektronik med halvledarebaserade komponenter vilka beter sig som switchar. Dessa ('lite förenklat') kopplar likströmskretsen på olika håll till växelströmskretsen, för att likströmssidan alltid kan ha strömmen eller spänningen i sin bestämda riktning trots att dessa kvantiteter växlas i polaritet på växelströmssidan: . . .

Fördelarna vid HVDC (high-voltage direct current) är många. Den kan förbinda växelströmssystem som inte ens har samma frekvens. Det finns hög styrbarhet, genom styrning av snabba effektelektronikkomponenter vilka bestämmer effektöverföringen.

Det finns en serieinduktans i kablar och luftledningar, och en parallell kapacitans i en kraftkabel (och på mycket mindre nivå i en luftledning): dessa beror på energin i magnetfältet och elfältet när man har (respektive) ström och spänning, och de går inte att undvika. Vid likström kan man betrakta jämnviktsläget, där serieinduktansen försvinner ('kortsluten') och parallellkapacitansen försvinner ('öppet'). I ett växelströmssystem motsvarar dessa kvantiteter induktiv och kapacitiv reaktanser: dessa orsakar, respektive, 'förlust' av spänning längs en kabel eller luftledning när man drar en lastström, och 'läckning' av ström genom kapacitansen mellan ledarna. Det finns även 'strömförträngning' (skin effect) som gör att en växelström flödar mest nära ytan av en ledare, och därför är ledarens resistans lite mer vid växelström (skillnaden beror på frekvensen och material). Ledningar i stamnätet brukar ha många gånger (10 eller mer) så höga serieinduktivreaktans vid 50 Hz jämfört med serieresistansen: man får tydligt en fördel genom minskad serieimpedans (vektorsumman av resistans och reaktans, $Z = R + j\omega L$) om man använder likström där frekvensen och därför reaktansen blir noll. Konsekvensen av reaktanserna är att stora effekter inte kan överföras över så långa avstånd i ett växelströmssystem. Kablar, p.g.a. mycket hög parallellkapacitans (kort avstånd mellan ledarna) är begränsade till en maximallängd i storleksordning 10–100 km vid växelström. Likström undviker sådana begränsningar: stora effekter kan överföras även över tusentals kilometer utan att längden spelar en stor roll, förutom effektförlust i resistansen. Kablar brukade bara behövas under vatten och i innerstäder, men nu är det så svårt att få tillstånd för nybyggnad av stora luftledningar att man ibland väljer att bygga nätet med kablar i marken. Det finns därför flera situationer där likström har en fördel på grund att kablar av betydliga längder behövs. Utveckling av nya kablar med polyethene isolering i stället för papper och högtrycksolja (högre kostnad och ökad miljörisk) även vid hundratals kilovolt har givit ännu mer incitament att använda kablar.

Nackdelar, däremot, måste väl finnas, varför har man annars inte likström överallt? Praktiska roterande generatorer producerar växelström. Transformatorer är viktiga för att tillåta optimala spänningsnivåer på olika nivåer i elnätet: vanliga transformatorer fungerar bara med växelström, och motsvarande dc-dc omvandlare skulle säkert vara dyrare åtminstone i dagsläget (men utvecklingar i effektelektronik bidrar hela tiden till minskade skillnader i sådana jämförelser). Omvandlare mellan ac/dc, såsom mellan olika likspänningar, kostar mycket pengar och tar markplats, och tappar en del av effekten (nu mindre än 1%, men tråkigt om effekten måste gå genom flera omvandlare på sin väg). Det är också svårare att bygga isoleringssystem (t.ex. polymer i en kabel, eller papper och olja i en transformator) för likström, speciellt

när man betraktar situationen där spänning slås på och av (vilken betyder att situationen är transient, inte bara 'likström'). Ett stort problem är när det finns ett kortslutningfel i systemet och man vill koppla bort snabbt bara denna del av systemet utan att störa andra kunder. Ett växelströmsystem drivs med en spänning som regelbundet ändrar sin riktning och därigenom tvingar strömmen genom noll: då är det relativt lätt för en avbrytare att försäkra att strömmen inte börjar gå igen. Men likström tvingar inte sådana 'nollkorsningar' och det blir därför ett mycket svårare jobb för avbrytaren, vilken också måste kunna tvinga strömmen till noll.

Nu har Sverige och Danmark flera länkar under havet med HVDC, till Polen, Tyskland, Norge, Finland, Litauen. Dessa, samt det hela Europeiska stamnätet kan ses på kartan här <https://www.entsoe.eu/publications/grid-maps/>. Det har även beslutats att bygga två överlands HVDC länkar, från närheten av Jönköping över till närheten av Oslo och av Malmö, <http://www.svk.se/Projekt/Samtliga-projekt/Sydvastlanken/Information/>. Fördelen med HVDC här är att man kan använda långa kabelsträckor i marken, som är lättare att få godkända än nya luftledning. I Kina bygger man nu jättestora HVDC system som överför tusentals megawatt tusentals kilometer från vattenkraft områden (sydvästen) till de större städerna (östen) – se http://www.siemens.com/press/en/pressrelease/2010/power_transmission/ept201006090.htm, om ett sådant projekt som kom i drift för tre år sedan; titta på 'Press photo' länken vid slutet av sidan, och beundra storleken på utrustningarna! Större projekt utvecklas även nu av ABB och Siemens – se senaste på denna lista http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_HVDC_projects. I Indien finns det också byggnad av några långa HVDC länkar. I Nordsjön har man redan stora grupper vindturbiner (windfarm, windpark). I dagsläget kan en enda vindturbin ha maximeffekt på cirka 7MW, men detta ökas fortfarande (jämför med 0,07 MW enligt vår kursboks urgammal information, s.497!). Man bygger sådana windfarm med tiotals eller hundratals turbiner, och kan därför generera hundratals megawatt (nuläget) eller tusentals megawatt (under konstruktion) sammanlagt – se första sektionen här http://en.wikipedia.org/wiki/Wind_farm.

Effekten måste överföras från vindturbinerna till landet. HVDC behövs om man har flera tiotals kilometer emellan. Projekt är redan igång där man hämtar effekten från flera turbiner till en 'plattform' i havet, där den omvandlas för att skickas till landet. Det har varit mycket diskussion om ett HVDC elnät under havet för att länka vind- och vågkraft *samt* länderna (DE, DK, UK, NL, BE, NO...) – läs <http://spectrum.ieee.org/energy/the-smarter-grid/europe-plans-a-north-sea-grid>. Det har även funnits diskussion om ett 'supergrid' koncept för att överföra effekt över hela Europa och Nordafrika, kanske med användning av solresurser från Saharaöknen – ta en snabbtitt på <http://www.desertec.org/>.

Observera att, om man ska ha ett nätverk med flera noder där effekten går in eller ut (till skillnad från vanliga HVDC länkar i drift där man ansluter mellan bara två eller ibland tre noder i växelströmsystem) så måste man ha en relativt nyutvecklad teknologi av HVDC omvandlare (så kallad 'voltage source converter', VSC) samt strömavbrytare som klarar HVDC. VSC vid så stora effekter, samt med rimligen låga pris och förluster, har bara nyligen blivit aktuella: man behöver ett slags halvledare som kan slå på och av många gånger under en växelströms cykel (valet är för nu en 'IGBT'), till skillnad från den äldre 'tyristor' som kan styras vid påslagning men sedan måste vänta med avstängning tills växelströmmen blir noll. Kommersiellt rimliga IGBT, och konstruktioner av omvandlare (med många IGBT och andra komponenter), har utvecklats de senaste tio år. Bara nyligen har det betraktats som kommersiellt viktigt att ta en HVDC avbrytare till marknaden: se http://www.nyteknik.se/nyheter/energi_miljo/energi/article3577629.ece (men tro inte på påståendet att den här var den enda som behövdes under 100 år för att bygga likströmsnät – moderna omvandlare var det riktiga förhindret, för att man måste kunna byta spänningen mellan stamnätet och mindre nätnivåer). Den äldre teknologin (ibland kallad för line-commutated converter, LCC, eller current-source converter, CSC) med tyristorer används fortfarande i de flesta stora nya projekt med överföring mellan bara två ställen ('point-to-point'). Med hänsyn till utvecklingarna över de senaste tio åren kan man förvänta sig att VSC någon gång kommer att bli ekonomiskt bättre i alla situationer.

Lägre spänningar: Slutkunder

Kunderna av elnätet tar sin el som växelström (låt inte det föregående sektionen ge intrycket att HVDC är en stor del av dagens elnät: jämför lik- och växelström på ENTSO-E kartan!). Ett fåtal elkunder i stor industri får elförsörjning med högspänning: 10 kV är relativt vanlig, och även 130 kV för mycket stora laster.

Skillnaderna mellan länder är större när det gäller försörjning till slutkunder på lågnivå, t.ex. bostäder. Här brukar länder med 60 Hz använda cirka 120 V som standardspänning som man skulle få från ett

vägguttag. Länder med 50 Hz brukar använda närmare 230 V (brukade kallas för 220 V i det mesta av Europa, 240 V UK, Australien m.m., ibland 250 V i Indien; men nu försöker man standardisera mer).

Skillnaderna handlar inte endast om spänningen 'till vägguttaget' utan också om hur strömmen kommer till bostaden: (minst) tre metoder kan identifieras:

S3. I Sverige, Tyskland och några andra länder i Europa brukar elförsörjningen ske genom 4 ledningar till varje bostad. En ledning är jordad, och kallas för noll eller 'neutral'. De andra tre har alla en sinusformad 50 Hz växelström med 230 V (effektivvärde) relativ till jord: dessa kallas för fasledarna. Men spänningarna mellan dessa ledare är *inte* noll! Långt ifrån det – spänningarna är 400 V mellan varje kombination av två fasledare! Och hur kan detta vara? Fasset spänningarna har alla 230 V som effektivvärde, och alla är på 50 Hz, men alla har olika fasvinklar. Det finns en 120° fasförskjutning mellan alla fasledarnas spänningar. Detta kallas för ett 'trefas system' och blir ämnet för slutet av kursen. Det är typiskt att säkringarna vid ingången till en bostad är 20 A (d.v.s. max 20 A effektivvärde av ström är förväntad för var och en av de 3 faser). Låt oss kalla denna metod för S3, för att den använder 3 ledare förutom noll-ledaren.

S1 I många länder kopplar man varje enskild bostad till bara en fas och noll, trots att man ofta ha ett 'trefas plus neutral' (3p-n) system ut på gatan. Större laster som företag kan däremot få anslutning till alla tre faser. Detta är vanligt i Storbritannien och Frankrike, samt många andra länder runt om i världen. Därigenom får man en enkel 230 V försörjning mellan två ledare, av vilka en är jordad. Säkringen på fasledaren på ingången till en bostad är typiskt 100 A. Låt oss kalla denna metod för S1, utan att behöva förklara.

S2 I länder med 120 V standardspänning brukar man ha en transformator för nästan varje bostad. Detta kan bero på att dessa länder brukar ha relativt stora bostäder med stora avstånd emellan och hög elkonsumention, men också på att en lägre spänning kräver tjockare ledare för samma effektöverföring, och därför kan man inte så lätt sätta transformatorn 'på den andra änden av gatan' utan orimligt stora kablar. Med så många transformatorer, blir det en fördel att minska kostnaden genom att bara ha en högspänd ledare in till varje. Därför matar man varje transformator på slutkundnivån med bara en fas från ett trefas-plus-neutral mellanspänningssystem (typiskt 13,8 kV). Fördelen är att transformatorn har bara en högspänd ledare som går in: den andra ledaren i den högspända kretsen är noll-ledaren, vilken är jordad). Därför får man bara en fas från transformatorns lågspänningsledning. Men man kan få några av fördelarna av ett 'polyfas' system genom att ha två lågspända (120 V) lindningar i transformatorn, och att koppla dem så att en ände av varje är kopplade till varandra och jordad (noll-ledare) och de andra två änderna har motsatt fasvinkel. Därför får man 240 V mellan dessa två ledare. Man försörjer varje bostad med 3 ledare: nollan, plus två andra 'fas' (ibland kallad för 'hot-wires', d.v.s. med spänning relativ till jord). Sedan kan man ansluta en del utrustningar mellan en 'fas' och neutral, och andra mellan den andra fas och neutral: har man lika last på båda faser, så blir summan av dessa strömmar noll i neutralledaren. Man kan också ansluta stora laster direkt till 240 V mellan de två fasledare. I detta system brukar man ha en 100 A säkring på båda inkommande fasledningar, och man tenderar även till 200 A i nya installationer. Man kan se här <http://www.youtube.com/watch?v=ANK--5Fu518> hur enkel konstruktionen av en Nordamerikansk distributionstransformator är (bara om intresserad av hårdvaran).

Uppgifter

Här, till skillnad från resten av kursen, jobbar vi med numeriska lösningar för att få en känsla för storlekerna. Det går bra att använda dator/räknare för beräkning, så länge du visar lite algebra som tydliggör din väg till lösningen. Obs att varje delsvar är ganska lätt att beräkna då man inte är tvungen att hantera komplexa beräkningar manuellt. Rita diagram för att visa vad du försöker beräkna.

1)

Här tar vi en förenklad jämförelse av växelström och likström i en ledning: växelströmmen betraktas utan hänsyn till '3-fas system'.

Betrakta en enkel luftledning som består av 2 ledare. Isoleringen tål maximalt 300 kV mellan ledarna: om vi använder växelström så är detta värde ett toppvärde, eftersom risken för elektrisk överslag i luften mest beror på toppvärdet. Ledarna tålar maximalt 2000 A ström: detta är effektivvärdet, eftersom gränsen handlar om uppvärmning av ledaren.

Serieresistansen är $R = 30 \text{ m}\Omega/\text{km}$, och serieinduktansen är $L = 1 \text{ mH}/\text{km}$. Parallellkapacitansen ska för tillfället försummas, för att förenkla problemet: detta är inte orimligt då beräkningarna handlar om en sådan kort luftledning och en hög lastström.

Ledningen är 50 km lång. Från en ände matas ledningen från en 'styv spänningskälla', på andra ord en ideal spänningskälla. På den andra änden kan man ta ut effekt till 'laster'.

a) Betrakta fallet där spänningskällan är likspänning med den högsta tillåtna spänningen för ledningen. En last kopplas vid den andra sidan: lasten väljs sådant att den drar den högsta tillåtna strömmen genom ledningen.

- i) Vilken last (resistans) är det?
- ii) Vilken effekt går in från källan?
- iii) Vilken effekt kommer ut till lasten?

b) Betrakta nu fallet där källan ger 50 Hz växelspanning med det högsta tillåtna värdet. En last är kopplad för att dra den högsta effekt som den kan få, med hänsyn till den högsta tillåtna strömmen i ledningen.

- i) Vilken last (impedans) är det?
- ii) Vilken komplexeffekt går in från källan?
- iii) Vilken spänning (amplitud, fas relativ källan) är det över lasten?
- iv) Vilken komplexeffekt kommer ut till lasten?

c) Upprepa b), men sök nu efter maximeffekt utan hänsyn till att begränsa strömmen i ledningen (nu är den en klassisk 'maxeffekt' fråga).

d) Det är sannolikt att den mesta effekten genom stamnätet kommer att användas vid lågspänningsnivån, efter att ha gått genom flera transformatorer. Låt oss exemplifiera fördelen av överföring vid högspänning: tänk om man började med en spänningskälla av effektivvärde bara 200 V (50 Hz), och hade samma ledning som förut, med strömgränsen 2000 A.

i) Anta att hela 2000 A går in till ledningen från källan, med samma fasvinkel som källans spänning har (därför att en aktiveffekt går från källan till ledningen, och ingen reaktiveffekt går in). Vad är komplexeffekten som går in till ledningen från källan i detta fall?

ii) Vilken ström kommer ut vid den andra änden av ledningen? (lättsva!)

iii) Vad måste då spänningen (amplitud, fas relativ källan) vara på den andra änden av ledningen? Hur stor är spänning över ledningens impedans?

iv) Vilken komplex effekt kommer ut från den andra änden av ledningen?

v) Svaret till iv) verkar förmodligen konstigt: vad betyder det? Tänk på vilken spänning det skulle krävas hos källan för att även tvinga 2000 A genom ledningen till en kortsluten last. Skulle situationen beskriven i detta deltal (d) kunna hända med passivlast?

e) Nu betraktas situationen där man tar hänsyn till en parallellkapacitans av $C = 10 \text{ nF/km}$. Beräkna kapacitansen för den hela ledningen, sedan modellera den genom att dela denna kapacitans mellan två kondensatorer: en kapacitans på $lC/2$ (där l är ledningens längd) på varje ände av ledningen. Den här är tydligt en förenklad modell, då kapacitansen, induktansen och resistansen i verklighet är distribuerade över hela längden: denna 'pi' (Π) modell används ofta för 'mellankorta ledningar' där kapacitansen inte kan försummas men är ganska väl approximerad i två bitar! I vårt fall är luftledningens kapacitans liten (den drar en liten andel av strömmen som ledningen försörjer till lasten) men kapacitansen blir viktigare när vi kommer till del iii) om en kabel vilken har mycket högre kapacitans.

i) Lös b)iii) igen, med samma lastimpedans, men nu med en parallellkopplade kondensator vilken modellerar halv av ledningens kapacitans.

ii) Lös igen för spänningen på laständan, nu med lasten bortkopplade och därför bara kondensatorn ansluten (situationen när ledningen är i tomgång).

iii) Lös igen för ii), men nu med parametrar som motsvarar en kabel: som en bra approximation, halvera R och L värden och multiplicera C med 30.

2)

En ac-dc omvandlare ger inte en perfekt sinusformad ström på växelströmssidan. Man kan använda en fourierserie för att betrakta den periodisk (50 Hz) men inte sinusformade signalen som en summa av sinusformade signaler med frekvenser på 50 Hz, 100 Hz, 150 Hz, o.s.v. — en grundton och övertoner. Konstruktionen av en CSC omvandlare gör att den första betydliga övertonen är den 11:e, d.v.s. 11 gånger 50 Hz. Övertonerna i strömmen orsakar övertoner i spänningen (tänk på att man kan betrakta nätverket som en Théveninekvivalent, och omvandlaren som en strömkälla med flera växelströmsfrekvenser, och använda superposition för att analysera varje frekvens på en gång). Man bygger stora filter för att minska övertonerna som går ut i nätet, för att de kan orsaka ökad uppvärmning av komponenter och störning av andra kretsar.

Nu har du en uppgift. En kapacitans C och induktans L ska seriekopplas och anslutas mellan en fasledare och jord i ett 50 Hz system med 130 kV mellan fas och jord (låt detta vara effektivvärdet, vilket är vanligt för specifikationer inom elkraftämnet). De två komponenterna skapar ett filter som ger lågimpedans till den 11:e övertonen (därför kommer övertonsströmmar att gå till jord genom filtret, i stället för ut på nätet). Vid 50 Hz ska filtret ha ett absolutvärde av impedans lika med $5\text{ k}\Omega$. Observera att i verklighet skulle man också ha en serieresistans, av olika skäl!

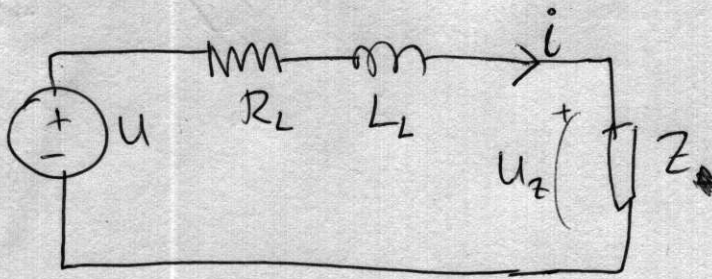
- a) Bestäm C och L för att uppfylla kraven. Ledning: du behöver att totalimpedansen är minskad vid 11:e övertonen, och ett bestämd absolutbelopp vid grundtonen (50 Hz). Två ekvationer, två fria variabler.
- b) Vilken reaktiveffekt drar filtret från ledarna vid 50 Hz 130 kV? Vilken aktiveffekt?
- c) Vilken impedans har detta filter vid 11:e övertonen?
- d) Vilken impedans har filtret vid 11:e övertonen om systemfrekvensen är lite högre än vanligt: 50,05 Hz?
- e) Vilket slags filter är detta, med hänsyn till vilka frekvenser av ström som det släpper genom sig? (Släpper det mest höga frekvenser, eller mest låga, eller en viss band, ...?). (För intressens skull: från nätperspektivet är det tvärtom — frekvenserna som släpps 'till jord' genom filtret är frekvenserna som inte går ut på nätet.)

3)

Nu betraktas lågspända nät från olika länder.

- a) För varje av de tre beskrivna metoderna (S1, S2, S3), rita ett kretsdiagram som visar ledarna som kommer in till en bostad, och spänningskällor vilka modellerar nätets spänningar. Tänk på att man i varje fall har en noll (neutral) ledare som kan användas som referenspotential.
- b) Med hänsyn till de angivna värdena av typiska spänningar, maxströmmar (säkringar) och antal faser, beräkna för varje av de tre beskrivna metoderna den maximala effekten man kan dra till en bostad. Det är enklast att betrakta summan av effekter från varje enskild fas med referens till noll-ledaren. (För intressens skull: en säkring kan egentligen bära typiskt några tiotals procent mer än 'markströmmen' under flera minuter innan det slår av: man brukar ange strömmen som får gå kontinuerligt. Här i talet använder vi bara markströmmen utan att tänka på vad man skulle kunna göra under en kort tid av överbelastning.)
- c) I ett 'typ S1' system har man en last på 3 kW ($\text{pf}=1$) och en på 5 kVA ($\text{pf}=0,8$ lagging [induktiv]). Vad har man för strömmen (amplitud, fas) från källan i fasledaren, och strömmen tillbaka i noll-ledaren?
- d) I ett 'typ S2' system har man en last på 3 kW ($\text{pf}=1$) från en 'fas' till noll, och en last på 5 kVA ($\text{pf}=0,8$ lagging) från den andra 'fas' till noll. Vad har man för strömmen (amplitud, fas) från källan i de två 'fasledarna' (hot wires – inte verkligen 'faser' i 3-fas meningen) och tillbaka i noll-ledaren?
- e) I ett 'typ S3' system har man identiska laster på 3 kW ($\text{pf}=1$) kopplade från varje fas till noll. Vad har man för strömmen (amplitud, fas) från källan i fasledarna och tillbaka i noll-ledaren?
- f) Gör e) igen, med 3 kVA last mellan varje fas och noll, *men* nu är det rent resistiv last på en fas, rent kapacitiv på en annan, och rent induktiv på den tredje.

① The circuit can be defined like this:



NOTE: it is not a problem if you have defined the per-km values as being per-conductor per-kilometre (we accept either)

$$R_L = 30 \text{ m}\Omega/\text{km} \times 50 \text{ km} = 1.5 \Omega$$

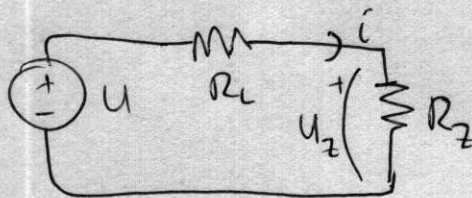
$$L_L = 1 \text{ mH}/\text{km} \times 50 \text{ km} = 50 \text{ mH}$$

$$\therefore X_L = j\omega L_L = j15.7 \Omega$$

Valid iff using sinusoidal steady-state analysis - "jw method"

$$\text{if } \omega = 2\pi \times 50 \text{ Hz} = 314 \text{ rad/s}$$

② dc steady state: inductance \rightarrow short circuit

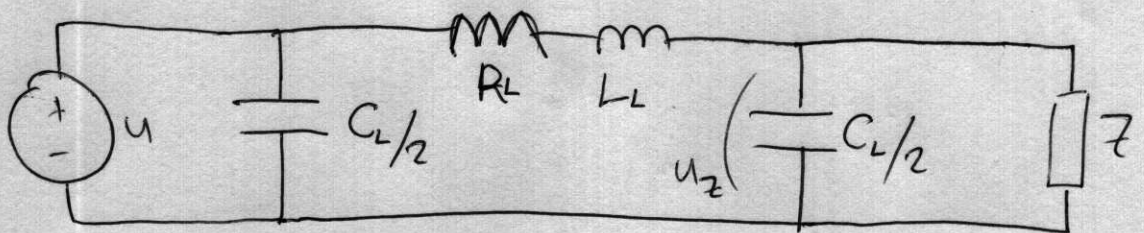


Z is pure resistance ("impedance" & "reactance" have no meaning except in ac analysis)

③ } similar to the top diagram, above, with $X_L = j15.7 \Omega$

④ }

⑤



$$C_L = 10 \text{ nF}/\text{km} \times 50 \text{ km} = 500 \text{ nF}$$

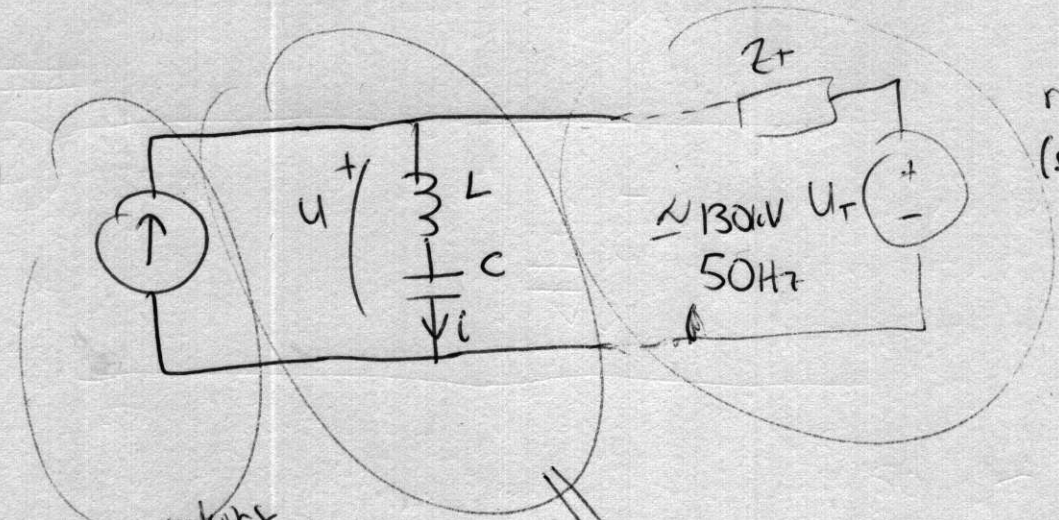
$$C_L/2 = 250 \text{ nF}$$

$$X_C = \frac{1}{j\omega C_L} = j6.4 \text{ k}\Omega \quad (\text{total for the line})$$

$$2X_C = j12.8 \text{ k}\Omega \quad (\text{for a single } "C_L/2")$$

1) e) do same calculation but with new parameters. R, L, C for part iii compared to part ii)

2)



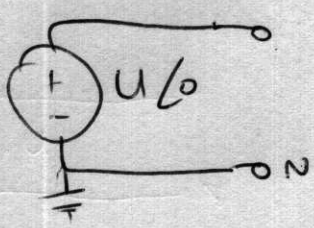
rest of system (seen as Thevenin equivalent)

converter, taking current at 50Hz and some harmonics ("overton") esp. 11, 13, 23, 25, ...

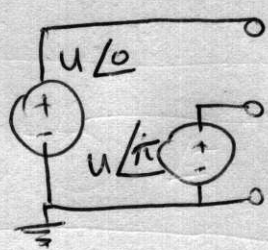
This is the part being studied. We want to make this branch very easy (low impedance) for the harmonic that we wish to remove.

3) a)

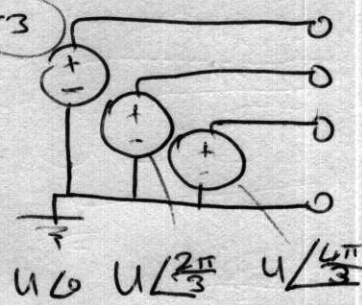
S1



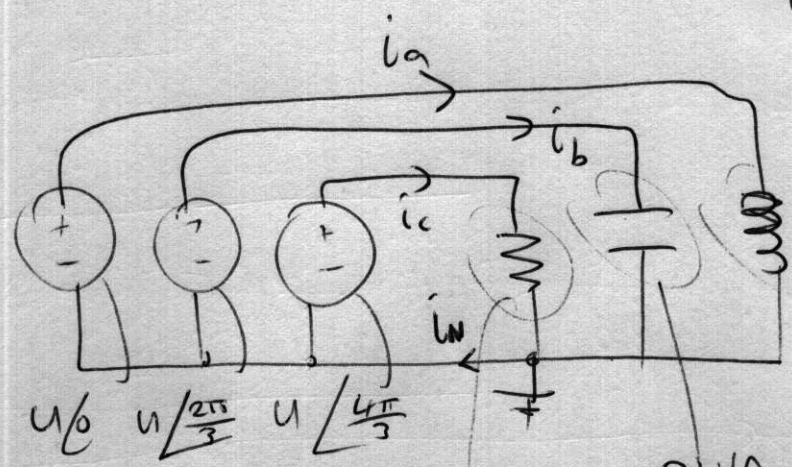
S2



S3



2.5) f)



3kVA (PF=0 lagging) [inductive]

3kVA (PF=0 leading) [capacitive]

3kW

EI1120 Elkretsanalys (CENMI), LÖSNINGAR till Hemuppgift 3/4.

Redovisning med kamraträttning 2013-02-22, kl 11–12 (efter övningen 09–11).

In English to help assistants *and* help me write quickly. Sorry! The basic answers could fit into a couple of pages; extra explanation has been included, much of it in footnotes, for those who are interested.

This has been done quite quickly: I hope there's nothing wrong, but if there is I'll very pleased to be told of it.

Many of the equations are shown in Octave / Matlab syntax, including the numerical answer after them. I hope this makes it clear how, in reality (when one can use a computer), using complex numbers for ac circuit analysis is often no harder than doing dc analysis.

When doing calculations like this, it's good to keep such commands in a file, with comments, so that if you want to do a similar analysis with different numbers it's easy just to copy, edit and re-run; or if you think there's an error in the solution, you can look through every step and find what the error was.

Notice how we often just write voltages and currents as phasors, without ever needing to think about time-domain waveforms and converting from time to frequency: we often do all the work in the “frequency domain”. We just define some quantity as the reference phase (set to zero), then the phase-angle of everything else is relative to that. Calculation of powers should of course not depend on the absolute value of phase, but only on relative phase between voltages and currents: that is why we use the conjugate when calculating $S = UI^*$.

Glossary/translations:

conductor = *ledare* : individual metal wire (or bundle of wires not insulated from each other)

line = *ledning* : transmission-line, transmissionsledning, consisting of two or more conductors with voltages between them.

Nathaniel Taylor, feb 2013

1) We have a “line” of two conductors, modelled with just the series resistance and inductance. The intention was that the entire line has the given resistance and inductance per kilometre, i.e. this includes the contribution from both *conductors*.¹ Some people may have doubled these values, assuming them to be per-conductor: that's fine, and the solutions can easily be worked out by following the same lines of program-code, but changing the input data.

Let us define the total² resistance and capacitance of the line, using the subscript ‘l’³

```
l = 50;           % 50 km length
Rl = l * 30e-3;   % total series resistance of line
Ll = l * 1e-3;   % total series inductance of line
```

While we have a simple loop-circuit without parallel capacitance, the current is the same in source, line and load: we shall call this current ‘I’. Because we’re using the variables mainly in computer code, we’ll not always bother about writing variables as nice italic maths symbols like *I*.

a) DC. Highest permitted loading (voltage and current).

For dc, the max value equals the rms (effective) and the mean! So we can apply a dc voltage of $U = 300\text{kV}$ at the source, and can allow a dc current of $I = 2\text{kA}$ to flow in the line.

We are interested in the steady-state dc behaviour (jämviktsläge), not the transients if we had just connected the line (note that the Ll/Rl time-constant is about 30ms, so the transient would decay after a few 50 Hz cycles.

i) Find the load resistance R_z to give the above situation ($I = 2\text{kA}$, $U = 300\text{kV}$).

¹ It is normal to specify the values for the whole line: we don't usually care so much about the potentials of the conductors compared to a “ground reference”, but just about the voltage between the line's conductors: in that case, all the series resistance and inductance from both conductors can be put into one resistor and inductor in the model. Sometimes, of course, we do also care about potential relative to the earth, for insulation reasons. Note also that defining the inductance of a single conductor doesn't have a clear meaning: the inductance depends on both the conductors and the space between them. (Resistance is simpler.)

² Note: it's rather sloppy of me to have written “ $R = 30\text{mohm/km}$ ”. Better to find another symbol, like R' , as the quantity is a per-km resistance so doesn't even have dimension ‘ohm’.

³ Nomenclature is annoying here: we'd like a good subscript for the line and for the load, but both start with ‘l’, in Swedish and English. And we can't call the line parameters just ‘R’ and ‘L’, as I've already stupidly used these for per-km values. Hence the choice of ‘z’ for the load, and ‘l’ for the line. The source-quantities (U , I) are without subscript.

```
U = 300e3;
I = 2e3;
```

Several ways are possible. Probably the shortest is to calculate total resistance needed (U/I) then remove the resistance already given by the line:

```
Rz = U/I - Rl
--> 148.5 ohm
```

ii) The power in from the source is simply

```
P = U * I
--> 600 MW
```

We have to be careful about checking the active convention; but here, we know what to expect, and should immediately see that there is an error if we found the the only source in the circuit is *consuming* 600 MW!

iii) Power in to the load (i.e. the above, minus the loss in the line). We can't immediately do $U_z * I$, because we don't know U_z . Quickest is surely

```
Pz = I^2 * Rz
--> 594 MW
```

We could have got the same by calculating voltage first, then power.

b) Now the source is AC, 50Hz. Again, we push the source-voltage to its upper limit, to give the highest power we can get.

Let us choose to work with rms (effective) values of voltage and current. This is absolutely the standard way of working, within the subject-area of electric power.

The line's voltage limit restricts us to a *peak* voltage of 300 kV. Thus the rms voltage we can apply is only $300/\sqrt{2}$ kV = 212 kV.⁴

```
U = 300e3/sqrt(2)
--> 212 kV (rms)
```

We define also the angular frequency as a useful variable, and calculate the line's total inductive reactance.

```
w = 2*pi*50; % angular frequency
--> 314.15 rad/s
Xl = j*w*Ll; % series inductive reactance of line
--> 15.7j ohm
```

Note that it's quite normal – more normal – in power systems work to say that 'X' refers just to the magnitude of a reactance. Thus one would write $Z = R + jX$. In this course we are taking the definition where X already includes the imaginary unit: that's a bit easier to use when we want the algebra to take care of our signs without us having to think about it!

i) Choose a load impedance that maximises the load's absorbed power (active power, also known as real power) while keeping within the line's current-limit.

⁴ Actually, we might also have to consider that when there is no load connected, and the line actually has some parallel capacitance (which we have ignored so far) then the voltage at the load end will be higher than at the source, due to the series L-C circuit that this forms. This is sometimes called the Ferranti effect, and is a serious issue for power system operators with very long lines (e.g. Sweden from north to south) or extensive ac cable-networks (e.g. London). But we'll ignore that here, and assume we can apply exactly a peak value of 300 kV at the source. Even when we do include some capacitance we will be assuming that it all comes in two 'lumps', while in reality it and the series inductance are distributed evenly over the whole length of the line, and can only properly be treated by a differential equation as a function of position along the line! See the "transmission line equations" or "telegrapher's equations" (in frequency domain) in any common textbook on electromagnetic fields.

This could be done by writing an equation for load power in terms of load impedance, line impedance and source voltage, then maximising with respect to the (complex) load impedance. In the following, we instead work in a more physical way, to see what the solution must be.⁵

In our case, the line's max current only loses a small proportion of the source voltage in the line, so most of the power goes to the load. We therefore are not anywhere near the situation of theoretical 'maximum power', so our power is increased when we *decrease* the resistance. We therefore want to make the current be its maximum permitted value, of 2 kA, to make the power as high as possible.

But we also can put a reactive part in the load impedance, and we increase the power if we choose this reactive part to "cancel" the line's reactance: that's because the cancelling means that more of the source voltage can be across the resistive part of the load, and thus more power is given, when the current is fixed.⁶

Choose the load's reactance to cancel the line reactance, so that as much as possible of the source voltage can be across the resistance part of the load (maximising the power, given the limited current). Hence

$$\begin{aligned} X_z &= -X_l \\ &\rightarrow -15.7j \text{ ohm} \end{aligned}$$

This is possible with a series capacitance C such that has capacitive reactance $X_c = 1/(j\omega C)$ equal to $-X_l$. i.e. $C = 1/(\omega^2 L)$. Note that this is the condition for series resonance of the line and load, but there is also a lot of series resistance so we don't see a big effect of resonance. Then problem then becomes like the dc case, because all the capacitance and inductance in the circuit cancel each other. Hence, choose a load resistance

$$\begin{aligned} I &= 2e3; \\ R_z &= U/I - R_l \\ &\rightarrow 104.6 \text{ ohm} \end{aligned}$$

The total load impedance is thus

$$Z = 104.6 - 15.7j$$

ii) The complex power in from the source.

We can see this should be purely active power – no imaginary part. This is because we know the load and line cancel each other's reactances (series resonance). But let's calculate fully, as if we didn't know anything in advance. The voltage of the source is U : this is used as the reference phase-angle, so it is set to zero phase. The current, which is the same all around this circuit, is

$$\begin{aligned} I &= U / (R_l + X_l + R_z + X_z) \\ &\rightarrow 2000 + j0 \quad (\text{quelle surprise!}) \\ S &= U * \text{conj}(I); \\ &\rightarrow 424 + j0 \text{ MVA} \quad \text{i.e. } 424 \text{ MW.} \end{aligned}$$

⁵ In the general case of this type of problem ("maximise the power in a load-impedance fed from a Thevenin-type source [our ideal source and line-impedance], subject to a current-magnitude limit") we would have to *be more careful*. That's because if the source impedance is so big that our maximum permitted current would cause a significant part of the source voltage to drop in the Thevenin impedance (i.e. the line's $R_l + jX_l$), then we may have reached the point where we get a *higher* power by *decreasing* the current, because the decreased current increases the voltage remaining at the load, and the load power depends on voltage and current (as well as their relative phase). This possibility of a change in resistance either increasing or decreasing the power, depending on the source impedance, is why there exists a 'maximum-power point'. At that special value of resistance, the power delivered becomes less if the resistance is made either more or less: making the resistance lower makes the voltage across it lower more quickly than it makes the current higher ... making the resistance higher makes the current through it lower quicker than it makes the voltage across it higher...!

In a typical high-voltage line, with an impedance that is mainly inductive reactance (like our case where $X_l \gg R_l$) the maximum power to a purely resistive load is at $|U_z| = U/\sqrt{2}$, which is in contrast to the case of a purely resistive line or a dc circuit, where maximum power is when $|U_z| = |U|/2$.

⁶ This may sound strange: surely, if current is fixed at 2 kA, then the power to a resistor is fixed too? Yes: but if we cancel the line impedance, then we have to choose a higher value of load resistance to ensure that the current stays at just 2 kA ... hence the higher power in the resistor.

My apologies go to one student whom I must have misled about this on Wednesday morning! I agreed then that the load would best be purely resistive in order to extract the maximum power: I only realised when making the solutions, that there was this further little complication.

iii) The voltage across the load, U_z , with phase relative to the source voltage.

We've already started using the source as the phase-reference, so this just needs us to calculate the load voltage, and its phase will immediately give us the phase relative to the source voltage.

```
Uz = U - I*(Rl+Xl)
--> 209 - 31j kV
Let's get that in polar form:
abs(Uz), angle(Uz)*180/pi
--> 211.5 kV at -8.5degrees
```

iv) Complex power into the load.

Easy, as long as we use the right convention...

```
Sz = Uz * conj(I)
--> 418 - 63j MVA
```

I.e. it consumes 418 MW and provides 63 MVA.⁷ We understand what it means that active power is consumed (is positive, using passive convention): it means that on average, over each cycle, there is energy moving in from the circuit to the load. That is always the case with a resistor that has a current in it. But we also say that “reactive power is supplied from the load”; this is about convention rather than an energy-based physical significance⁸

Note that when dealing with nasty equations one can play with numerical-guesses methods to get a feel for how the solution depends on the various controllable variables.

So here's a numerical-guesses way to play with maximising power: we can make some guesses at a good range of resistance and reactance, then get a computer to calculate for thousands of points and plot them as a surface plot (function of two variables, R and X). We can easily update our guesses if we appear to be in the wrong range. It's not very necessary here, where we instead can use logic or calculus to find the right value: but it's useful in more complex problems. Learning little programming examples can be as useful as learning 'normal' maths!

```
% unconstrained by maximum current of line
>> R=[1:1:15, 20:5:60]; X=-100:5:100; P=[];
>> for n=1:length(R), for m=1:length(X), ...
    I = U/(Rl+R(n) + 1j*(w*Ll+X(m))); P(n,m) = abs(I)^2*R(n); ...
end; end
>> surf(X,R,P);
% constrained (remove points where R & X combination gave current over 2kA)
>> R=10:10:400; X=-300:10:300; P=[];
>>for n=1:length(R), for m=1:length(X), ...
    I = U/(Rl+R(n) + 1j*(w*Ll+X(m))); ...
    if abs(I)>2e3; P(n,m)=NaN; else P(n,m)=abs(I)^2*R(n); end; ...
end; end
>> surf(X,R,P);
>> xlabel('load resistance [ohm]');
>> ylabel('load reactance [ohm] (negative->capacitive)');
```

c) Repeat the above (b) but without having any limit to line-current.

i) Choose a load-impedance to maximise the load-power. This is a classic 'textbook case' of maximum power. Seen from the load, the supply is the ideal source, and in series with it the impedance of the line,

⁷New unit: VAR or VA_r or just "var": it's short-hand for "volt-amp reactive", meaning a volt*amp product that is *not* active power. One typically writes W (watt) for active power, VAR for reactive power, and VA for complex power, which is also known as apparent power, sometimes when taken as magnitude.

⁸ Why *minus* 63 MVA reactive? The load has been chosen to be capacitive, and we have a convention that an inductor 'consumes' reactive power and a capacitor 'supplies' reactive power. This has no fundamental meaning like producing and consuming active power: the difference with capacitors and inductors is only where in the ac cycle they take in and give out energy – they do it at the opposite times. However, typical power system loads like motors and transformers tend to be inductive, and generators (and capacitors) tend to be the main things that could have reactive powers that do the opposite of the ones in the loads. One therefore associates loads with lagging reactive power (current lagging voltage, as in an inductor) and defines this type of reactive power as a “consumption” to match with the consumption of real power in a load.

```
Z1 = R1 + X1
--> 1.5 + 15.7j ohm
```

This is directly a Thevenin source.

Power to the load Z is maximised when $Z = Z_1^*$:

```
Z = conj(Z1)
--> 1.5 - 15.7j ohm
```

which means that the load is like a resistance equal to the line resistance, and a series capacitance that gives a reactance of -15.7j ohm (as in (b)).

ii) Complex power from the source:

```
S = U * conj( U / ( Z1 + Z ) )
--> 15 GW (!!)
```

This, of course, is absurd: it's the normal load taken by the power system across all of Sweden. The current in the line is 70 kA, which would heat the line 1250 times as much as the maximum rating (remember: I^2 !). More importantly, any realistic generator would have significant internal impedance when compared to this tiny line-resistance, and would also be incapable of producing a power above its normal rating because the turbine driving it will give limited mechanical input-power.

iii) Voltage across the load.

Let's do a voltage-divider equation here:

```
Uz = U * Z / ( Z + Z1 )
--> 106 - 1111j kV
abs(Uz), angle(Uz)*180/pi
--> 1.116 MV at -85 degrees
```

Wow! Isn't that wrong? How can we have 1116 kV in a system driven by a 212 kV supply (remember: we used rms values as input, so even the 1116 kV is rms: the peak is 1578!) ? We've certainly exceeded the voltage limit as well as the current limit! It *is* a reasonable result, given the circuit that we've analysed. We had a line that was mainly reactive: it had about 10 times as high inductive reactance as resistance. We chose a load that would cancel (by series resonance) the line's inductive reactance. That means the voltages across the load's capacitive reactance and the line's inductive reactance are 'in antiphase': they cancel. The actual levels of these voltages can be very large, because they are proportional to current, and the current is being limited only by the relatively small resistances.

But don't let this make you believe that power systems always operate very very far from the theoretical 'maximum power'. Our cases had highly artificial capacitive loads, and very short lines, resulting in extreme currents, extreme powers, and ludicrous overvoltages. When the loads are slightly inductive instead of capacitive (they usually are!), and the lines are hundreds of kilometres long (they often are), one can much much more easily approach the situation where adding load (decreasing the total load resistance) actually decreases the total power transfer, because the voltage is falling faster than the in-phase current is rising. This is part of the subject known as 'voltage instability', and was a relevant to the collapse of part of the Swedish power system in 2003 (and around 1983), and plenty of other cases around the world.

Note that normally a capacitive load would not actually be made of a series resistor and capacitor: that is just a convenient way of representing the load in our case, so that we can add the two values to give the impedance, and can put this in series with the line to give us a single series loop to analyse.⁹

iv) Complex power delivered to the load (from the line).

⁹ Practically, a capacitive load would more likely be a parallel capacitor and resistor. At a *single frequency* any parallel pair of C and R can be replaced with a series pair (with generally different values) that give the same total impedance. But when the frequency changes, the values of one pair would have to be changed in order for the series and parallel case to give the same impedance. In fact, this is true for any combination of any number of R and L and C at one frequency, when they all connect through just two terminals to the rest of the circuit. This can be seen by reducing such a set of components as a Thevenin or Norton equivalent: as there's no voltage or current source, the equivalent source will have zero value, so just its equivalent impedance will be seen: an equivalent impedance is of course a single complex number, and can therefore be represented as a series or parallel combination of just a resistor and either a capacitor or inductor (depending on the sign of the imaginary part of the impedance).

```

Sz = Uz * conj( Uz / Z )
or, the same in a simplified form,
Sz = abs(Uz)^2 / conj(Z)
--> 7.50 - 78.5j GVA

```

So the load consumes 7.5 GW and ‘generates’ 78.5 GW, which must come quite close to the total reactive power generation of generators across Europe!

d) Another silly question, that makes the point about reasonable values (and about the importance of high voltage for transmitting large powers). The line is as before. The voltage source is now just 200 V.

i) We assume the maximum current, 2 kA, enters the line from the source with zero phase-shift (current and voltage have the same angle). Thus, the circuit of line and load looks like a plain resistor. The complex power into the line from the source is thus

```

U = 200;
I = 2000;
S = U * conj(I)
--> 400 kW

```

ii) The circuit we’re looking at is still a simple loop. What current goes into one end of the line must come out at the other end. So $I = 2000$ at the load-end as well, and is the same through the load.

iii) Voltage across the load.

If we know the current through a known impedance, we can calculate the voltage over that impedance. If we know the voltage at one side of the impedance, we can thus calculate the voltage at the other side. The “load voltage” must be

```

Uz = U - I*Zl
--> -2.80 - 31.4j kV
abs(Uz), angle(Uz)*180/pi
--> 31.5 kV at -95 degrees

```

Note: *kilovolts*.

That certainly sounds strange. How can the voltage have become so big? We haven’t talked about what the load even is: could it be giving a resonance? Actually, what we’ve calculated simply shows that with just 200 V at the input of the line, even a short-circuit would not take as much as 2 kA (it would actually give 12.67 A: try U/Z_l). To make such a huge current flow in the line, we’d have to put a big power input at the other end of the line: note that having 2 kA in the 1.5Ω line-resistance would cause 6 MW to be converted to heat in the line! When we fed the line with 212 kV in part (b) we easily forced the current through the line, and still only lost a small part of the total power in the line.¹⁰

iv) The complex power out of the load-end of the line is

```

Sz = Uz * conj(I)
--> -5.6 - 63j MVA

```

That is, the other 5.6 MW goes in from the load-end (as said, the “load” must actually be some sort of source, because 200 V cannot force 2 kA through this line by itself): together with the 400 kW from the 200 V source, this supplies the 6 MW power loss in the line’s resistance. Then a further 63 MVAR goes in, due to moving current through the inductive reactance: this “reactive loss” in the line can also be calculated as $X_l I^2$. No reactive power went in from the 200 V source, because we have fixed the problem to demand that the current and voltage there are in phase. So: see how one can do calculations with a sort of “conservation of reactive power” just as with active power.¹¹

¹⁰ The power-loss in the line is proportional to the *square* of the current. The current is approximately inversely proportional to the voltage, if one has to transfer a given power and can assume that the lost voltage in the line is small compared to the total voltage (not true in our case with 200 V and 2000 A). Thus, a doubling of the voltage is a quartering (1/4) of the power-loss in the line.

¹¹ But “reactive power” can be made even more general, by including cases where voltage and current don’t have the same spectrum (fourier components), such as a computer supply that draws a very non-sinusoidal current from an approximately sinusoidal voltage-source. In that case, there is also a difference between the actual power (mean energy transfer per cycle) and the apparent power (product of rms values of voltage and current), even if there isn’t a phase-shift between the fundamental (‘grundton’) of the voltage and current. With this type of extended form of reactive power, one can’t so easily talk about conservation or define just ‘positive and negative’. Real (active) power, on the other hand, can always have a physical meaning attributed to it.

v) Could a passive load get this high current from a 200 V source through our 50 km line?

This has largely been discussed up in part iii): no, a passive load of R and C and L components couldn't make 2 kA go through the line: even if a C were chosen, to compensate exactly the line's series inductive reactance (series resonance) the current could only be $200 \text{ V} / 1.5 \Omega = 133 \text{ A}$.

e) Now we include parallel¹² capacitance of the line, due to there being two conductors separated by an insulator (that makes a capacitor).

We define the line's total capacitance as

```
C1 = 50 * 10e-9; % 50 km, with 10nF/km capacitance
--> 500 nF
```

The capacitance is included in our circuit using a simple model pi model (Π -model, because the circuit looks like that letter), where half of the total capacitance is placed in a "lump" at each end of the line (a simplification to aid analysis).

i) Based on b)iii) we had a voltage source and load impedance of

```
U = 300e3 / sqrt(2);
Z = 104.6 - 15.7j ; % chosen to maximise load-power given max current=2kA
```

The $C1/2$ now introduced at the load end of the line is clearly connected in parallel to this load. Note that the other $C1/2$, at the source end, can be ignored: it is directly parallel with what we have assumed to be an ideal voltage source. The total impedance at the load end is thus:

```
Zt = 1 / ( 1/Z + j*w*C1/2 )
--> 104 - 1.65j ohms
```

Treating the line-impedance then the load — $C1/2$ combination as a voltage divider, we get:

```
Uz = U * Zt / ( Zl + Zt )
--> 209 - 31.5j kV
abs(Uz), angle(Uz)*180/pi
--> 211.7 kV at -8.6 degrees
```

We note that this is almost exactly the same magnitude as at the source end of the line, but the phase has moved round a bit. It is a tiny amount higher than in b)iii).

ii) Now there's nothing at the load end except that capacitance of $C1/2$. Repeating from part i) above,

```
Zc = 1 / (j*w*C1/2)
--> 0 + 785j kohm
Uz = U * Zc / ( Zc + Zl )
--> 212400 - 25j kV
i.e. 212.4 kV at 0 degrees.
```

So, just slightly more than when the line was loaded with a quite capacitive and resistive load.

iii) Do the above, but with series inductance and resistance halved, and shunt capacitance multiplied by 30, to represent a cable (in the ground or under water).

```
Xl = Xl/2; % very dangerous thing to do in a program script:
          % it will be halved every time we run this line;
          % better to define new variables, but we're lazy
Rl = Rl/2;
Cl = Cl * 30;

Zt = 1 / ( 1/Z + j*w*C1/2 );
Uz = U * Zt / ( Zl + Zt )
--> Uz is 219.4 kV at -9 degrees with the load connected
```

¹²Often the old word "shunt" is used as a synonym for "parallel". Hence "shunt capacitance". I think the word comes from old types of motor-connection.

```

Zc = 1 / (j*w*C1/2);
Uz = U * Zc / ( Zc + Zl )
--> Uz is 220 kV at -0.2 degrees with no load, just the capacitance C1/2

```

What (if anything) is the lesson from all this part e)? One point is that it's easy to do the calculations using simple expressions in a scripting language that supports complex numbers. Another is that control of voltage can be made harder by the high capacitance of a cable.¹³

Some people might have done part e) a bit differently by choosing a *new* load impedance to maximise the power given that there already is a capacitance in the cable. . . the result should then be just the same as in part b). The intention was actually that one should use the load impedance from part b) to calculate a new voltage. But it doesn't matter which way was chosen: we get quite similar results, and the basic principle is the important thing.

2) Here we have components L and C in series, connected to a 130 kV 50 Hz source (rms, ac: one assumes ac means "sinusoidal"), where the source also has some harmonics (higher frequencies) of voltage that are caused by a converter (modelled as a harmonic current-source) injecting harmonic currents into a power system that has a non-zero impedance.

a) We want the impedance of this "load" (or "filter") to be at its lowest when the frequency is the 11th harmonic:

```

w11 = 11*50*2*pi
--> 3456 rad/s.

```

The lowest impedance of a series-connected L and C is at resonance, which is when $\omega = 1/\sqrt{LC}$. In our case, we don't consider any series resistance, so the impedance will be zero at resonance (the currents in L and C are the same, due to series connection, and the voltages across L and C completely cancel). But this relation only fixes the product LC , not the absolute values.¹⁴

However, we also have a requirement that at 50 Hz the impedance should be 5 k Ω . Adding the series-connected reactances, we get an impedance requirement that

$$\left| \omega L - \frac{1}{\omega C} \right| = 5 \times 10^3.$$

Substituting the resonance requirement, that $\omega_{11}^2 = 1/(LC)$, we get

$$L = \frac{5 \times 10^3 \omega}{|\omega^2 - \omega_{11}^2|},$$

from which we can then come back to find C . Hence,

```

w = 2*pi*50
--> 314 rad/s
L = 5e3 * abs( w / ( w^2 - w11^2 ) )
--> 133 mH
C = 1 / (w11^2 * L)
--> 631 nF

```

As a final check, we calculate both impedances at the desired resonance frequency,

¹³Note that a realistic load would be resistive and slightly inductive, so it would tend to cause more voltage drop in the line than we saw here with our capacitive loads: the voltage at the load-end of the cable would therefore be quite different between the no-load value (calculated in e)iii)) and the full load situations.

¹⁴ If we were only bothered about getting the right resonant frequency, we might start thinking about what level of harmonic current we expect to have through our filter (we assume all the 11th harmonic current from the current source modelling the converter will go through our filter, as the filter has zero impedance at that frequency, and the rest of the system has a finite impedance). Then we'd see that if we make L smaller and C larger, we can keep the resonant frequency the same, but have smaller voltages across these components. The dangerous thing about series resonance of very high impedances (very large L or small C) is that the voltage across each of these components can be very high at resonance.


```

1/(j*w11*C)
--> -458j ohm
j*w11*L
--> +458j ohm

```

These are indeed “equal and opposite”, as desired.

b) The impedance at 50 Hz is

```

Z50 = j*w*L + 1/(j*w*C)
--> -5j kohm

```

Ok – we expected the absolute value of 5 kΩ, which was our design requirement. The interesting point is that it’s a capacitive reactance: note the $-j$. This is a general feature of a series resonant circuit when *below* its resonant frequency. The inductor still partially “cancels” the capacitor, but the capacitive reactance dominates.

Thus the reactive power drawn from 130 kV is

```

130e3^2 / conj( Z50 )
--> 3.38 MVar

```

This was chosen in the design of the question, so that the result for having three phases, each with this sort of filter, would be a generation of about 10 MVar at 50 Hz. There is no active power consumption by the filter, as it has only reactive elements (L, C).

c) At the 11th harmonic (ω_{11}) the filter is resonant. A series resonant circuit with no resistance has zero impedance at resonance. Hence, $Z = 0$.

d) If the system frequency is 50.05 Hz, the 11th harmonic is

```

w11_ = 50.05 * 2*pi * 11
--> 3459.2 Hz

```

and the filter impedance is

```

Z11_ = j*w11_*L + 1/(j*w11_*C)
--> +0.91j ohm

```

This impedance is still a totally imaginary quantity: it must be as the filter has only reactive components. It is inductive, as the frequency is now slightly above the resonant frequency that the filter was designed for. It is non-zero, meaning that the filter doesn’t work as well to filter away this slightly altered frequency.¹⁵

e) The filter itself, seen as a “network function” with voltage as input and current as output, is a type of *band-pass* filter. Therefore, as explained in the question, the result when one looks at harmonic currents injected from the converter (as input to a filter) and harmonic voltages appearing on the connection to the power grid (as output), this forms a band-stop filter, as the series-resonant circuit dumps the 11th harmonic-current to ground.

3)

a) This is a diagram-question, as shown in the circuit diagrams in the homework “help” file. For the S2 type of system, the two voltage sources have opposite phase (a shift of 180° in their voltages relative to the neutral conductor). For the S3 type, there are 120° shifts between all the three voltage sources. In the diagram I’ve made the ‘b’ phase be leading the ‘a’ phase. In the calculations below, I’ve made it be lagging, which is generally more common in power systems.¹⁶

¹⁵A power-system frequency will in normal circumstances not vary more than small parts of 1 Hz; deviated by 1 Hz would be an emergency condition. But a real filter’s design would have to consider changes and inaccuracy in component values. It is common to add some resistance to have not too high a “Q-factor” (see course book on second-order filters), leading to a less strong peak but also a broader frequency-range where the filter still has quite low impedance (or high for a parallel resonant circuit) around the peak.

¹⁶As with so many definitions, it doesn’t matter as long as each calculation uses consistent definitions. Note that the “phase sequence” (which order the 3 phases reach their peaks: a,b,c or a,c,b) is important in power systems, as it determines which direction 3-phase motors will turn!

b) Calculate maximum power available from each of the three common types of low-voltage supply. Here we will write kW, assuming that a “unity power-factor” (pf=1) is used. Otherwise we could write kVA, for apparent power.

```
S1: 230V * 100A      = 23 kW
S2: 2 * 120V * 100A = 24 kW (or 48 kW if with 200A fuse!)
S3: 3 * 230 * 20    = 13.8 kW
```

c) Let’s denote the current as I: this is about a simple S1 system where there’s just one wire in (phase conductor) and one out (neutral conductor), so the current is the same in both: current coming in through the phase goes out through the neutral.

```
Stot = 3e3 + 0.8*5e3 + 1j*sqrt(1-0.8^2)*5e3
--> 7 + 3j kVA
```

Note that the PF gives the ratio of P/S (real/apparent power), so $\sqrt{1 - [PF]^2}$ gives the ratio Q/S (reactive/apparent power). We know that lagging power factor on a load means inductive reactive power, which by convention is a positive imaginary quantity. So the current is

```
I = conj( Stot / 230 )
--> 30.4 - 13.0j A (in the phase and back in neutral)
```

d) Let’s call the two ‘phase’ or ‘hot’¹⁷ conductors ‘a’ and ‘b’, and the neutral ‘n’. Let’s define the neutral current as going ‘out’, and the other currents as going ‘in’. Then

```
Ua = 120;
Ia = 3e3 / 120
--> 25 A
```

The other phase is a little more complicated. Note that the voltages we saw before were all real, because they had been chosen as the quantity that defines the phase of all our other complex quantities. Now we are connecting to the other ‘phase’, b, which has its voltage 180° out of phase with the first one (with respect to the neutral), so we can represent it as

```
Ub = -120; % i.e. 120*exp(1j*pi)
Ib = conj( ( 0.8 + 1j*sqrt(1-0.8^2) ) * 5e3 / Ub )
```

Doing this calculation, using the same phase reference as we did for the current in the other wire, means we can simply add these numbers to get the neutral current:

```
In = Ia + Ib
--> -8.3 + 25j A
```

e) Finally, the 3-phase-and-neutral system, S3. With the same terminology as last time, talking of phases a, b and c,

```
Ua = 230;
Ub = 230*exp(-1j*2*pi/3);
Uc = 230*exp(-1j*4*pi/3);
```

Note that one could instead use positive angles: the only thing that matters is that all three phases are 120° apart from each other. The above is, however, the normal way of thinking, where the ‘b-phase’ is the one that comes after the ‘a-phase’ (then the c-phase after that).

```
Ia = 3e3 / Ua
Ib = 3e3 / Ub
Ic = 3e3 / Uc
In = Ia+Ib+Ic
--> 0 A (or at least a very small number due to inaccuracy)
abs([Ia,Ib,Ic,In]), angle([Ia,Ib,Ic,In])*180/pi
13.0A 13.0A 13.0A 0.00
0deg 120deg -120deg -
```

¹⁷Hot in US usage. Conductors with a potential to earth are generally called ‘live’ in UK parlance... but the S2 system is largely US-specific.

f) Let's put the resistive, capacitive and inductive loads onto the a, b and c respectively.

Then

```
Ia = 3e3 / Ua
Ib = conj( -j*3e3 / Ub )
Ic = conj( j*3e3 / Uc )
In = Ia+Ib+Ic
abs([Ia,Ib,Ic,In]), angle([Ia,Ib,Ic,In])*180/pi
13.0    13.0    13.0    35.6
0       -30deg  30deg   0
```

But notice that the result actually depends on how we select which phase the loads go on. If we swap the loads on the b and c phases, we instead get:

```
Ia = 3e3 / Ua
Ib = conj( j*3e3 / Ub )
Ic = conj( -j*3e3 / Uc )
In = Ia+Ib+Ic
abs([Ia,Ib,Ic,In]), angle([Ia,Ib,Ic,In])*180/pi
13.0    13.0    13.0    9.55
0       -150deg -150deg -180deg
```

You can probably understand this better by thinking of phasors, imagining the voltages as three phasors distributed evenly around a circle, and then seeing the currents in one of these being 90 degrees leading its voltage, and the other one 90 degrees lagging. One choice of which leads and which lags will cause the sum of these two currents to be able either to add to or subtract from the current in the other phase (resistive load).