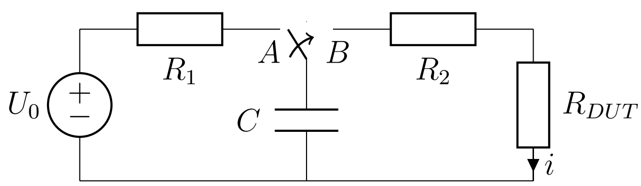
Hemuppgift för EI1110 nr 1 av 4.
Lösningsförslag kommer att publiceras 7/2/2014.

Lärare: Andrés Alayón Glazunov

---

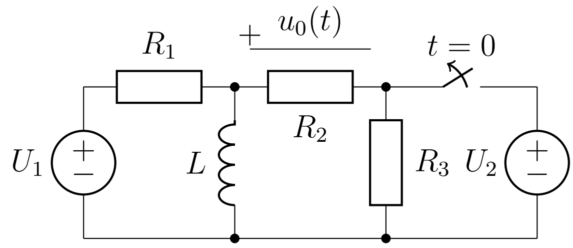
1 av 3) Den amerikanska normen MIL STD 883 rekommenderar kretsen till höger för testning av elektroniska kretsar. Den simulerar den elektrostatiska urladdningen som inträffar när en person, efter en kort promenad på en plastmatta, tar i komponenten. Omkopplaren hålls i läge A i 10 sekunder och kopplas sedan om till läge B. Givet är följande $R_{DUT} = 1.5$ kΩ, $R_1 = 100$ MΩ, $R_2 = 1.5$ kΩ, $C = 100$ pF and $U_0 = 2$ kV.



a) Beräkna maxvärdet för strömmen i.
b) Beräkna den upplagrade energin i kondensatorn vid maxvärdet för strömmen i.
c) Beräkna tidskonstanten för urladdningen.

---

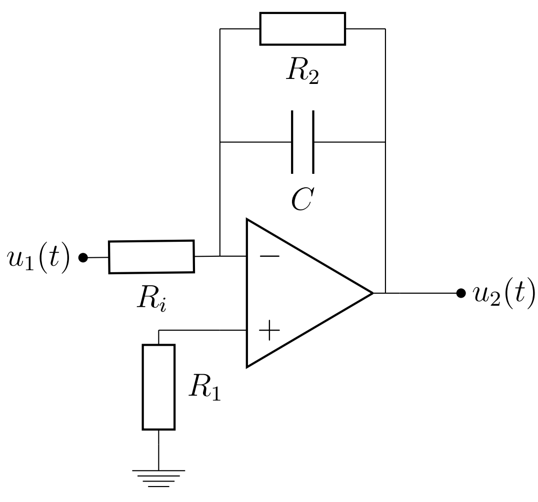
2 av 3) Transienter, inkopplingsförlopp. Här är U_1 och U_2 likströmskällor.



a) Bestäm u_0 och strömmen genom spolen före switchen öppnas.
b) Vad händer efter det att switchen öppnas? Rita om kretsen. Inför lämpliga noder.
c) Bestäm u_0 efter kontakten öppnats. Använd lämpligen nodanalys. Vad är tidskonstanten?
d) Efter en lång stund, dvs $t \gg \tau$, där τ är tidskonstanten för kretsen, är det stationärt tillstånd i kretsen igen. Bestäm u_0. Stämmer detta med gränsvärdet då $t \to \infty$ på det uttrycket av $u_0(t)$ som du fick ovan.
e) Är kretsen stabil? Varför?

---

3 av 3 Kretsen till höger har en godtycklig insignal $u_1(t)$. In och utsignal mäts relativt jorden.

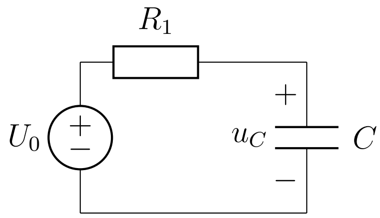


a) Bestäm utsignalen som funktion av $u_1(t)$ och resistanser och kapacitanser.
b) Antag att $R_2C \gg \max(t)$, vilken(vilka) operation(er) utför (approximerar) kretsen på u_1.
c) Byt plats på C och R_i, vilken relation får u_2 i termer av insignal och komponenter?
d) Om R_1 istället var en likspänningskälla U_0 som höjer potentialen i plusingången på op-förstärkaren. Vad händer då med utsignalen i c?

Lösningsförslag till hemuppgift 1 för EI1110 VT 2014

Lärare: Andrés Alayón Glazunov

1a) När switchen befinner sig i läge A ser kretsen ut enligt figuren till höger. Vi har en RC krets med tidskonstant $\tau_1 = R_1 C$. Insättning av angivna värden ger $\tau_1 = 100 \cdot 10^6 \cdot 10^2 \cdot 10^{-12}\ \Omega\text{F} = 10\text{ms}$. Eftersom 10 s är tusen gånger större än 10ms kan vi anta att spänningen som ligger över kapaciansen när man slår till läge B är lika med U_0 .

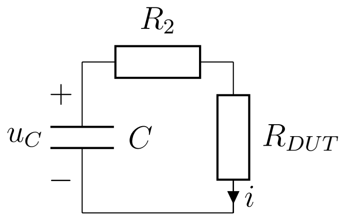


Detta kan vi kontrollera genom att betrakta utrrycket för spänningen över kondensatorn i en RC-krets

$$\begin{aligned}
u_c(t) &= u_c(\infty) + (u_c(0) - u_c(\infty))\mathrm{e}^{-t/(R_1 C)} && (1)\\
&= U_0(1 - \mathrm{e}^{-t/(R_1 C)}) && (2)\\
&= U_0(1 - \mathrm{e}^{-10/(10\cdot 10^{-3})}) && (3)\\
&= U_0(1 - \mathrm{e}^{-1000}) && (4)
\end{aligned}$$

där vi har använt oss av det initiala värdet $u_c(0) = 0$ och spänningen som uppnås vid fortvarighetstillståndet $u_c(\infty) = U_0$.

Maxvärdet för strömmen i får man genom att inse att vid $t = 0$, när omkoppling till läge B skett, är spänningen över kapaciatansen som störst. Från Ohms lag $i = u/R$ ser vi att strömmen är störst då också men kommer att minska med tiden eftersom spänningen över kapacitansen minskar exponentellt med tiden och strömmen också. Då kan vi beräkna maxvärdet av strömmen enligt följande uttryck



$$i_{\max} = \frac{U_0}{R_{\text{ekv}}} \qquad (5)$$

Insättning av numeriska värden ger $i_{\max} = \frac{2}{3}$ A ≈ 0.66 A.

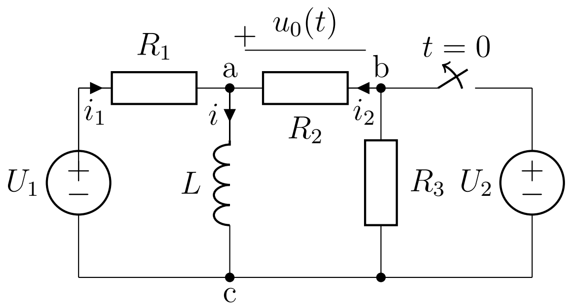
1b) Energin som finns upplagrad i kondensator vid tillfället när strömmen i är som störst ges av

$$w_c = \frac{1}{2} C U_0^2. \qquad (6)$$

Insättning av numeriska värden ger $w_c = 0.5 \cdot 100 \cdot 10^{-12} \cdot (2 \cdot 10^3)^2\ \text{FV}^2 = 20$ mJ.

1c) I läge B ser den aktuella kretsen ut som figuren till höger. Nu kommer kontensatorn att laddas ur via resistanserna R_2 och R_{DUT}. Vi kan direkt identifiera tidskonstanten för denna krets som $\tau_2 = R_{ekv} C$, där $R_{\text{ekv}} = R_2 + R_{DUT}$. Insättning av numeriska värden ger $R_{ekv} = 3\text{k}\Omega$ och $\tau_2 = 3 \cdot 10^3 \cdot 100 \cdot 10^{12} \Omega\text{F} = 0.3\mu s$.

2a) Före $t = 0$ råder stationärt tillstånd. Källor och alla strömmar är likström. Detta innebär att spolen är en kortslutning och nod a och c är samma punkt. (Det är en ideal spole emellan och den har ingen resistans). Vi ska bestämma u_0 och strömmen i. Vi kan naturligtvis använda nodanalys om vi inser att a och c är samma punkt. Men här är det nästan lättare att direkt använda KVL. Eftersom $v_a = v_c$ kan vi använda denna nod som referens. Vi får då två egentligen separerade kretsar.



Om vi går från c genom U_1 vidare till a och ned till c igen får vi att

$$U_1 = R_1 i_1, \; i_1 = \frac{U_1}{R_1} \tag{7}$$

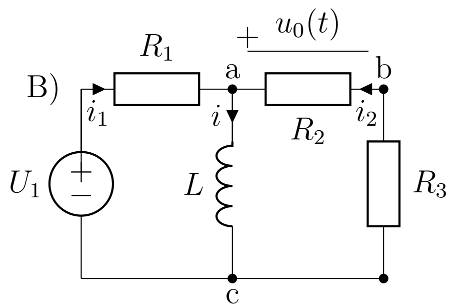
och detta är en av de strömmarna som kommer fram till nod a. Från den andra källan får vi att spänningen över bc är U_2, eftersom $v_a = v_c$ dvs $u_0 = -U_2$. Vilket ger att strömmen genom R_2 är

$$i_2 = \frac{-u_0}{R_2} = \frac{U_2}{R_2} \tag{8}$$

KCL i nod a ger att $i = i_1 + i_2 = U_1/R_1 + U_2/R_2$.

2b,c) Notera att det är strömmen i genom spolen för $t = 0$ som kommer att vara initial värdet för spolens diff-ekvation.

Vi ska nu betrakta $t \geq 0$. Nu kan vi rita om kretsen. Se figur B. Vi kan göra en tvåpol av detta, dvs vi ser att spolen och $(R_1 + R_2)$ är parallell kopplade, så vi kan byta plats på dem. Sedan kan vi göra spänningskällan och resistanserna till en tvåpol och gå vidare enligt boken med spolen som last.

B)


Alternativt kan vi följa ledningen och titta på nodanalys. Före vi försöker bestämma $u_0(t)$ måste vi hitta och lösa diffekvationen för spolen. Vi börjar med det. Vi har två intressanta noder, a och c. Jorda c då har vi en okänd potential v_a och vi behöver en ekvation. Vi gör nodanalys i nod a

$$\frac{v_a - U_1}{R_1} + i(t) + \frac{v_a}{R_2 + R_3} = 0, \Rightarrow v_a(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + R_3}) = \frac{U_1}{R_1} - i(t) \tag{9}$$

Vi får tillslut

$$v_a = \frac{R_2 + R_3}{R_1 + R_2 + R_3}(U_1 - i(t)R_1) \tag{10}$$

Notera att vi inte känner $i(t)$ här. Vi vet att spänningen över spolen $u_L = v_a - v_c = v_a$ är relaterad till strömmen genom $v_a = u_L = L\frac{di}{dt}$. Innan vi går vidare tittar vi på (10). Först noterar vi att U_1 är en konstant likströmskälla. Dess spänning påverkas inte av spolens flödes förändring. Vi har också en massa resistanser, låt oss kalla den dimensionslösa konstanten för k:

$$k = \frac{R_2 + R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \tag{11}$$

Med relationen mellan ström och spänning får vi

$$L\frac{di(t)}{dt} = kU_1 - i(t)R_1 k, \Rightarrow \frac{di(t)}{dt} + k\frac{R_1}{L} i(t) = \frac{kU_1}{L} \tag{12}$$

Denna ODE är på standard form och kan enkelt lösas, vi får:

$$i(t) = \frac{U_1}{R_1} + K\mathrm{e}^{-tkR_1/L}. \tag{13}$$

För att bestämma konstanten K måste vi använda initial värdet $i(t=0) = U_1/R_1 + U_2/R_2$. Vi får

$$i(t=0) = \frac{U_1}{R_1} + K = \frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_2}. \tag{14}$$

Vi får att $K = U_2/R_2$. Vi har nu fått strömmen $i(t)$ som

$$i(t) = \frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_2}\mathrm{e}^{-tkR_1/L}, \text{ där } k = \frac{R_2 + R_3}{R_1 + R_2 + R_3}. \tag{15}$$

Men vi söker egentligen $u_0(t)$, men detta vet vi när vi vet v_a över de seriekopplade resistanserna R_2 och R_3 och kan bestämma u_0 genom spänningsdelning. Vi får att

$$v_a(t) = L\frac{di(t)}{dt} = -\frac{U_2 R_1 k}{R_2}\mathrm{e}^{-ktR_1/L}.$$

Vi får nu u_0 genom spänningsdelning. Med känt v_a och får

$$u_0(t) = \frac{v_a(t)R_2}{R_2 + R_3} = -U_2\frac{R_1}{R_2}\frac{R_2}{R_2 + R_3}\frac{R_2 + R_3}{R_1 + R_2 + R_3}\mathrm{e}^{-tkR_1/L} = -U_2\frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3}\mathrm{e}^{-tkR_1/L}$$

med k som i (15). Vi får tidskonstanten $\tau = L/(kR_1)$, med k som ovan .

2d) Rimlighetskontroll. Vi går tillbaka till krets B) ovan. Vi har likspänning i U_1 detta innebär att efter en lång tid har vi likström i hela kretsen, dvs i =konst. Spänningen $v_a - v_c = Ldi/dt = 0$. Dvs $R_2 + R_3$ är korslutna av spolen i likström. Vilket betyder att efter en lång tid finns det ingen spänning mellan ac och därför ska $u_0(t) = 0$V i det stationära tillståndet efter transienten.

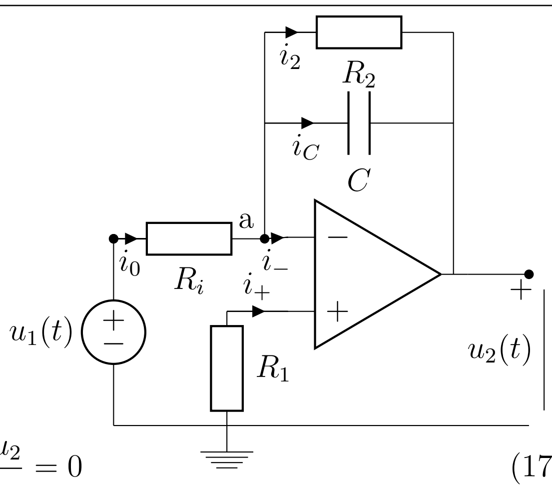
Låt oss kolla om vårt svar ger detta.

$$\lim_{t\to\infty} u_0(t) = -U_2\frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3}\lim_{t\to\infty}\mathrm{e}^{-tkR_1/L} = 0. \tag{16}$$

Vi får att både gränsvärdet och beräknandet av det stationära tillståndet ger samma resultat.

3a) Potentialerna i +-ingången är v_+ och potentialen i −-ingången är v_-. Vi antar att det är en ideal operationsförstärkare. Dvs $i_- = i_+ = 0$ och $v_+ = v_-$. Då $i_+ = 0$ kan vi potentialvandra från jord upp till +-ingången och få: $0 - i_+R_1 = v_+$. Men då $i_+ = 0$ får vi direkt att $v_+ = 0$. Vi får $v_- = 0$ då op:n är ideal.

För insignaler kan vi alltid tänka att vi har en källa ansluten, med just denna signal. Se figur. Vi söker $u_2(t)$ som funktion av $u_1(t)$. Nodanalys i noden a ger först KCL: $-i_0 + i_- + i_C + i_R = 0$. Vi uttrycker dessa strömmar i nodpotentialen. Vi får:



$$\frac{v_a - u_1}{R_i} + 0 + i_C + \frac{v_a - u_2}{R_2} = 0 \tag{17}$$

Notera att $i_C = Cdu_C/dt = Cd(v_a - u_2)/dt = -Cdu_2/dt$, då $v_a = 0$. v_a är i samma potential som v_- ovan. Vi får därför att

$$-\frac{u_1}{R_i} - C\frac{du_2}{dt} - \frac{u_2}{R_2} = 0 \Rightarrow \frac{du_2(t)}{dt} + \frac{u_2(t)}{CR_2} = -\frac{u_1(t)}{CR_i} \tag{18}$$

Denna ekvation känner vi igen! Vi kan lösa diff-ekvationen och får:

$$u_2(t) = \mathrm{e}^{-t/(R_2C)}K - \int_0^t \frac{\mathrm{e}^{-(t-t')/(R_2C)}}{CR_i}u_1(t')\,\mathrm{d}t' \tag{19}$$

Notera att vi inte kan bestämma konstanten K, då inget initial tillstånd på u_2 är givet. Vi observerar också att termen med K försvinner med tidskonstant R_2C. Om vi antar att signalen u_2 är försumbar vid $t = 0$ får vi

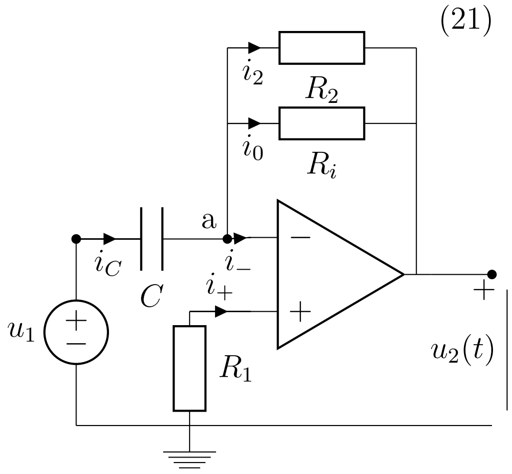
$$u_2(0) = 0 = K - 0 \tag{20}$$

vilket i så fall hade gett $K = 0$.

Titta på in-delen av kretsen. Det går en ström i_0 genom källan. Det går ingen ström över u_2 (ut-kretsen är öppen, tomgångsspänning!). Gör en nod-analys i jord-punkten. Var ifrån måste i_0 komma?

3b) Om t är litet i förhållande till R_2C så kan vi serieutveckla exponenten runt nollan och få att för små t gäller $\mathrm{e}^{t/(R_2C)} \approx 1$. Då t, t' båda ligger mellan $0, \max(t)$ kan vi approximera integranden också med $1/(CR_i)$. (Taylor expansion). Vi får då att kretsen har funktionen

$$u_2(t) = K - \frac{1}{R_iC}\int_0^t u_1(t')\,\mathrm{d}t' \tag{21}$$



Dvs vid rätt val av kapacitans och R_2 får vi operationerna: integration och en skalning med faktorn $1/(CR_i)$ plus en konstant K. Det är nyttigt att kolla dimensioner. $[RC] = s$ så vi får $[u_2] = V = [K] + [u_1]/[R_iC][dt'] = [K] + (V/s)s$. Vi får att K måste vara en spänning.

3c) Vi har nu bytt plats på C och R_i vi får kretsen som i figuren. Vi ska bestämma u_2. Vi gör en nod-analys i a, och precis som ovan har vi $v_a = 0 = v_- v_+ = 0$. KCL ger: $-i_C + i_0 + i_2 = 0$ då vi har $(i_- = 0)$ vilket vi uttrycker i potentialer:

$$-i_C + \frac{v_a - u_2}{R_i} + \frac{v_a - u_2}{R_2} = 0 \tag{22}$$

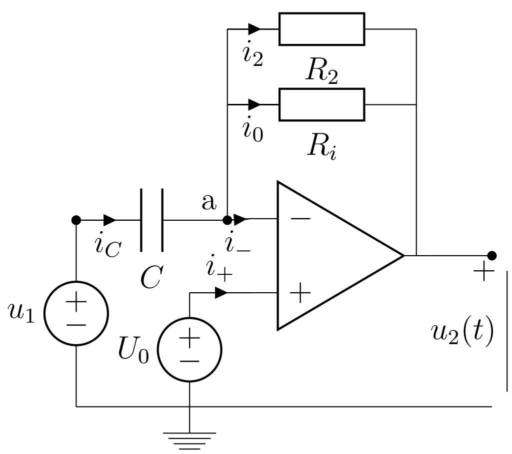
Vi kommer ihåg att för kondensatorn gäller att $i_C = Cdu_C/dt = Cd(u_1 - v_a))/dt = Cdu_1/dt$ (vid passiv konvention). Vi får $(v_a = 0)$

$$-C\frac{du_1}{dt} + \frac{-u_2}{R_i} + \frac{-u_2}{R_2} = 0 \tag{23}$$

Vi vill beskriva $u_2(t)$ som en funktion av i_1 vi får:

$$u_2(\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_2}) = -C\frac{du_1}{dt} \Rightarrow u_2(t) = -\frac{CR_iR_2}{R_i + R_2}\frac{du_1}{dt} \tag{24}$$

3d) Det första vi observerar är att potentialen i +-polen måste nu vara: U_0, vilket då ger att $v_a = v_- = v_+ = U_a$. Vi får exakt samma ekvation som ovan, men med v_a nollskild:



$$-i_C + \frac{v_a - u_2}{R_i} + \frac{v_a - u_2}{R_2} = 0 \tag{25}$$

$v_a = U_0$, $i_C = du_1/dt$ ger

$$-\frac{du_1}{dt} + \frac{U_0 - u_2}{R_i} + \frac{U_0 - u_2}{R_2} = 0 \tag{26}$$

Vi löser för u_2 och får

$$u_2(t) = U_0 - \frac{R_iR_2}{R_i + R_2}\frac{du_1}{dt} \tag{27}$$