Hemuppgift för EI1110 nr 2 av 4.
Lösningsförslag kommer att publiceras 14/2/2014.

Lärare: Andrés Alayón Glazunov

1 av 4: Komplexa metoden) Bestäm kartesisk form, polär form, identifiera argument, belopp, rita vektorn i det komplexa talplanet för a-f:

a) $3 + 4\mathrm{j}$, b) $-5 + \mathrm{j}$, c) $\frac{1}{-5+\mathrm{j}}$ d) $\frac{3+4\mathrm{j}}{-12-5\mathrm{j}}$, e) $\mathrm{e}^{\mathrm{j}3\pi/4}$, f) $|z| = 2$, $\arg z = -\pi/6$.

Givet att $R_1 > 0$, $R > 0$, $\omega > 0$, $L > 0$, $C > 0$ gör samma sak på g-l:

g) $R + \mathrm{j}\omega L$, h) $\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}$, i) $R + \mathrm{j}\omega L + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}$ j) $\frac{1}{R+\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}}$ k) $\frac{1}{R_1+R+\mathrm{j}\omega L}$ l) $\frac{R+\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}}{R+\mathrm{j}\omega L}$

---

2 av 4: Komplexa metoden) Skriv på komplex form med cosinus som referens här är: $U_0 > 0$, $U_1 > 0$, $I_0 > 0$.

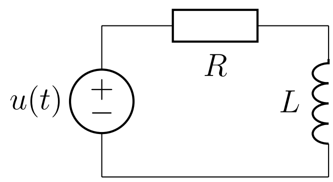
a) $u(t) = U_0 \cos(\omega t + \alpha)$ b) $i(t) = I_0 \sin(\omega t - \alpha)$ c) $U(t) = U_0 \cos(\omega t) - U_1 \sin(\omega t)$

Skriv på tidsform uttrycken är på komplex form, med cosinus som referens. De komplexa värdena nedan är på toppvärdesform. Här är $U_0 > 0$, $I_0 > 0$, $R > 0$, $\omega > 0$, $L > 0$:

d) $U(\omega) = U_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha}$, e) $I(\omega) = -\mathrm{j}I_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta}$, f) $I(\omega) = \frac{U_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta}}{R+\mathrm{j}\omega L}$, g) $U(\omega) = U_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta} + I_0\mathrm{j}\omega L$, h) $I_0 = 3\mathrm{e}^{-2}(1 + \mathrm{j})$

---

3 av 4) Introduktion till komplexa strömmar och spänningar. Här är $u(t) = A\cos(\omega t + \frac{\pi}{6})$ V.



a) Vad är den komplexa toppvärdesspänningen $U(\omega)$?

b) Vad är impedansen för resistansen R? Vad är impedansen för spolen med induktans L? Ange också den totala impedansen i kretsen.

c) Använd Ohm's lag på de komplexa storheterna för att bestämma I

d) Vad är amplituden (också kallat längd, belopp, eller absolutbeloppet) av strömmen? vad är fasen?

e) Ange strömmen i tidsdomänen.

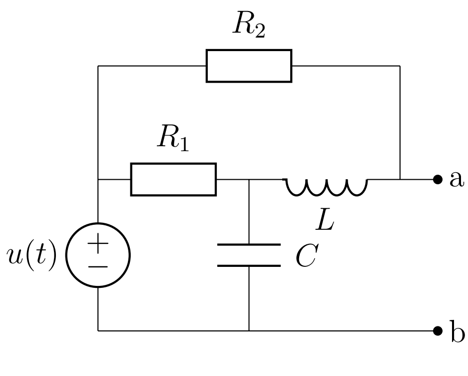
f) $L = 1.1$H, $f = 50$Hz,$R = 500\Omega$, $A = 1.6$V. Rita nu de komplexa storheterna I, U i komplexa talplanet. Markera vad som är amplitud och fas, samt fasskillnad mellan strömmen och spänningen.

g) Skissa nu på en graf som funktion av tiden där $u(t)$ och $i(t)$ är inritade, markera amplitud och absoluta faser samt fasskillnad.

---

4 av 4) Nodanalys/2-pol: Bestäm en Norton 2-pol ekvivalent i komplex-domän med avseende på ab. Var noga med att markera referensriktning. Tidssignalen är harmonisk och dess komplexa motsvarighet är $U(\omega)$.

Dimensionskontrollera uttrycket för den inre impedansen i den ekvivalenta tvåpolen.



Lösningsförslag till hemuppgift 2 för EI1110 VT 2014

Lärare: Andrés Alayón Glazunov

---

1) Vi ska bestämma kartesisk form, polär form och identifiera argument belopp samt rita vektorn i komplexa talplanet. Figuren visar vektorerna. Notera att endast längden av z i a och $\arg z$ i a) är utmärkta.
a) Vi har $z = 3 + \mathrm{j}4$, den är på kartesisk form. För polär form får vi $|z| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$ (belopp/amplitud).
$\arg(3+\mathrm{j}4) = \arctan(4/3) \approx 0.93\text{rad} \approx 53.1°$ (argument). Vi får $z = 5\mathrm{e}^{\mathrm{j}0.93}$ (polär form) **(Svar a)**

1b) $z = -5 + \mathrm{j}$ den är på kartesisk form. För polär form $|z| = \sqrt{5^2+1^2} = \sqrt{26} \approx 5.1$ (belopp). Argumentet: Notera att $\mathrm{Re}(z) = -5 < 0$ vi måste vara lite försiktiga med vinkeln $\arg z = \pi - \arctan(1/5) \approx 2.9\text{rad} \approx 170°$. Vi får den polära formen $z \approx 5.1\mathrm{e}^{\mathrm{j}2.9}$. **(Svar b)**

1c) $z = \frac{1}{-5+\mathrm{j}}$. För polär form notera att vi från 1b) vet att $z_1 = -5+\mathrm{j} = 5.1\mathrm{e}^{\mathrm{j}2.9} = 5.1\mathrm{e}^{\mathrm{j}2.9}$ vi kan därför skriva $z = \frac{1}{z_1} = \frac{1}{5.1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2.9} \approx 0.20\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2.9}$ (notera minustecknet i argumentet). Vi får att beloppet är 0.2 och argumentet är -2.9rad$\approx -169°$. För att få z på kartesisk form kan vi multiplicera uppe och nere med komplexkonjugatet: **(Svar c)**

$$z = \frac{1}{-5+\mathrm{j}} = \frac{-5-\mathrm{j}}{(-5+\mathrm{j})(-5-\mathrm{j})} = \frac{-5-\mathrm{j}}{26} = \frac{-5}{26} - \mathrm{j}\frac{1}{26} \tag{1}$$

1d) $z = \frac{3+4\mathrm{j}}{-12-5\mathrm{j}}$. Vi börjar med polär form. Vi får: **(delsvar)**

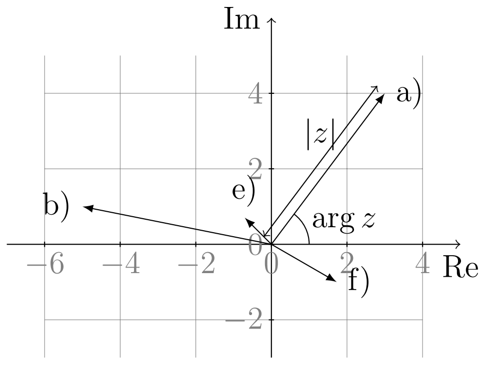
$$|z| = \frac{|3+4\mathrm{j}|}{|-12-5\mathrm{j}|} = \frac{\sqrt{9+16}}{\sqrt{144+25}} = \frac{5}{13}, \text{ (belopp)} \tag{2}$$

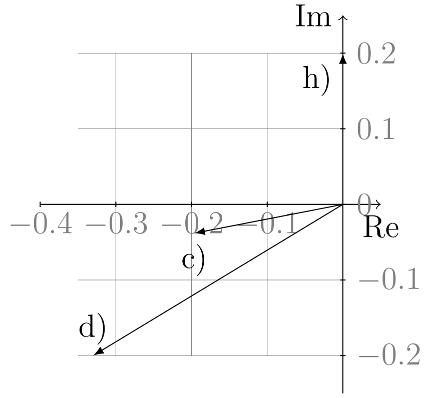
$$\arg(z) = \arg(3+4\mathrm{j}) - \arg(-12-5\mathrm{j}) = \arctan(4/3) - (\pi - \arctan(-5/12)) \approx -2.6\text{rad} \tag{3}$$

$$\approx (3.7 \bmod 2\pi)\text{rad (argument)} \tag{4}$$

Vi får alltså $z = \frac{5}{13}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2.6}$. Vi kommer ihåg att vinkeln $\phi' = \phi + 2\pi n = \phi \mod 2\pi$, för godtyckligt heltal n.

För kartesisk form kan vi antingen göra som i c) eller så kan vi direkt aväanda Eulers formel. Notera att: $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2.6} = \cos 2.6 - \mathrm{j}\sin 2.6$. Vi får: $z = -0.33 - \mathrm{j}0.20$ **(delsvar)**.





1e) $z = \mathrm{e}^{\mathrm{j}3\pi/4}$. Den är på polär form beloppet är 1 och argumentet är $3\pi/4$rad$\approx 135°$.

Kartesisk form fås genom Eulers formel: $z = \cos(3\pi/4) + \mathrm{j}\sin(3\pi/4) = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \mathrm{j}\frac{1}{\sqrt{2}} = -0.71 + \mathrm{j}0.71$. **(Svar e)**. [rättad]

1f) Vi får direkt $z = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/6}$. Argument och belopp var givet. Kartesisk form får vi genom Eulers formel: $z = \sqrt{3} - \mathrm{j}$. **(Svar f)**.

1g) $Z = R + \mathrm{j}\omega L$. Är på kartesisk form. Söker polär form. Belopp: $|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$. Argument: $R > 0$ vi får $\arg Z = \arctan(\omega L/R)$. Ligger i första kvadranten. Skulle kunna se ut som a) ovan. Beroende på hur R och ωL är valda. Polär form blir **(Svar)**. (Notera att dimensionen av $Z, R, \omega L$ är Ω.)

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\arctan(\omega L/R)}.$$

1h) $Z = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}$. Notera att $1/\mathrm{j} = -\mathrm{j}$ vi får kartesisk form $-\mathrm{j}/(\omega C)$. Vi vill ha det på polär form. Vi noterar att j i komplexa talplanet pekar längs positiva imaginär axeln. Dvs vinkeln till reella axeln är $90^\circ = \pi/2$rad. Längden är $|Z| = 1/(\omega C)$. Vi får den polära formen: $Z = \frac{1}{\omega C}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/2}$. Vektorn ligger längs positiva imaginära axeln. Se figuren, längden är vald godtyckligt då ωC inte är angiven. **(Svar)**. (Notera att dimensionen av ωC är Ω^{-1}).

1i) $Z = R + \mathrm{j}\omega L + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}$. Vi börjar med kartesisk form. Uttrycket är nästan på kartesisk form, vi måste bara ta hand om sista termen. Se 1h). Vi får om vi samlar reella och imaginära delar:

$$Z = R + \mathrm{j}(\omega L - \frac{1}{\omega C}). \tag{5}$$

Vi vill nu ha den polära formen. Beloppet är: $|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$, argumentet blir $\arg Z = \arctan((\omega L - \frac{1}{\omega C})/R)$. På polär form blir det: (Kolla dimensionen i de olika delarna!)

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\arctan(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R})} \tag{6}$$

Om vi inte vet något om storleken på ωL och ωC kan vi inte avgöra om den ligger i kvadrant 1 eller kvadrant 4. **(Svar)**

1j) $Y = \frac{1}{R + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}}$. (Admitans, dim Ω^{-1}). Kartesisk form (förläng med komplexkonjugatet) $Y = \frac{R + \mathrm{j}\frac{1}{\omega C}}{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}} = \frac{(\omega C)^2 R + \mathrm{j}\omega C}{1 + (\omega RC)^2}$. Polär form vi ser att:

$$|Y| = \frac{1}{|R + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}|} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}},\ \arg Y = -\arg(R + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}) = \arctan(\frac{1}{\omega CR}) \tag{7}$$

$$\Rightarrow Y = \frac{\omega C}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\arctan(1/(\omega CR))} \tag{8}$$

Denna kommer att ligga i kvadrant 1, och kan likna a). **(Svar)**

1k) $Y = \frac{1}{R_1 + R + \mathrm{j}\omega L}$. Kartesisk form om vi förlänger med komplexkonjugatet: $Y = \frac{R_1 + R_2}{(R_1 + R)^2 + (\omega L)^2} - \mathrm{j}\frac{\omega L}{(R_1 + R)^2 + (\omega L)^2}$. Vi får polär form genom att titta på belopp och argument:(kolla dimensionen!).

$$|Y| = \frac{1}{\sqrt{(R + R_1)^2 + (\omega L)^2}}, \arg Y = -\arg(R + R_1 + \mathrm{j}\omega L) = -\arctan(\frac{\omega L}{R + R_1}) \tag{9}$$

$$\Rightarrow Y = \frac{1}{\sqrt{(R + R_1)^2 + (\omega L)^2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\arctan(\frac{\omega L}{R + R_1})}. \tag{10}$$

1l) $H = \frac{R + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}}{R + \mathrm{j}\omega L}$. (dimensionslöst) Kartesisk form (förläng med komplexkonjugatet):

$$H = \frac{1 + \mathrm{j}\omega RC}{\mathrm{j}\omega CR - \omega^2 LC} = \frac{(1 + \mathrm{j}\omega RC)(-\mathrm{j}\omega CR - \omega^2 LC)}{(\omega CR)^2 + (\omega^2 LC)^2} = \frac{(\omega RC)^2 - \omega^2 LC + \mathrm{j}(\omega^3 C^2 LR - \omega CR)}{(\omega CR)^2 + (\omega^2 LC)^2} \tag{11}$$

Polär form: (kolla dimensionen!)

$$|H| = \frac{|1+\mathrm{j}\omega RC|}{|\mathrm{j}\omega CR - \omega^2 LC|} = \sqrt{\frac{1+(\omega RC)^2}{(\omega CR)^2 + (\omega^2 LC)^2}}, \tag{12}$$

$$\arg H = \arg(1+\mathrm{j}\omega RC) - \arg(\mathrm{j}\omega CR - \omega^2 LC) = \arctan(\omega RC) - (\pi - \arctan\frac{\omega CR}{\omega^2 LC}) \tag{13}$$

$$= \arctan(\omega RC) - \pi + \arctan(\frac{R}{\omega L}) \Rightarrow \tag{14}$$

$$H = \sqrt{\frac{1+(\omega RC)^2}{(\omega RC)^2 + (\omega^2 LC)^2}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\arctan(\omega CR) - \pi + \arctan(\frac{R}{\omega L}))} \tag{15}$$

Notera att det är svårt att förutspå var denna vektor kommer att peka utan mer info på R, C, L och ω. Man kan visa att beroende på värdena ωCR och $\omega L/R$ kan man placera denna vektor i godtycklig kvadrant.

2a) $u(t) = U_0 \cos(\omega t + \alpha)$. Vi gör ansatsen $U(\omega) = A\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta}$, $A > 0$. Vi sätter in det i omvanlingsformeln:

$$u(t) = U_0 \cos(\omega t + \alpha) = \mathrm{Re}(U(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}) = [\text{ansatsen}] \tag{16}$$

$$= \mathrm{Re}(A\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}) = \mathrm{Re}(A\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\beta)}) = [\text{Euler}] \tag{17}$$

$$= A\mathrm{Re}(\cos(\omega t+\beta) + \mathrm{j}\sin(\omega t+\beta)) = A\cos(\omega t+\beta) \tag{18}$$

Vi identifierar nu vad A och β är: $A = U_0$, $\beta = \alpha$. Dvs vi får $U(\omega) = U_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha}$.

2b) $i(t) = I_0 \sin(\omega t - \alpha)$. Genom att använda $\cos(a-\pi/2) = \cos(a)\cos(\pi/2) + \sin(a)\sin(\pi/2) = \sin(a)$ då $\cos\pi/2 = 0$ och $\sin\pi/2 = 0$ kan vi skriva $i(t) = I_0\cos(\omega t - \alpha - \pi/2)$. Nu kan vi göra precis som i a) med ansats etc. Jag repeterar inte det igen. Vi får: $I(\omega) = I_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\pi/2-\alpha)}$. **(Svar)**.

2c) $u(t) = U_0\cos(\omega t) - U_1\sin(\omega t)$. Komplexa spänningar går att summera (se 2b). Dvs vi vet att den första termen är $U_a(\omega) = U_0$ och den andra är $U_b(\omega) = -U_1\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/2}$. (Prova och sätt in i omvandlingsformeln och se att det stämmer). Vi har därför att $U(\omega) = U_a + U_b = U_0 - U_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/2} = U_0 - U_1\mathrm{j} = \sqrt{U_0^2 + U_1^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\arctan(U_1/U_0)}$. Då $U_1 > 0$ $U_0 > 0$.

---

d) $U(\omega) = U_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha}$ exact vad vi fick i 2a. Svar $u(t) = \cos(\omega t + \alpha)$.

2e) $I(\omega) = -\mathrm{j}I_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta}$ vi börjar med att skriva det på polär form. Vi vet att $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/2} = -\mathrm{j}$ (prova med Eulers formel, eller rita i Komplexa talplanet). Vi får $I(\omega) = I_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta - \mathrm{j}\pi/2}$. In i omvandlingsformeln: **(Svar)**

$$i(t) = \mathrm{Re}(I(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}) = I_0\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\beta-\pi/2)}) = I_0\mathrm{Re}(\cos(\omega t+\beta-\pi/2) + \mathrm{j}\sin(\omega t+\beta-\pi/2)) \tag{19}$$

$$= I_0\cos(\omega t + \beta - \pi/2). \tag{20}$$

2f) $I(\omega) = \frac{U_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta}}{R+\mathrm{j}\omega L}$. Notera att 1g) ger nämnaren på polär form. Vi får $I(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta - \mathrm{j}\arctan(\omega L/R)}$. Vi får därför genom omvandlingsformeln.

$$i(t) = \mathrm{Re}(I(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}) = \frac{U_0}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\cos(\omega t + \beta - \arctan(\omega L/R)) \tag{21}$$

2g) $U(\omega) = U_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta} + I_0\mathrm{j}\omega L$. Vi måste först skriva detta på polär form. Euler ger oss $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta} = \cos\beta + \mathrm{j}\sin\beta$. Vi kan därför samla ihop reella och imaginära delar:

$$U(\omega) = U_0\cos\beta + \mathrm{j}(U_0\sin\beta + I_0\omega L) = \sqrt{(U_0\cos\beta)^2 + (U_0\sin\beta + I_0\omega L)^2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\arctan\frac{U_0\sin\beta + I_0\omega L}{U_0\cos\beta}} \tag{22}$$

under förutsättning att $\cos\beta > 0$ annars får man kompensera för negativ realdel som i 1b). Nu kan vi omvandla den till tidsform:**(Svar)**

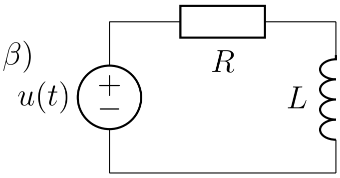
$$u(t) = \mathrm{Re}(U(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}) = \sqrt{(U_0\cos\beta)^2 + (U_0\sin\beta + I_0\omega L)^2}\cos(\omega t + \arctan\frac{U_0\sin\beta + I_0\omega L}{U_0\cos\beta}) \tag{23}$$

2h) $I_0 = 3\mathrm{e}^{-2}(1+\mathrm{j})$. Notera att 3 och e^{-2} är reella tal. Vi har $1+\mathrm{j} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/4}$. Vi får alltså:**(Svar)**

$$i(t) = \mathrm{Re}(I_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})3\mathrm{e}^{-2}\cos(\omega t + \pi/4). \tag{24}$$

Notera att man måste vara försiktig så man inte av misstag får med e^{-2} på fel ställe. Detta är ett positivt tal :). Det är också därför man får problem på tentan om man glömmer j i exponenten.

3a) Vi gör vår ansats $U(\omega) = B\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha}$. In i omvandlingsformeln:



$$u(t) = A\cos(\omega t + \frac{\pi}{6}) = \mathrm{Re}(U(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}) = [\text{ansats}] = \mathrm{Re}(B\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta + \mathrm{j}\omega t}) = B\cos(\omega t + \beta) \tag{25}$$

Vi identifierar $B = A$, $\beta = \pi/6$ och får: $U(\omega) = A\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/6}$.

3b) Impedansen för R är $Z_R = R$. Impedansen för spolen är $Z_L = \mathrm{j}\omega L$. Den totala impedansen är $Z = Z_R + Z_L = R + \mathrm{j}\omega L$.

3c) Den komplexa strömmen är

$$I = \frac{U}{Z} = A\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/6}\frac{1}{R + \mathrm{j}\omega L}. \tag{26}$$

3d) Absolutbeloppet:

$$|I| = |A|\underbrace{|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/6}|}_{=1}\left|\frac{1}{R + \mathrm{j}\omega L}\right| \tag{27}$$

Vi får att beloppet av strömmen är:

$$|I| = \frac{|A|}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \tag{28}$$

Fasen: För att kunna bestämma fasen måste vi omvandla $1/(R + \mathrm{j}\omega L)$ till polär form. Vi erindrar oss att om $a + \mathrm{j}b = z = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$ så är $z^{-1} = |z|^{-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}$, där $\tan\theta = b/a$ om $a > 0$. Därför är det tillräckligt att bestämma fasen av $R + \mathrm{j}\omega L$. Den är $\arg(R + \mathrm{j}\omega L) = \arctan(\omega L/R)$. Vi får nu

$$\arg(I) = \arg A + \arg\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/6} - \arg(R + \mathrm{j}\omega L) = \arg A + \frac{\pi}{6} - \arctan(\frac{\omega L}{R}) \tag{29}$$

Amplituden A till vår cos-funktion är ett reellt tal. Om $A > 0$ är $\arg A = 0$ men om $A < 0$ så är $\arg A = \pi$. Antag här att $A > 0$. Svar: $\arg(I) = \pi/6 - \arctan(\omega L/R)$.

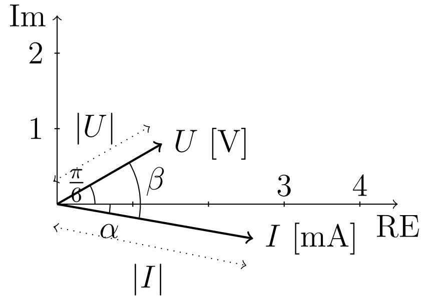
3e) Strömmen i tidsdomän blir enkel nu när vi vet både amplitud och fas: Vi har i föregående uppgift räknat ut att

$$I(\omega) = \frac{|A|}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\pi/6 - \arctan(\omega L/R))} \tag{30}$$

Vi får strömmen i tidsdomän genom omvandlingsformeln

$$i(t) = \mathrm{Re}(I(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}) = \frac{|A|}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}\cos(\omega t + \pi/6 - \arctan(\omega L/R)) \tag{31}$$

3f) Notera att vi har två värdesiffror. Vi räknar med 3 och avrundar i svaret. Vi börjar med att bestämma $\omega = 2\pi f = 314$rad/s. Vi får $\omega L = 345\Omega$ Vilket ger att



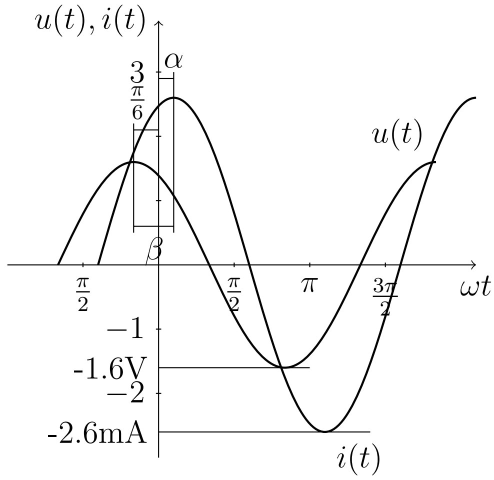
$$|I| = \frac{A}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} = 2.63 \cdot 10^3 \approx 2.6\text{mA} \tag{32}$$

och

$$\beta = \arctan \frac{\omega L}{R} = 0.605\text{rad} \approx 35° \tag{33}$$

Vi får att $\alpha = \pi/6 - \arctan(\omega L/R) \approx -0.0814$rad $\approx -4.7°$. differensen $\beta = \arctan(\omega L/R)$ blir som ovan. I figuren har jag också markerat att de respektive beloppen med punktade dubbel-pilar. Notera att jag har skalat strömmen med en faktor 1000.

3g Vi ritar spänning och ström i samma diagram. Det är lämpligt att skala axlarna med π som i figuren. Vi har markerat amplituden för respektive kurva. Samt absolut fas och fasskillnad mellan kurvorna. Precis som i det komplexa diagrammet har jag skalat strömmen med en faktor 1000.



---

4) Vi söker en Norton två-pol (I_N, Z_i). Vi har inga beroende källor, så vi kan bestämma den inre impedansen genom att nollställa källorna. Se figur 1 sträcker och drar man lite i figuren ser vi den blir fig 2 och $Z_i = ([R_1//(1/(j\omega C))k + j\omega L)//R_2$ dvs:**(delsvar)**

fig 1

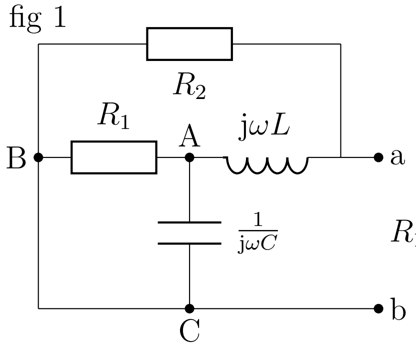


fig 2

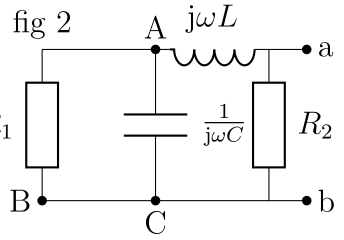
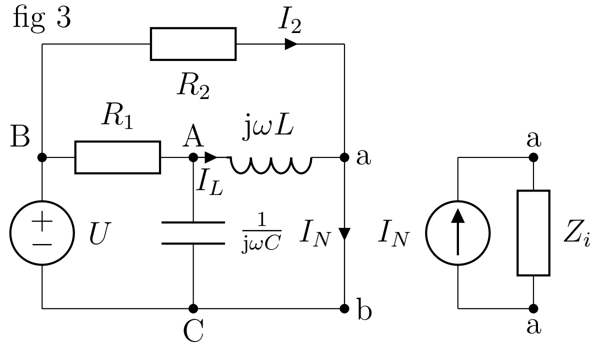


fig 3



$$Z_i = \frac{(\frac{R_1}{1+j\omega CR_1} + j\omega L)R_2}{\frac{R_1}{1+j\omega CR_1} + j\omega L + R_2} = \frac{(R_1 + (j\omega L(1 + j\omega CR_1))R_2}{R_1 + (1 + j\omega CR_1)(R_2 + j\omega L))} \tag{34}$$

Dim koll: vi noterar att $[\omega L] = \Omega$, $[\omega C] = \Omega^{-1}$, $[R] = \Omega$ **(delsvar)**

$$[Z_i] = \Omega = \frac{(\Omega + \Omega(1 + \Omega\Omega^{-1}))\Omega}{\Omega + (1 + \Omega^{-1}\Omega)(\Omega + \Omega)} = \frac{\Omega^2}{\Omega} = \Omega \tag{35}$$

Höger och vänster led har samma dimension. För att bestämma I_N gör vi nodanalys. Notera i fig 3 att a,b,C är en och samma nod. Vilken vi väljer till referens nod. Vi har två ytterligare noder A, B. Potentialen i A är U då $V_C = 0$. Vi har en okänd potential V_A. Om vi vet V_A kan vi räkna ut strömmen I_L, I_2 känner vi eftersom $V_B = U$ och $V_C = 0$ är kända. Vi får att KCL i a ger I_N. Vi får

$$\frac{V_A - U}{R_1} + \frac{V_A}{j\omega L} + V_A j\omega C = 0 \Rightarrow V_A = U\frac{j\omega L}{R_1 + j\omega L - R_1\omega^2 LC} \tag{36}$$

Vi får Norton ekvivalenten i figuren längst till höger med **(delsvar)**

$$I_N = \frac{U}{R_2} + \frac{V_a}{\mathrm{j}\omega L} = U(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 - \omega^2 LCR_1 + \mathrm{j}\omega L}) \tag{37}$$