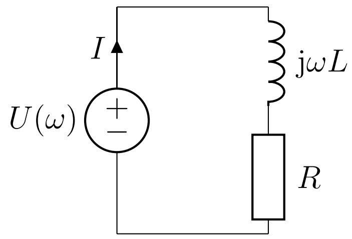
Hemuppgift för EI1110 nr 3 av 4

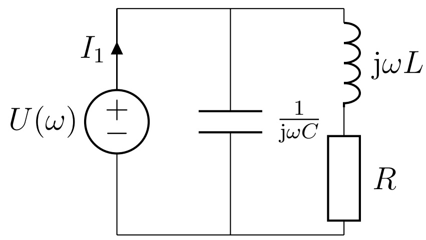
Lärare: Andrés Alayón Glazunov

---

1 av 4) En motor är inkopplad till en spänningskälla som ger spänningen $U(\omega)$ vid vinkelfrekvensen ω. Motorn modelleras med en spole i serie med ett motstånd. Kända storheter U, R, ω, L.



a) Bestäm den komplexa effekten S, den skenbara effekten $|S|$, den aktiva effekten P, den reaktiva effekten Q och effektfaktorn $\cos\phi$ för motorn uttryckt i U, R, ω, L.
b) Hur stort är toppvärdet av strömmen, $|I|$?
c) En kapacitans C parallellkopplas med motorn för att minska strömmen i ledningen genom spänningskällan. Bestäm den komplexa effekten, den skenbara effekten, den aktiva effekten, den reaktiva effekten och effektfaktorn för kondensatorn.



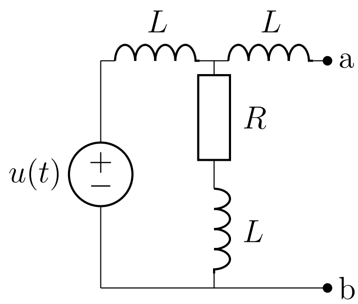
d) Hur ska kapacitansen C väljas för att den totala reaktiva effekten i motorn och kondensatorn tillsammans, ska bli noll? Vad blir den totala komplexa effekten levererad av källan i detta fall.
e) Hur stort är toppvärdet av strömmen $|I_1|$ efter inkopplingen av kapacitansen i 1d? Vad blir kvoten $|I_1/I|$?

---

2 av 4) En damsugare på $P = 1000$W och n st glödlampor på vardera $P = 60$W är inkopplade i olika vägguttag men till samma säkring (propp). Säkringen är på $I_p = 6\sqrt{2}$A dvs den löser ut om strömmens amplitud överstiger detta värde. Spänningen i vägguttagen är $U_0 = 230\sqrt{2}$V. Glödlamporna anses vara rent resistiva. Hur många lampor kan vara inkopplade, utan att proppen går, om
a) dammsugarens effektfaktor är $\cos\phi = 1$
b) dammsugarens effektfaktor är $\cos\phi = 0.9$
Ledning. Modellera källan som ideal. Propp-strömmen är strömmen ut från den ideala källan, och behandlas som en ideal propp. Dvs den är en kortslutning tills strömmen är över I_p där efter 'går proppen' vilket modelleras med ett avbrott.

---

3 av 4) Låt $u(t)$ motsvara den komplexa spänningen $U(\omega)$.



a) Bestäm en ekvivalent Norton 2-pol för kretsen.
b) Antag att för ett fixt ω_0 man skulle vilja representera den inre impedansen med hjälp av resistanser, spolar och kondensatorer. Hur få och vilka av dessa komponenter behöver du för att representera impedansen? Vad blir värdet i termer av ω_0, R och L på dina komponenter?
c) Vilken impedans ska kopplas mellan ab för att få ut maximal aktiv effektutveckling i lasten? Vad blir aktiv och reaktiv effekt i lasten för detta val av last?

4 av 4) Ideal operationsförstärkare, impedans. U är den komplexa amplituden för en växelströmskälla.

a) Kretsen A) till höger har fyra noder. Vilka är de? Bestäm hur potentialerna i dessa noder förhåller sig till varandra. Kommer virtuell jord ($V_+ = V_-$) in här?

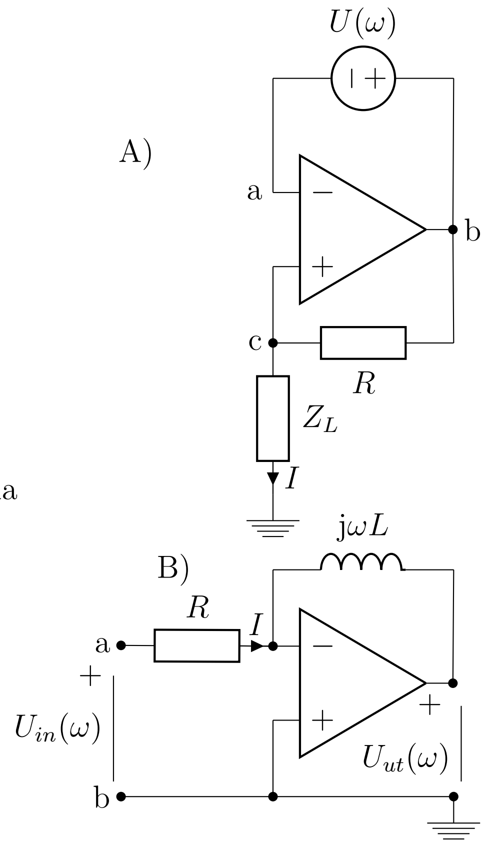
b) Använd Kirchhoffs spänningslag för att potential vandra i krets A från a, till b till c, introducera nödvändiga strömmar. Vad blir strömmen genom R uttryckt i U.

c) Vad gäller för strömmarna in i +/- ingången på operationsförstärkaren? Med denna kunskap bestäm hur strömmarna går i nod c och i nod b.

d) Kretsen A) levererar strömmen I till lasten Z_L oberoende av lastens storlek. Detta är en typisk karakteristik för en viss källa, vilken ideal källa kan representeras av kretsen?

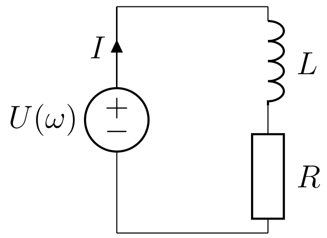
e) I krets B) bestäm relationen mellan U_{ut}/U_{in}. Ledning: Introducera noder, potentialvandra, bestäm strömmen I.

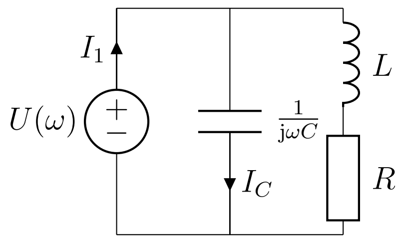
f) En krets inimpedans definieras som $Z_{in} = U_{in}/I$ med de introducerade riktningarna. Vad är inimpedansen för krets B.



Lösningsförslag till hemuppgift 3 för EI1110 VT 2014

Lärare: Andrés Alayón Glazunov





1a) Vi har $S = UI^*/2$. Vi söker därför strömmen. **(delsvar:)**

$$I = \frac{U}{R + \mathrm{j}\omega L} \Rightarrow S = \frac{|U|^2}{2(R - \mathrm{j}\omega L)} = |U|^2 \frac{R + \mathrm{j}\omega L}{2(R^2 + (\omega L)^2)}, \tag{1}$$

Aktiv P och reaktiv effekt Q blir

$$P = \mathrm{Re}\, S = \frac{|U|^2 R}{2(R^2 + (\omega L)^2)},\ Q = \mathrm{Im}\, S = \frac{|U|^2 \omega L}{2(R^2 + (\omega L)^2)} \tag{2}$$

Vi har $S = |S|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi}$. Vi söker nu effektfaktorn $\cos\phi$. Om man ritar den rätvinkliga triangeln $|S|$, P och Q, så kan vi bestämma: skenbareffekt $|S|$ och effektfaktorn $\cos\phi$ genom

$$|S| = \frac{|U|^2}{2\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}},\ \cos\phi = \frac{P}{|S|} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$

1b) Toppvärdet av strömmen är **(Svar)**$|I| = |U|/\sqrt{R^2 + (\omega L)^2} = \frac{2|S|}{|U|}$. Då $|S| = |U||I^*|/2$. Båda sätten ger samma resultat.

1c) Vi får strömmen genom kondensatorn: $I_C = U/(1/(\mathrm{j}\omega C)) = \mathrm{j}\omega CU$. Vi får den komplexa effekten: $S_C = UI_C^*/2 = U(-\mathrm{j}\omega C)U^*/2 = -\mathrm{j}\omega C|U|^2/2$ [rättat]. Skenbara effekten: $|S_C| = \omega C|U|^2/2$. Aktiva effekten $P_C = 0$, reaktiva effekten: $Q_C = -\omega C|U|^2(2$. Effektfaktorn: $\cos\phi_C = P_C/|S_C| = 0$. **(Svar)**

1d) Vi söker C så att Q för motor och kondensator är noll. Här är U känd. Vi får $S = UI^*/2 = |U|^2/(2Z)$. Vi får att $Q = 0$ om $Q = \mathrm{Im}\, S = 0$ vilket blir är det samma som att $\mathrm{Im}(1/Z) = \mathrm{Im}\, Y = 0$, eftersom $|U|$ är reell. Vi får att admittansen Y för kondensator och spole blir

$$Y = \frac{1}{Z} = \mathrm{j}\omega C + \frac{1}{R + \mathrm{j}\omega L} = \mathrm{j}\omega C + \frac{R - \mathrm{j}\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} \Rightarrow \mathrm{Im}\, Y = \omega C - \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} \tag{3}$$

Vi ser att **(delsvar:)**$C = L/(R^2 + (\omega L)^2)$ ger $\mathrm{Im}\, Y = 0$ och följakligen $Q = 0$. Notera att vi kan bara åstadkomma $\mathrm{Im}\, Y = 0$ för en viss vinkelfrekvens, då värdet på C beror på vinkelfrekvensen.

För detta val av C får vi $Y = R/(R^2 + (\omega L)^2)$, vilket ger att källan leverera den komplexa effekten**(delsvar:)**

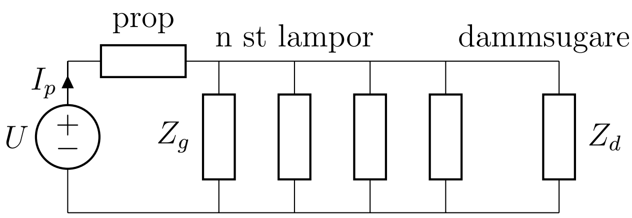
$$S = \frac{|U|^2 Y}{2} = \frac{|U|^2 R}{2(R^2 + (\omega L)^2)}. \tag{4}$$

1e) Vi kan beräkna $I_1 = U/Z = UY = UR/(R^2 + (\omega L)^2)$, vilket ger **(Svar)**

$$|I_1| = \frac{|U|R}{R^2 + (\omega L)^2}, \Rightarrow \frac{|I_1|}{|I|} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} < 1 \tag{5}$$

---

2) Lampor och damsugare på samma prop sitter parallellkopplade, se figur. (Jämför att skruva ur en lampa på en julbelysning som är seriekopplad).



Den totala effektförbrukningen är summan av effektförbrukningen i varje komponent: $S = S_d + nS_g$. Där S_g är glödlampans komplexa effekt, S_d är dammsugaren komplexa effekt. Vi noterar att då lampan är rent resistiv får vi $S_g = P_g = 60$W. Vi vet också att $S = UI_p^*/2$. Vi får alltså:

$$S = S_d + nP_g = \frac{1}{2}UI_p^* \Rightarrow |I_p| = \frac{2|S|}{|U|} \tag{6}$$

För att uttrycka S_d i termer av P_d och effektfaktor, notera att: $P_d = |S_d|\cos\phi$, och $S_d = |S_d|(\cos\phi + \mathrm{j}\sin\phi)$, vi får därför att

$$\begin{aligned} |S| = |S_d + nP_g| = ||S_d|\cos\phi + \mathrm{j}|S_d|\sin\phi + nP_g| &= \sqrt{(|S_d|\cos\phi + nP_g)^2 + (|S_d|\sin\phi)^2} \\ &= \sqrt{(P_d + nP_g)^2 + (P_d\tan\phi)^2} \end{aligned} \tag{7}$$

Vi löser nu ut n ur ekvationen $|S| = |I_p||U|/2$ mha (7) i termer av P_d, P_g, U och ϕ: (kvadrera höger och vänster led, etc)

$$n = \frac{\sqrt{\frac{1}{4}(|I_p||U|)^2 - (P_d\tan\phi)^2} - P_d}{P_g} \tag{8}$$

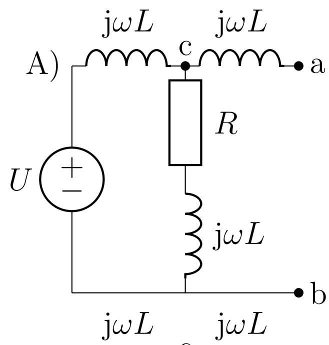
2a) $\cos\phi = 1$, ger $\tan\phi = 0$ och där med:**(Svar)**

$$n = \frac{\frac{1}{2}(|I_p||U|) - P_d}{P_g} = \frac{\frac{1}{2}230\sqrt{26}\sqrt{2} - 1000}{60} \approx 6.3 \Rightarrow n = 6\text{st} \tag{9}$$

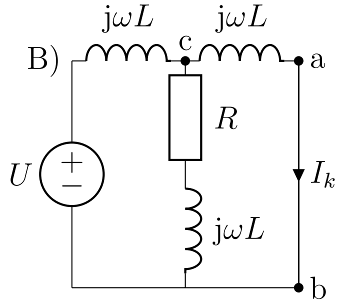
2b) $\cos\phi = 0.9$ ger $\tan\phi \approx 0.484$. Vi får:**(Svar)**

$$n = \frac{\sqrt{(230\cdot 6)^2 - (1000\cdot 0.484)^2} - 1000}{60} \approx 4.9 \Rightarrow n = 4\text{st} \tag{10}$$

3a) Vi börjar med att bestämma total impedans vid nollställd spänningskälla. Vi får **(delsvar:)**



$$\begin{aligned} Z_i = [\mathrm{j}\omega L//(R + \mathrm{j}\omega L)] + \mathrm{j}\omega L &= \frac{\mathrm{j}\omega L(R + \mathrm{j}\omega L)}{R + \mathrm{j}2\omega L} + \mathrm{j}\omega L \\ &= \frac{\mathrm{j}\omega L(2R + 3\mathrm{j}\omega L)}{R + 2\mathrm{j}\omega L} \end{aligned} \tag{11}$$



För att bestämma kortslutningsströmmen, kan vi använda olika metoder tex $U_{ab} = Z_i I_k$ och bestämma tommgångspänningen i figur A). Då konstaterar vi att mellan nod a och nod c går det ingen ström (nod a är öppen) potential vandring från a till c ger $V_a = V_c$. Vi kan därför bestämma tomgångspänningen mellan ab genom att ta reda på spänningen över cb. Vi får denna genom spänningsdelning:

$$U_{ab} = U_{cb} = V_c - V_b = U\frac{R + \mathrm{j}\omega L}{R + 2\mathrm{j}\omega L} \tag{12}$$

Kortslutningsströmmen (och Norton-strömmen) blir därför: **(delsvar:)**

$$I_k = \frac{U_{ab}}{Z_i} = U\frac{R + \mathrm{j}\omega L}{\mathrm{j}\omega L(2R + 3\mathrm{j}\omega L)} \tag{13}$$

Alternativt kan vi använda krets B) för att kortsluta kretsen i ab enligt figur B) och genom nodanalys bestämma V_c (om vi behandlar b som ref). Vi får KCL i till:

$$\frac{V_c - U}{\mathrm{j}\omega L} + \frac{V_c}{R + \mathrm{j}\omega L} + \frac{V_c}{\mathrm{j}\omega L} = 0 \Rightarrow V_c = U\frac{R + \mathrm{j}\omega L}{2R + 3\mathrm{j}\omega L} \Rightarrow I_k = \frac{V_c}{\mathrm{j}\omega L} = U\frac{R + \mathrm{j}\omega L}{\mathrm{j}\omega L(2R + 3\mathrm{j}\omega L)}. \tag{14}$$

Vilket stämmer överens med ovan svar. Vi har alltså kontrollerat svaret genom att använda två olika metoder. Nortonkretsen syns i 3c till vänster.

3b) Vi kan förenkla separera reell och imaginär del:

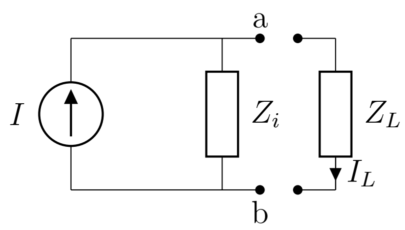
$$Z_i = \frac{\mathrm{j}\omega L(2R + 3\mathrm{j}\omega L)(R - 2\mathrm{j}\omega L)}{R^2 + 4(\omega L)^2} = \frac{(\omega L)^2 R}{R^2 + 4(\omega L)^2} + \mathrm{j}2\omega L\frac{R^2 + 3(\omega L)^2}{R^2 + 4(\omega L)^2} \tag{15}$$

Vi har $Z_i = R_i + \mathrm{j}X_i$. Notera att $X_i > 0$, vilket betyder att det är en spole. Vi ser att om vi använder en resistans R_i vid vinkelfrekvensen ω_0: **(Svar)**

$$R_i = \frac{(\omega_0 L)^2 R}{R^2 + 4(\omega_0 L)^2},\ X_i = \omega_0 L_i = 2\omega_0 L\frac{L(R^2 + 3(\omega_0 L)^2)}{R^2 + 4(\omega_0 L)^2}) \tag{16}$$

Vi behöver alltså 2st komponenter, en spole och en resistor, med värden som ovan.

3c) (Anpassning) Impedansen Z_L som ansluts till två-polen ska vara Z_i^*. Här betraktar vi Norton strömmen I och den inre impedansen Z_i som givna. Hur kan vi se det: Vi ska maximera den aktiva effekten i lasten. Vi ansluten lasten till höger till kretsen i punkterna ab, och får att strömmen i lasten ges av strömdelning:



$$I_L = I\frac{Z_i}{Z_i + Z_L}, \Rightarrow P_L = \frac{1}{2}\operatorname{Re}(|I_L|^2 Z_L) = \frac{1}{2}|I|^2\frac{|Z_i|^2}{|Z_i + Z_L|^2}\operatorname{Re} Z_L \tag{17}$$

Låt $Z_i = R_i + \mathrm{j}X_i$, $Z_L = R_L + \mathrm{j}X_L$. Uttrycket ovan kan skrivas som

$$P_L = \frac{1}{2}|I|^2\frac{(R_i)^2 + (X_i)^2}{((R_L + R_i)^2 + (X_L + X_i)^2)}R_L \tag{18}$$

Om vi tittar närmare på uttrycket ser vi att X_L förekommer endast i nämnaren, och vi maximerar P_L genom att sätta $(X_L + X_i)^2 = 0$, dvs $X_i = -X_L$. Detta är tillåtet då reaktansen X_L kan vara kapacitiv eller induktiv. Det som är kvar är precis samma fall som för likström (Norton-fallet). Vi ser detta genom att ta derivatan map R_L på det kvarvarande uttrycket för P_L:

$$\frac{\partial}{\partial R_L}P_L(X_L = -X_i) = \frac{\partial}{\partial R_L}\frac{1}{2}|I|^2\frac{R_i^2 + X_i^2}{(R_i + R_L)^2}R_L = \frac{1}{2}|I|^2(R_i^2 + X_i^2)\left(\frac{1}{(R_L + R_I)^2} - \frac{2R_L}{(R_L + R_i)^3}\right)$$
$$= \frac{1}{2}|I|^2(R_i^2 + X_i^2)\left(\frac{R_i - R_L}{(R_L + R_I)^3}\right) = 0 \tag{19}$$

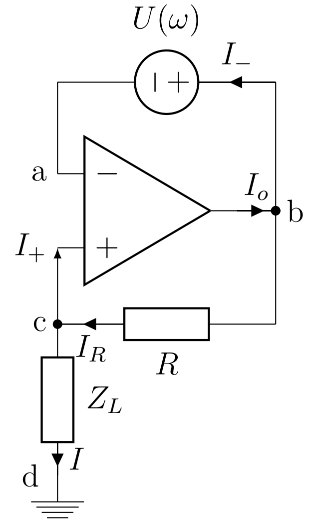
Lösningen blir $R_L = R_i$. Vi får alltså att $Z_L = R_i - \mathrm{j}X_i = Z_i^*$. Aktiv P_L och reaktiv effekt Q_L får vi ur den komplexa effekten **(Svar)**

$$S_L = \frac{1}{2}|I_L|^2 Z_L = \frac{1}{2}|I|^2\frac{R_i^2 + X_i^2}{4R_i^2}(R_i + \mathrm{j}X_i) \ \Rightarrow P_L = \frac{1}{2}|I|^2\frac{R_i^2 + X_i^2}{4R_i},\ Q_L = \frac{1}{2}|I|^2\frac{R_i^2 + X_i^2}{4R_i^2}X_i, \tag{20}$$

Vi noterar att detta är precis samma uttryck som för en spänningskälla eftersom vi kommer ihåg att Theveninspänningen U är relaterad till I som $U = Z_i I$ vilket ger $|U|^2 = |I|^2(R_i^2 + X_i^2)$.

4a,b) De fyra noderna är jorden, som vi kallar nod d, samt nod a,b och c. Vi vet att $V_d = 0$ samt $V_a = V_c$ (virtuell jord). Genom potential vandring mellan a och b får vi att $V_a + U = V_b$. Inför vi strömmen I_R får vi i potential vandring från b till c att

A)



$$V_b - RI_b = V_c \;\Rightarrow V_a + U - RI_R = V_c \tag{21}$$

Men vi fick ovan att pga virtuell jord att $V_c = V_a$ så

$$U - RI_R = 0.\ I_R = \frac{U}{R} = \textbf{Svar} \tag{22}$$

Svar a $V_a = V_c, V_c = V_b - U,\ V_d = 0.$

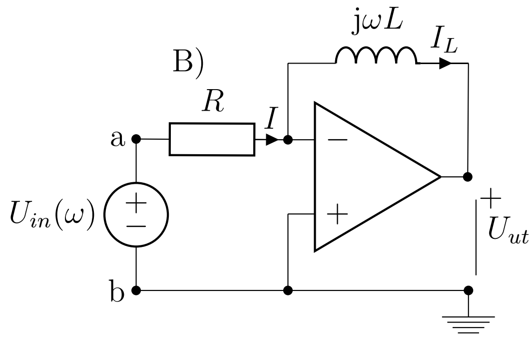
4c,d) I en ideal op-amp har vi $I_- = I_+ = 0$. Vi får KCL i nod c som $I_R = I + I_+$, dvs $I = I_R = \frac{U(\omega)}{R}$, [**delsvar**] och som vi visat ovan är I oberoende av lasten Z_L.

I punkten b har vi KCL $I_o = I_R + I_- = I_R = U/R$ dvs hela strömmen levereras av den aktiva operationsförstärkaren. [**delsvar**]

Vi kommer ihåg definitionen av en ideal strömkälla: Den levererar samma ström oavsett vilken spänning som går igenom den.

Operationsförstärkarkretsen ovan är kopplad till lasten (och till jord). Den levererar en ström genom lasten Z_L och eftersom I är oberoende av vilken last vi lägger på mellan cd liknar den en ideal strömkälla. Detta stämmer väl med verkligheten i det området som operationsförstärkaren är ideal. Naturligtvis kan op:ampen endast leverera denna ström så länge operationsförstärkarens matarspänning kan leverera strömmen I_o. Analysen ovan stämmer, tills vi ramlar utanför idealområdet för operationsförstärkaren, dvs när op:n inte längre kan leverera tillräckligt stora strömmar I_o. [**Svar d**]

4e) Bestäm U_{ut}/U_{in}. Vi kan alltid på insignalen koppla en ideal källa $U_{in}(\omega)$. Här har vi att $V_- = V_+$ virtuell jord, och eftersom $V_+ = 0$ får vi att $V_- = 0$ dvs $V_b = V_- = 0$.



Potentialvandra från b till a till - ger:

$$V_b + U_{in} - IR = V_- \Rightarrow U_{in} = RI. \tag{23}$$

Vi vet att det inte går några strömmar in i $\pm$-ingångarna. Dvs strömmen genom spolen är $I_L = I$. Potentialvandra från - till op-ampens utgång ned till jord:

$$V_- - I\mathrm{j}\omega L - U_{ut} = 0 \Rightarrow U_{ut} = -\mathrm{j}\omega LI \tag{24}$$

Om vi nu använder uttrycket för I från (23) får vi

$$U_{ut} = -\frac{U_{in}}{R}\mathrm{j}\omega L \Rightarrow \frac{U_{ut}}{U_{in}} = -\frac{\mathrm{j}\omega L}{R} \tag{25}$$

$-j = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/2}$. Vi ser därför att $u_{ut}(t) = u_{in}(t)\frac{\omega L}{R}\cos(\omega t - \pi/2)$. Vi får att kretsen ger ett fas-skift, och att den växer i amplitud med ω. Dvs för små ω kommer nästan ingen signal igenom, och för stora ω får vi en förstärkning. Denna typ av funktion, mellan in/ut signal kallas ett filter. Här släpper det igenom höga frekvenser, men dämpar låga frekvenser (små ω). Sådana filter kallas för högpass-filter. Notera att när signalen blir i amplitud blir stor (större än matarspänningen), kommer operations-förstärkaren att klippa signalen.

4f) Inimpedansen blir $Z_{in} = U_{in}/I$, men $I = U_{in}/R$ vi får $Z_{in} = R$. **Svar**.
