Kontrollskrivning i Elkretsanalys för EI1110 del 2

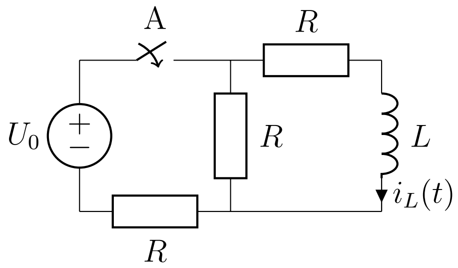
Datum/tid: 2014-02-25, kl 08-12. Hjälpmedel: Papper och penna.
Endast en uppgift per blad. Skriv tydligt och läsbart så att dina lösningar kan rättas.
Namn och personnummer på varje blad. Lärare: Andrés Alayón Glazunov

---

1) Impedanserna $Z_1 = R - \frac{j}{\omega C}$ och $Z_2 = R$ är parallellkopplade. Dessa två impedanser ersätts med en ekvivalent admittans.
a) [2.5p] Bestäm den resulterande ekvivalenta konduktansen.
b) [2.5p] Bestäm den resulterande ekvivalenta susceptansen.

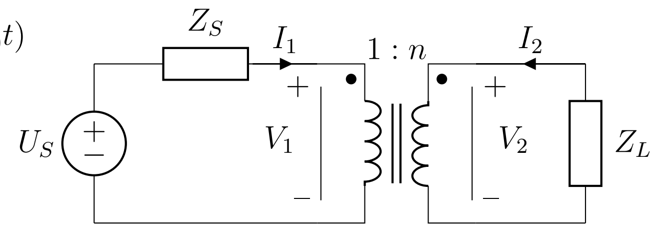
---

2) Switchen A stängs vid $t = 0$ men vi antar att det råder stationärt tillstånd vid stängningen. Det går en ström $i_L(0) = \frac{2U_0}{3R}$ strax innan switchen stängs. U_0, R och L är kända storheter.
a) [2p] Bestäm strömmen $i_L(\infty)$ genom spolen L när oändligt lång tid har gått efter att switchen stängts. Bestäm tidskonstanten för kretsen.
b) [2p] Bestäm strömmen $i_L(t)$ för tider $t \geq 0$.
c) [1p] Bestäm den utvecklade effekten i spolen $p_L(t)$ för tider $t \geq 0$.



---

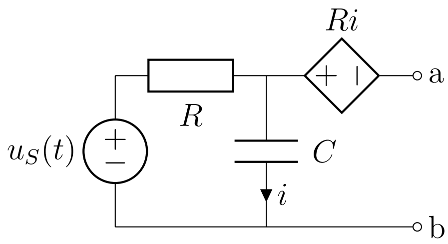
3) En tidsharmonisk spänningskälla $u_S(t) = U_0 \cos(\omega_0 t)$ kopplas till en ideal transformator enligt figuren till höger. På primär kretsen ligger en komponent med impedansen $Z_S = R - \frac{j}{\omega_0 C}$ i serie med källan. Den sekundära kretsen belastas med impedansen Z_L. U_0, ω_0, n, R och C är kända storheter.



a) [2p] Nämn de fundamentala egenskaperna som en ideal transformator besitter med avseende på kopplingen mellan spolarna och med avseende på förlusterna i transformatorn. Ange sambandet mellan spänningarna V_1 och V_2 och mellan strömmarna I_1 och I_2.
b) [2p] Bestäm impedansen Z_L så att maximal aktiv effektutveckling erhålles i lasten.
c) [1p] Ange maximal aktiv effektutveckling i lasten som funktion av de kända storheterna.

---

4) Spänningskällan som visas i kretsen till höger avger spänningen $u_S(t) = U_0 \cos(\omega t + \phi_0)$. U_0, ϕ_0, ω, R och C är kända. Bestäm följande storheter.
a) [2p] Tomgångsspänningen U_{oc} med avseende på polparet ab.
b) [2p] Kortslutningsströmmen I_{sc} med avseende på polparet ab.
b) [1p] Thévenin impedansen.
Alla svar ska anges på polär form, till exempel $U_{\text{oc}} = |U_{\text{oc}}| \mathrm{e}^{j \arg\{U_{\text{oc}}\}}$.



Kontrollskrivning del 2

1.

$$Y = \frac{1}{Z_{tot}} = \frac{1}{R - \frac{j}{\omega C}} + \frac{1}{R}.$$

$G = \mathrm{Re}\{Y\}$ är konduktans

$B = \mathrm{Im}\{Y\}$ är susceptans

Vi transformerar Y på kartesisk form.

$$Y = \frac{R + \frac{j}{\omega C}}{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}} + \frac{1}{R}.$$

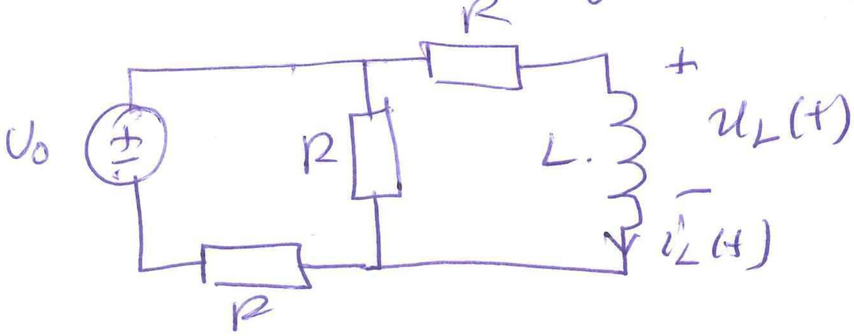
$$Y = \frac{1 + 2(R\omega C)^2}{R(1 + (R\omega C)^2)} + j\frac{\omega C}{1 + (R\omega C)^2}.$$

a) $$G = \frac{1 + 2(\omega RC)^2}{R(1 + (\omega RC)^2)}$$

b) $$B = \frac{\omega C}{1 + (\omega RC)^2}.$$

2 När switchen stängs får vi följande krets.

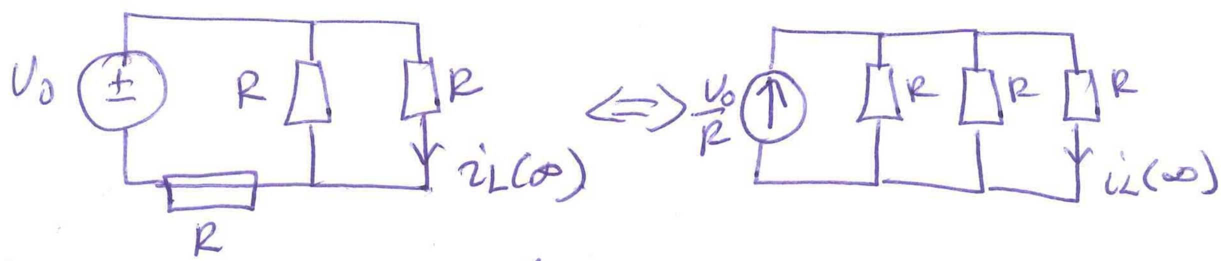
a)



Efter tillräckligt lång tid är spänningen över spolen lika med noll eftersom transienten har lagt sig och stationärt tillstånd inträffar.

$i_L(\infty) = \text{konstant}$. $\quad u_L(\infty) = L \left.\frac{di}{dt}\right|_{t=\infty} = 0$.

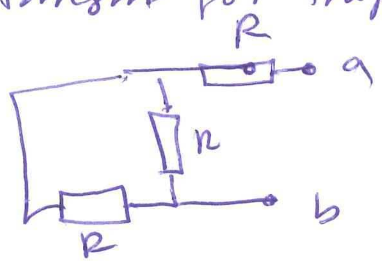
Vi kan ersätta spolen med ett streck.



Vi får $i_L(\infty) = \dfrac{\frac{1}{R}}{\frac{3}{R}} \dfrac{U_0}{R}$.

$$\boxed{i_L(\infty) = \frac{U_0}{3R}}$$

För att få tidskonstanten bestämmer vi Thévenin resistansen för tvåpolen inkopplat till spolen.



$R_{Th} = \dfrac{3R}{2}$. $\qquad \tau = \dfrac{L}{R_{Th}}$.

$$\boxed{\tau = \frac{2L}{3R}}$$

② ③

b) Spänningskällan är konstant då är strömmen genom spolen för $t \geq 0$

$$i_L(t) = i_L(\infty) + (i_L(0) - i_L(\infty))e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

med $i_L(0) = \frac{2U_0}{3R}$, $i_L(\infty) = \frac{U_0}{3R}$, $\tau = \frac{2L}{3R}$

vilket ger.

$$\boxed{i_L(t) = \frac{U_0}{3R}\left(1 + e^{-\frac{3R}{2L}t}\right)}$$

c) Vi använder den passiva teckenkonventionen.

$$P_L(t) = u_L(t)\, i_L(t)$$

$$u_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}$$

$$= L\frac{d}{dt}\left(\frac{U_0}{3R}\left(1 + e^{-\frac{3R}{2L}t}\right)\right)$$

$$= L\frac{U_0}{3R}\left(0 + \left(-\frac{3R}{2L}\right)e^{-\frac{3R}{2L}t}\right)$$

$$u_L(t) = -\frac{U_0}{2}e^{-\frac{3R}{2L}t}$$

$$\boxed{P_L(t) = \frac{-U_0^2}{6R}\left(1 + e^{-\frac{3R}{2L}t}\right)e^{-\frac{3R}{2L}t}}$$

(3) (4)

a) (1) Det råder fast koppling mellan spolarna i en ideal transformator. ($K=1$) (2) En ideal transformator är förlustfri.

Sambandet mellan spänningarna är

$$V_1 = \frac{V_2}{n}.$$

Sambandet mellan strömmarna är:

$$I_1 = -nI_2.$$

b) Inimpedansen för transformatorn är

$$Z_{in} = \frac{Z_L}{n^2}.$$

För maximal aktiv effektutveckling:

$$Z_{in} = Z_s^*.$$

Då får vi att

$$Z_L = n^2 Z_s^*$$

$$\boxed{Z_L = n^2\left(R + \frac{j}{\omega_0 C}\right)}$$

c) Vid maximal (aktiv) effektutveckling eller impedansanpassning får vi

$$\boxed{P_{max} = \frac{U_0^2}{4R}}$$

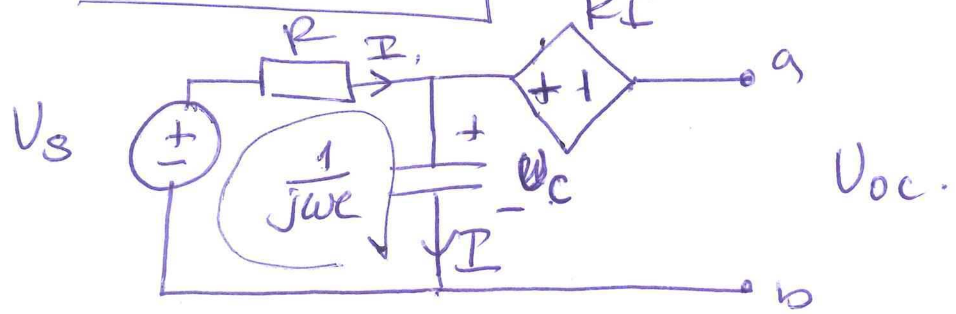
4

a) Vi ritar om kretsen med storheterna i frekvensdomänen. Vi använder $j\omega$-metoden.

$$u_s(t) = \mathrm{Re}\{ U_0 \cos(\omega t + \varphi_0) + j U_0 \sin(\omega t + \varphi_0) \}$$

$$= \mathrm{Re}\{ U_0 e^{j\varphi_0} e^{j\omega t} \}.$$

$$\boxed{U_s = U_0 e^{j\varphi_0}}$$



Det går ingen ström genom beroende spänningskällan. R är i serie med C och U_s.

$$I = \frac{U_s}{R - \frac{j}{\omega C}} \quad ; \quad U_{ab} = U_C - RI.$$

$$U_{ab} = \frac{-\frac{j}{\omega C}}{R - \frac{j}{\omega C}} U_s - \frac{R}{R - \frac{j}{\omega C}} U_s.$$

$$U_{ab} = -\frac{R + \frac{j}{\omega C}}{R - \frac{j}{\omega C}} U_s = -\frac{\omega RC + j}{\omega RC - j} U_s$$

$$|U_{ab}| = \left| -\frac{\omega RC + j}{\omega RC - j} U_s \right|$$

$$= \underbrace{|-1|}_{1} \underbrace{\frac{|\omega RC + j|}{|\omega RC - j|}}_{1} \underbrace{|U_s|}_{U_0}$$

$$= U_0.$$

eftersom $|\omega RC + j| = |\omega RC - j| = \sqrt{(\omega RC)^2 + 1}$

och $|U_s| = |U_0 e^{j\varphi_0}| = |U_0| |e^{j\varphi_0}| = U_0.$

$$\boxed{|U_{ab}| = U_0}$$

$$\arg\{U_{ab}\} = \arg\left\{ -\frac{\omega RC + j}{\omega RC - j} U_s \right\}$$

$$= \frac{\arg\{-1\} \arg\{\omega RC + j\} \arg\{U_s\}}{\arg\{\omega RC - j\}}$$

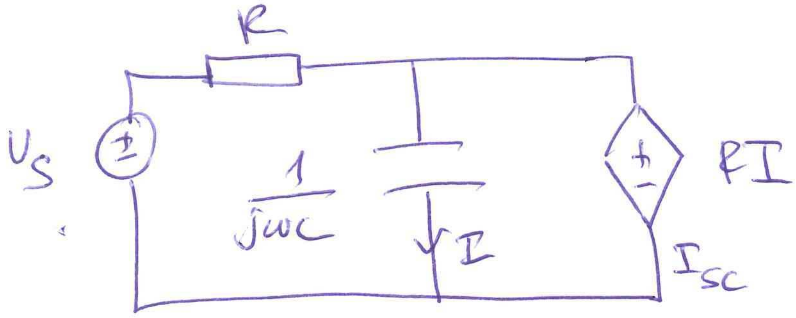
$$= \frac{e^{j\pi} e^{j \operatorname{atan}\left(\frac{1}{\omega RC}\right)} e^{j\varphi_0}}{e^{-j \operatorname{atan}\left(\frac{1}{\omega RC}\right)}}$$

$$\boxed{\arg\{U_{ab}\} = \pi + \varphi_0 + 2 \operatorname{atan}\left(\frac{1}{\omega RC}\right)}$$

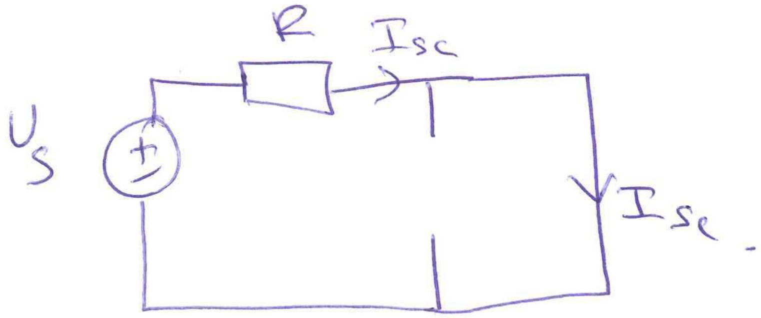
$$\boxed{U_{oc} = U_{ab} = |U_{ab}| e^{j \arg\{U_{ab}\}}}$$

4

b)



$$\frac{1}{j\omega C} I = RI \Rightarrow I = 0 \text{ och } RI = 0.$$



$$I_{sc} = \frac{U_S}{R}$$

$$\boxed{I_{sc} = \frac{U_0}{R} e^{j\varphi_0}}$$

c) $$R_{Th} = \frac{V_{oc}}{I_{sc}} = \frac{U_0 e^{j\left(\pi + \varphi_0 + 2\operatorname{atan}\left(\frac{1}{\omega RC}\right)\right)}}{\frac{U_0}{R} e^{j\varphi_0}}$$

$$\boxed{R_{Th} = R e^{j\left(\pi + 2\operatorname{atan}\left(\frac{1}{\omega RC}\right)\right)}}$$