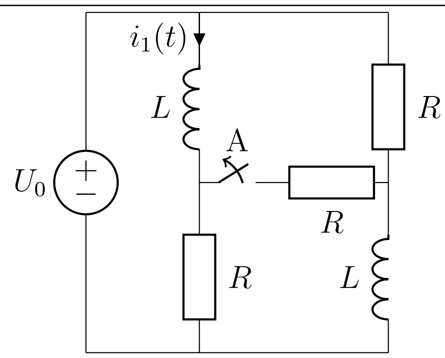
Tentamen i Elkretsanalys för EI1110 del 2

Datum/tid: 2014-03-21, kl 08-13.
Hjälpmedel: Papper och penna. Namn och personnummer på varje blad.
Endast en uppgift per blad. Skriv tydligt och läsbart så att dina lösningar kan rättas.
Godkänt för EI1110 del 2 vid 15p eller högre. Erhållna tentapoäng från KSen högre än 5p kan ersätta uppgifterna 1) och 2). Lärare: Andrés Alayón Glazunov

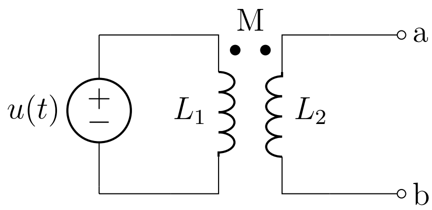
---

1) [5p] Här är U_0 en likspänningskälla. Vid tiden $t = 0$ öppnas kontakten A. Stationärt tillstånd råder för $t < 0$.
a) Bestäm $i_1(t)$ som funktion av tiden, $t \geq 0$.
b) Bestäm kvoten mellan den totala lagrade energin i spolarna vid $t = 0$ och vid $t \to \infty$.



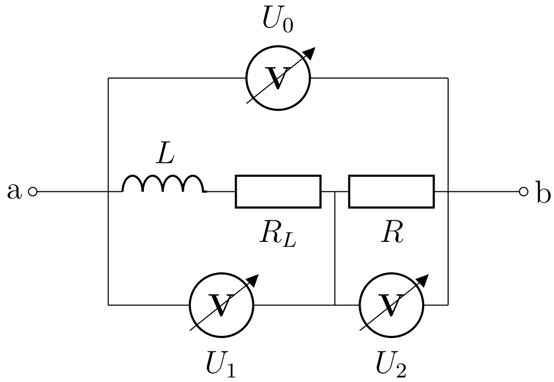
---

2) [5p] Spänningskällan avger signalen $u(t) = U_0 \cos(\omega t + \alpha)$. U_0, ω, α, L_1, L_2 och kopplingsfaktorn k är givna storheter. Bestäm en tvåpolsekvivalent med avseende på ab. Använd jω-metoden. Ange svaret på polär form i de givna storheterna.
(*Ledning*:$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$)



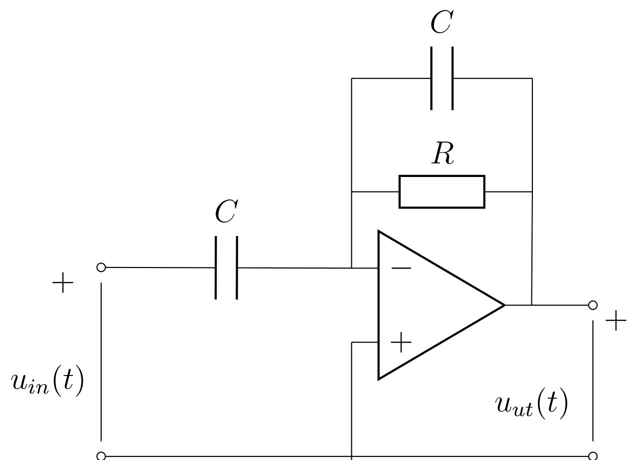
---

3) [5p] En spole kan modelleras med hjälp av en induktans L i serie med en resistans R_L. För att bestämma hur mycket effekt förbrukas i spolen när en tidsharmonisk ström går genom den kan vi ta hjälp av kretsen till höger. Mätvärdena U_0, U_1 och U_2 samt resistansen R är kända storheter men inte L och R_L. En voltmeter anger effektivvärdet för spänningen. Voltmetrarna är ideala.
a) Bestäm effektivvärdet för strömmen som går genom resistorn R.
b) Bestäm den aktiva effekten som förbrukas i spolen uttryckt i de kända storheterna.
(*Ledning*: $(a + b)^2 - a^2 - b^2 = 2ab$.)



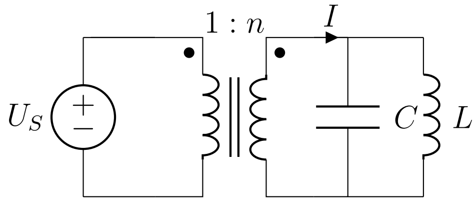
---

4) [5p] Kretsen till höger innehåller en operationsförstärkare som kan antas vara ideal.
a) Bestäm överföringsfunktionen $H(\omega)$.
b) Ange filtrets gain i dB.
c) Ange typ av filter. Förklara.

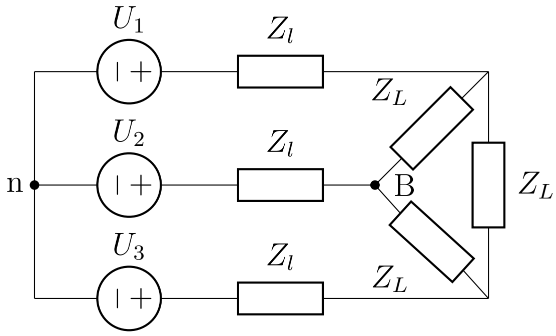


Var god vänd.

5) [5p] En tidsharmonisk spänningskälla $u_S(t) = U_0 \cos(\omega t)$ kopplas till en ideal transformator enligt figuren till höger. Den sekundära kretsen belastas med en kapacitans parallellkopplad med en induktans.
U_0, ω, n, L och C är kända storheter.
a) Bestäm strömmen I. Ange svaret på polär form.
b) Bestäm frekvensen för vilken lastens ekvivalenta admittans är lika med noll.



6) [5p] En symmetrisk, $\Delta-$kopplad belastning matas från ett tre-fasnät med fasspänningar som förhåller sig till varandra som $U_1 = U_2 e^{j\frac{2\pi}{3}} = U_3 e^{j\frac{4\pi}{3}} = U$. Ledningsimpedanserna och lastimpedanserna är lika med $Z_l = R + j\omega L$ respektive $Z_L = 3R + j3\omega L$. Bestäm spänningen U_{Bn} i nod B relativt nod n i figuren. Ange svaret på polär form.
(*Ledning:* $\Delta - Y$ transformation)



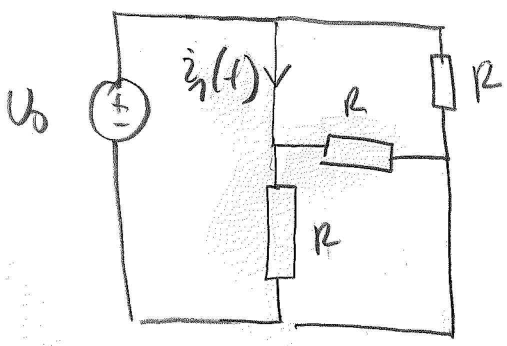
Tentamen i Elkretsanalys för EI1110 del 2.

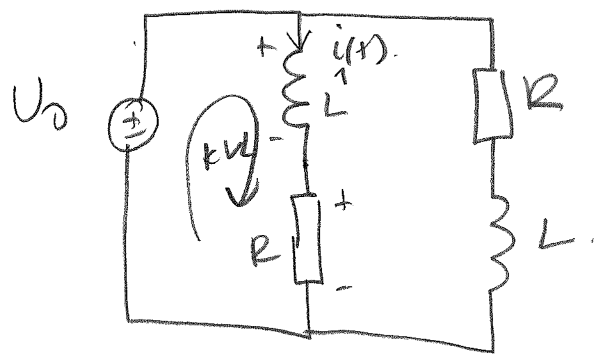
Lösningsförslag

P1

a) Vi ritar om kretsarna för $t=0_-$ och $t \geq 0_+$ och $t \to \infty$.

$\boxed{t = 0_-}$ $\boxed{t \geq 0_+}$





Vi ser att $i_1(0_-) = \frac{2U_0}{R}$

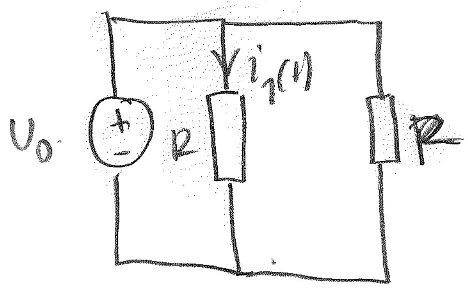
KVL ger.

$$U_0 - L\frac{di_1}{dt} - Ri_1 = 0.$$

Vi skriver om.

$$\frac{di_1}{dt} + \frac{i_1}{L/R} = \frac{U_0}{L}, \quad L/R = \tau_0$$

$\boxed{t \to \infty}$



Lösningen är på formen $t \geq 0$

$$i_1(t) = i_1(\infty) + (i_1(0) - i_1(\infty))e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Vi ser att $i_1(\infty) = \frac{U_0}{R}$

Insättning av värdena ger

$$\boxed{i_1(\infty) = \frac{U_0}{R}\left(1 + e^{-\frac{Rt}{L}}\right)}$$

b) $W_0 = \frac{1}{2} L i_1^2(0)$

$W_\infty = \frac{1}{2} L i_1^2(\infty) \Rightarrow \frac{W_0}{W_\infty} = \left(\frac{i(0)}{i(\infty)}\right)^2 = 4$ $\boxed{\frac{W_0}{W_\infty} = 4}$

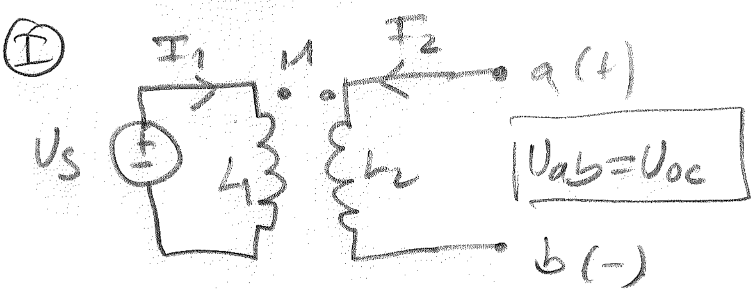
Lösningsförslag

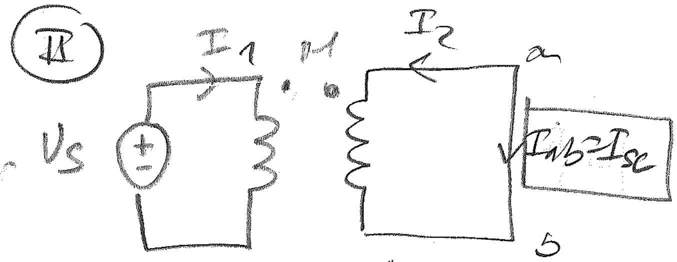
P2. Vi går över till frekvensdomän.

$$u_s(t) = U_0 \cos(\omega t + \alpha) = \mathrm{Re}\{U_0 e^{j(\omega t + \alpha)}\}$$
$$= \mathrm{Re}\{U_0 e^{j\alpha} e^{j\omega t}\}$$
$$= \mathrm{Re}\{U_s e^{j\omega t}\}$$

$$\boxed{U_s = U_0 e^{j\alpha}}$$

samverkande flöden





$$\boxed{Z_{Th} = \frac{U_{oc}}{I_{sc}}}$$

KVL på primär krets ger

$$U_s = j\omega L_1 I_1 + j\omega M \cancel{I_2}^{\,0}$$

KVL på sekundär krets ger

$$U_{oc} = j\omega L_2 \cancel{I_2}^{\,0} + j\omega M I_1$$

Men $I_2 = 0$

$$U_{oc} = \frac{M}{L_1} U_s \quad , \; M = k\sqrt{L_1 L_2}$$

$$\boxed{U_{oc} = k\sqrt{\frac{L_2}{L_1}}\, U_0 e^{j\alpha}}$$

KVL på primär krets ger

$$U_s = j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_2$$

KVL på sekundär krets ger

$$0 = j\omega L_2 I_2 + j\omega M I_1$$

$$I_1 = -\frac{L_2}{M} I_2$$

$$I_2 = \frac{M U_s}{j\omega (M^2 - L_1 L_2)}$$

$$\boxed{I_{sc} = \frac{k\, U_0 e^{j(\alpha - \frac{\pi}{2})}}{\omega\sqrt{L_1 L_2}\,(1 - k^2)}}$$

$$\boxed{Z_{Th} = \omega L_2 (1 - k^2) e^{j\frac{\pi}{2}}}$$

Lösningsförslag

P3 a) $$\boxed{I = \frac{U_2}{R}}$$

Effektivvärde för strömmen som går genom resistansen R.

b) $$U_0 = \sqrt{(\omega L)^2 + (R+R_L)^2}\, I$$

$$U_1 = \sqrt{(\omega L)^2 + R_L^2}\, I$$

$$U_2 = R I.$$

I strömmen som går genom spolen (L, R_L) och resistorn R.

$$U_0^2 = \left((\omega L)^2 + (R+R_L)^2\right) I^2$$

$$U_1^2 = \left((\omega L)^2 + R_L^2\right) I^2$$

$$U_2^2 = R^2 I^2$$

Vi använder $(a+b)^2 - a^2 - b^2 = 2ab$

$$U_0^2 - U_1^2 - U_2^2 = 2RR_L I^2$$

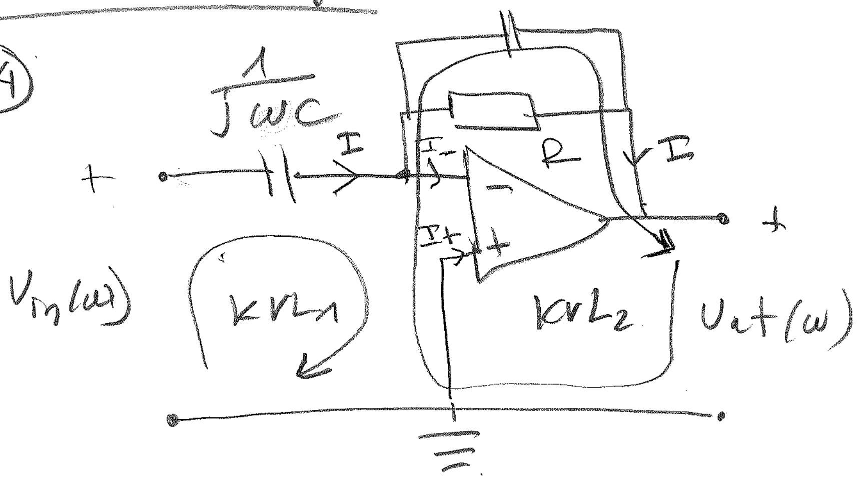
Aktiv effekt

$$P = R_L I^2$$

$$\boxed{P = \frac{U_0^2 - U_1^2 - U_2^2}{2R}}$$

Lösningsförslag.

P4



↙ I frekvensdomän.

Ideal OP-AMP

$I_- = I_+ = 0$

$V_- - V_+ = 0$

$$H(\omega) = \frac{U_{ut}(\omega)}{U_{in}(\omega)}$$

KVL₁ ger:

$$U_{in} - \frac{I}{j\omega C} = 0$$

$$U_{in} = \frac{I}{j\omega C}$$

KVL₂ ger:

$$-\frac{I}{\frac{1}{R}+j\omega C} - U_{ut} = 0.$$

$$U_{ut} = \frac{-IR}{1+j\omega RC}.$$

a) $$\boxed{H(\omega) = \frac{-j\omega RC}{1+j\omega RC}}$$

b) $$\boxed{|H(\omega)|_{dB} = 20\log|H(\omega)| = -10\log\left(1+\left(\frac{\omega_B}{\omega}\right)^2\right)}$$

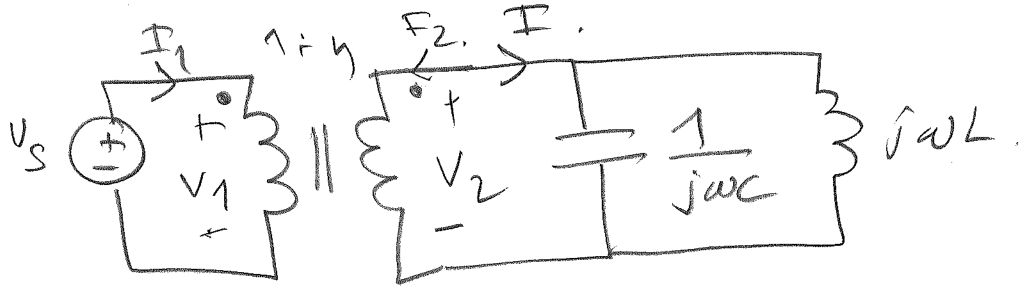
där $\omega_B = \frac{1}{RC}$.

c) $\omega \to \infty$ $\quad |H(\omega)|_{dB} \to 0 \text{ dB}.$

$\omega \to 0$ $\quad |H(\omega)|_{dB} \approx 20\log\left(\frac{\omega}{\omega_B}\right) \to -\infty \text{ dB}$

Låga frekvenser dämpas $\Rightarrow$ $\boxed{\text{Högpassfilter}}$

P5 Lösningsförslag



a) Transformatorn är ideal.

$$V_2 = V_1 n = U_s n$$

$$I = V_2 \cdot Y_{ekv}$$

$$\left(Y_{ekv} = j\omega C + \frac{1}{j\omega L} = \frac{-\omega^2 LC + 1}{j\omega L} = \left(\frac{1-\omega^2 LC}{\omega L}\right) e^{-j\frac{\pi}{2}} \right.$$

$$\boxed{I = nU_s \left(\frac{1-\omega^2 LC}{\omega L}\right) e^{-j\frac{\pi}{2}}}$$

b) $Y_{ekv} = 0$

$$\left(\frac{1-\omega^2 LC}{\omega L}\right) e^{-j\frac{\pi}{2}} = 0 \qquad \boxed{\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

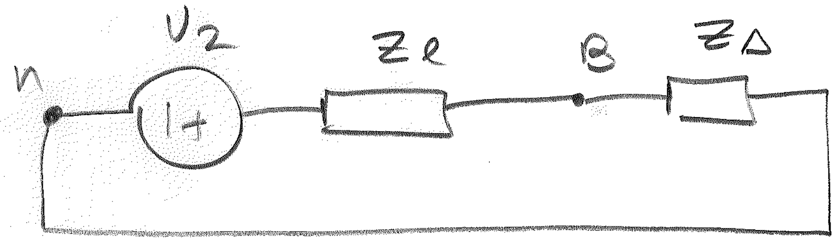
Lösningsförslag

P6 Vi har en symmetrisk last men källorna är också balanserade.

Vi gör om Δ till Y

$$Z_\Delta = \frac{Z_L}{3} = R + j\omega L$$

Eftersom både lasten och källorna är symmetrisk kan vi genomföra per-fas analys.



Spänningsdelningen ger

$$V_{Bn} = \frac{Z_\Delta}{Z_\ell + Z_\Delta} U_2 = \frac{R + j\omega L}{R + j\omega L + R + j\omega L} U e^{-j\frac{2\pi}{3}}$$

$$\boxed{V_{Bn} = \frac{U}{2} e^{-j\frac{2\pi}{3}}}$$