Tentamen: EI1102/EI1100 Elkretsanalys, 2014-03-11 kl 14–19

Hjälpmedel: *Ett* A4-ark med studentens anteckningar (båda sidor). Dessutom, pennor!

Svar får anges på svenska eller engelska. En kort ordlista finns på sista sidan.
Tentan har 3 tal i del A (15p), och 3 tal i del B (15p).
Godkänt vid ≥25% på del A och del B individuellt, *och* ≥50% på delarna A och B tillsammans. Betyget räknas från summan av A och B. Eventuella bonuspoäng från KS och hemuppgifter tillkommer enligt KursPM. Se också PM:et angående betygsgränser, rättningsnormer och överklagande.

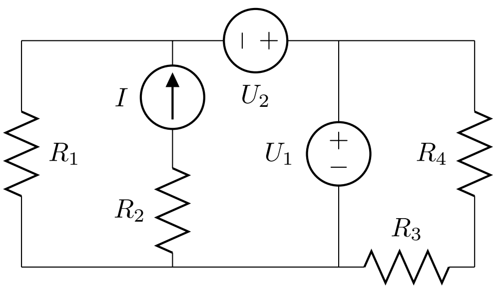
Läs varje tal noggrant **innan du försöker svara**.
Tänk på att **använda återstående tid till att kolla igenom varje svar**: man kan göra dimensionsanalys, rimlighetsbedömning (t.ex. "är det rätt att y går ner medan x går ner?"), och lösning genom en alternativ metod. Lösningar ska **förenklas** om inte annat är specificerat.
Satsa inte för mycket tid på bara en uppgift om du fastnar: ta hänsyn till poängvärden på uppgifterna, och att man måste både delar av tentan. Det är ofta så att **senare** *del*tal är betydligt **svårare** än de första deltalen.

Examinator: Nathaniel Taylor

Del A. Likström och Transienter.

---

1) [5p]
Kända kvantiteter: R_1, R_2, R_3, R_4, I, U_1, U_2.



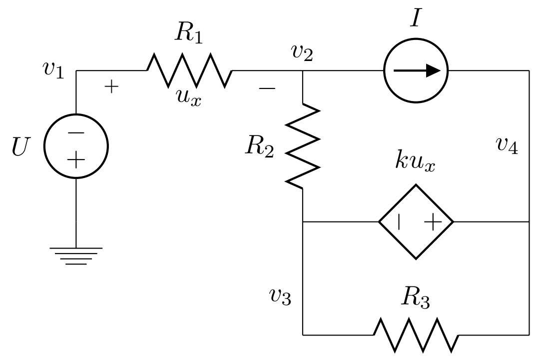
a) [1p] Bestäm effekten levererat till R_2.

b) [2p] Bestäm effekten levererat till R_4.

c) [2p] Bestäm effekten leverat från källan U_2.
Dimensionskontrollera resultatet.

---

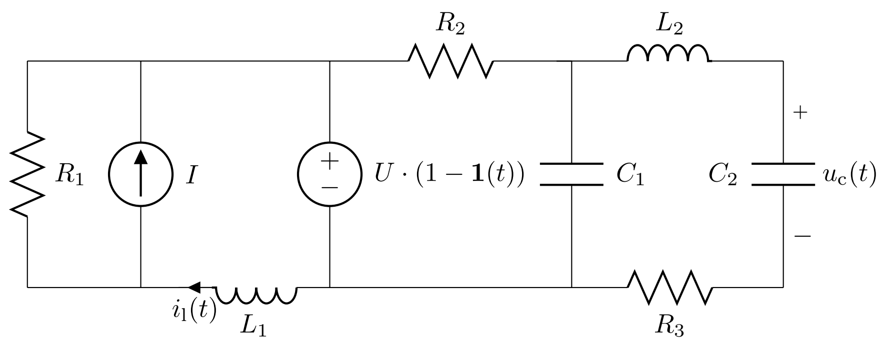
2) [5p]
Kända kvantiteter: R_1, R_2, R_3, U, I, k.



Använd nodanalys för att skriva ekvationer som går att lösa för de okända potentialerna v_1, v_2, v_3, v_4.
Du *måste inte lösa* ekvationerna, och *måste inte* skriva om dem i förenklad eller matris form. Du får definiera hjälpvariabler. Det finns flera möjliga svar (alla med samma lösning). Förmodligen är det bäst att använda ett systematiskt sätt att skriva ekvationerna.

---

3) [5p]
Kända kvantiteter:
$R_1, R_2, R_3, L_1, L_2, C_1, C_2, I, U$.
Den enda ändringen över all tid är enhetsstegfunktionen representerad av $\mathbf{1}(t)$, vilken gör att spänningskällan nollställs vid $t = 0$ (den var U för $t < 0$).

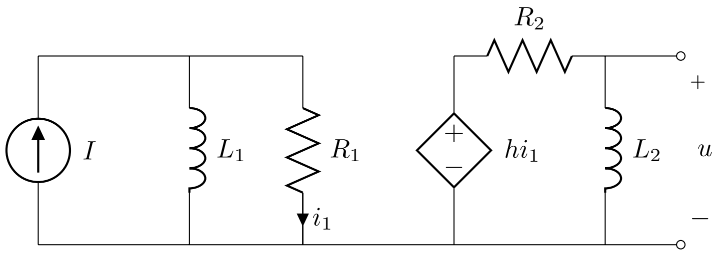


a) [3p]
Bestäm $u_c(0^-)$ och $i_l(0^-)$.
"0^-" betyder tiden direkt *innan* $t = 0$; anta jämviktsläge.

b) [2p]
Bestäm $i_l(t)$ för alla tider $t > 0$. Observera att kretsen till höger av spänningskällan inte är relevant.

Del B. Växelström

4) [5p]
Kända kvantiteter: R_1, L_1, h, R_2, L_2.
$I(\omega)$ beskriver en växelströmskälla med vinkelfrekvens ω.



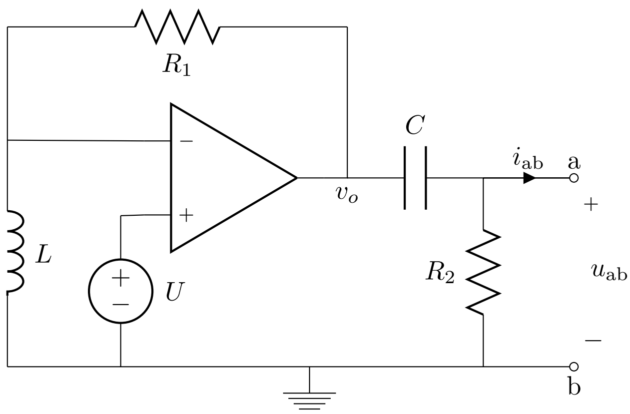
a) [2p]
Bestäm nätverksfunktionen $H(\omega) = \dfrac{u(\omega)}{I(\omega)}$, uttryckt i de kända kvantiteterna.

b) [1p]
Visa att svaret till deltal 'a' kan skrivas i formen $H(\omega) = \dfrac{-k\,\frac{\omega}{\omega_1}\,\frac{\omega}{\omega_2}}{(1+\mathrm{j}\omega/\omega_1)(1+\mathrm{j}\omega/\omega_2)}$.

c) [2p]
Skissa ett Bode amplituddiagram av funktionen $H(\omega)$ från deltal 'b'.
Anta att $\omega_1 \ll \omega_2$, och att $k > 1$. Markera viktiga punkter och lutningar.

---

5) [5p]
Kända kvantiteter: U, ω, R_1, L, R_2, C.
Operationsförstärkaren är ideal.
Källans spänning är växelström med vinkelfrekvens ω och amplitud U.

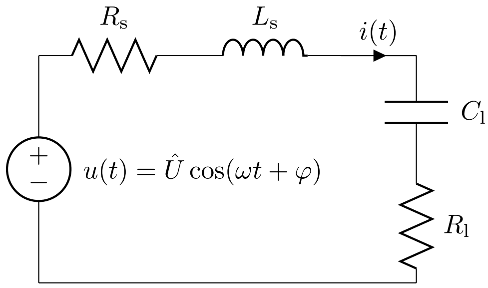


a) [3p]
Bestäm v_o.

b) [2p]
Bestäm Nortonekvivalenten av denna krets, med avseende på polerna a och b.

---

6) [5p]
Kända: $\hat{U}$, ω, φ, R_s, L_s.



a) [2p]
Bestäm R_l och C_l för att maximera effektutvecklingen i R_l.

b) [1p]
Med värdena som bestämdes i fall 'a', vad *är* den genomsnittliga effekten ("aktiveffekt") i R_l?

c) [2p]
Anta nu att R_l, C_l är kända.
Bestäm $i(t)$ som funktion av $\hat{U}$, ω, φ, R_s, L_s, R_l och C_l.

Ordlista över mindre självklara översättningar: current *ström*, voltage *spänning*, source *källa*, power *effekt*, terminal *pol*, angular(radian) frequency *vinkelfrekvens*, equilibrium *jämviktsläge*,

Solutions (EI1102, HT13, 2014-03-11)

Q1

a) R_2 is in series with current source I; therefore the current in R_2 is I. The power is I^2R_2.

b) Voltage division gives the voltage across R_4 as $u_{R_4} = \frac{U_1R_4}{R_3+R_4}$. The power in R_4 is $u_{R_4}^2/R_4$, so $P = \frac{U_1^2R_4}{(R_3+R_4)^2}$

c) Current out from + pole of U_2 is $I - \frac{U_1-U_2}{R_1}$, which can be found from KCL on the node on the left of source U_2, after using KVL around the loop of R_1, U_2, U_1.
Power out of source U_2 is therefore $U_2\left(I - \frac{U_1-U_2}{R_1}\right)$, which can be rewritten (without much advantage) as $U_2I - \frac{U_1U_2}{R_1} + \frac{U_2^2}{R_1}$.

Q2

By the "simple method":
Define current i_a in source U, and i_b in source ku_x, both with passive convention (going in at + terminal).

Then by KCL at every node except the ground node,

$$\begin{aligned}
\frac{v_1-v_2}{R_1} - i_\mathrm{a} &= 0 && \mathrm{KCL}(1)_\mathrm{out}\\
\frac{v_2-v_1}{R_1} + \frac{v_2-v_3}{R_2} + I &= 0 && \mathrm{KCL}(2)_\mathrm{out}\\
\frac{v_3-v_2}{R_2} + \frac{v_3-v_4}{R_3} - i_\mathrm{b} &= 0 && \mathrm{KCL}(3)_\mathrm{out}\\
\frac{v_4-v_3}{R_3} - I + i_\mathrm{b} &= 0 && \mathrm{KCL}(4)_\mathrm{out}
\end{aligned}$$

the include the potential-differences imposed by the two voltage sources, and the definition of u_x,

$$\begin{aligned}
0 - v_1 &= U\\
v_4 - v_3 &= ku_x\\
u_x &= v_1 - v_2.
\end{aligned}$$

The solution of the above nodal analysis method can also, for this particular circuit, be quite easily reasoned by a step-by-step puzzle:

```
Fairly obviously, v1 = -U : the source U is connected from ground to v1
No current can flow in U or R1, as there's only a ground node at the
end of this branch (and no other ground connection in the circuit).
So ia = 0.
So, v2 = v1 = -U.  (this is by Ohm's law in R1, given ia=0)
So ux = 0.
So k*ux = 0.
So v4 = v3.
All "I" goes up in R2.
So v3 = v2 + I*R2.
So v4 = v2 + I*R2.
All "I" goes in source k*ux (none in R3, since zero voltage across it): ib = I.
```

Thus, by either method, $v_1 = v_2 = -U,\ \ v_3 = v_4 = -U + IR_2,\ \ i_\mathrm{a} = 0,\ \ i_\mathrm{b} = I,\ \ u_x = 0.$
Of course, the supernode method or various in-betweens could have been used.

Q3

a) At $t = 0^-$: $u_\mathrm{c}(0^-) = U$, and $i_\mathrm{l}(0^-) = I - U/R_1$.

b) Initial value is still $I - U/R_1$ by continuity. Final value is $i_\mathrm{l}(\infty) = I$, and time-constant is L_1/R_1.
Therefore, $i_\mathrm{l}(t) = I - \frac{U}{R_1}\,\mathrm{e}^{-tR_1/L_1}$.

Q4

a) The two parts of the circuit can be treated separately, as

$$\frac{u(\omega)}{I(\omega)} = \frac{i_1(\omega)}{I(\omega)} \cdot \frac{u(\omega)}{i_1(\omega)}.$$

By using current division on the left part, and voltage division on the right part, this gives

$$\frac{u(\omega)}{I(\omega)} = \frac{\mathrm{j}\omega L_1}{R_1 + \mathrm{j}\omega L_1} \cdot \frac{h\mathrm{j}\omega L_2}{R_2 + \mathrm{j}\omega L_2}.$$

b) In each term from part 'a', divide throughout by the respective resistance, to give

$$\frac{u(\omega)}{I(\omega)} = \frac{\mathrm{j}\omega L_1/R_1}{1 + \mathrm{j}\omega L_1/R_1} \cdot \frac{h\,\mathrm{j}\omega L_2/R_2}{1 + \mathrm{j}\omega L_2/R_2}.$$

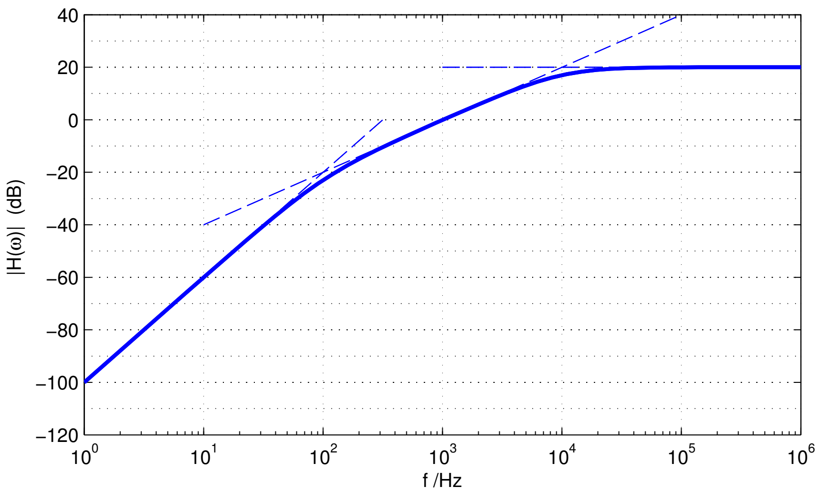
This can be written

$$\frac{u(\omega)}{I(\omega)} = H(\omega) = \frac{-k\,\frac{\omega}{\omega_1}\,\frac{\omega}{\omega_2}}{(1 + \mathrm{j}\omega/\omega_1)(1 + \mathrm{j}\omega/\omega_2)},$$

where $\omega_1 = \frac{R_1}{L_1}$, $\omega_2 = \frac{R_2}{L_2}$, and $k = h$.

c) Sketch a Bode amplitude plot.
Flat (constant) at $20\log_{10}\left(\frac{k}{[\Omega]}\right)$ dB when $\omega > \omega_2$. Note that the division of k by ohms was just to make it a pure number, for the sake of anyone who's being careful about dimensional checking ... people dealing practically with filters or power don't tend to worry about this sort of detail.
Positive gradient 20 dB/decade for $\omega_1 < \omega < \omega_2$.
Positive gradient 40 dB/decade for $\omega < \omega_1$.

The following plot is a specific example for the case where:
$k = 10$ (note: $20\log_{10} 10 = 20\,\mathrm{dB}$,
$\omega_1 = 2\pi \times 100\,\mathrm{Hz}$, and
$\omega_2 = 2\pi \times 10\,\mathrm{kHz}$.



Q5

a) By the usual assumption of an ideal opamp and negative feedback, the potentials of the + and − inputs are held equal. The + input has potential U, so the − input also has this potential, but has no current going into it. Therefore, by KCL at the node between R_1 and L, $\frac{v_o - U}{R_1} = \frac{U}{\mathrm{j}\omega L}$, from which

$$v_o = U\frac{R_1 + \mathrm{j}\omega L}{\mathrm{j}\omega L}.$$

b) We can use v_o from part 'a', to avoid having to consider the components R_1 and L again.
The opamp fixes v_o based on what value is needed in order for feedback to hold the $-$-input to the same value as the $+$-input (otherwise, the output would change until they are equal again).
So, with regard to the output a-b we can treat v_o as a fixed value, like a voltage source, that is not affected by what current we take.

The Norton equivalent's source-value is the same as the current i_{ab} when a-b are short-circuited; this is $v_o \mathrm{j}\omega C$. Hence

$$I_{\mathrm{N}} = \mathrm{j}\omega C v_o = U \frac{\mathrm{j}\omega C}{\mathrm{j}\omega L}(R_1 + \mathrm{j}\omega L) = U \frac{C}{L}(R_1 + \mathrm{j}\omega L).$$

(Yes, it's dimensionally ok, too.)

The Norton equivalent's impedance is the parallel combination of C and R_2.

$$Z_{\mathrm{N}} = \frac{R_2 \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}}{R_2 + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}} = \frac{R_2}{1 + \mathrm{j}\omega C R_2}.$$

This can be found by the above assumption of v_o being a fixed voltage source, and then using the method that the source impedance is the impedance "looking in" to the circuit with zeroed source.

Or, with less trouble to justify, the open-circuit voltage can be found by voltage division of v_o, and then can be divided by the short-circuit current to give the source impedance. I.e. $u_{\mathrm{ab,oc}} = v_o R_2 / \left(R_2 + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\right)$, so

$$Z_{\mathrm{N}} = \frac{\frac{v_o R_2}{R_2 + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}}}{\mathrm{j}\omega C v_o} = \frac{R_2}{1 + \mathrm{j}\omega C R_2}.$$

Norton or Thevenin circuits should always be drawn, to make clear what direction the source is with respect to the marked terminals (and that the student knows how to connect the source and impedance).

Q6

a) Maximum power for impedance Z_{l} coupled to a source of impedance Z_{s} is when $Z_{\mathrm{l}} = Z_{\mathrm{s}}^*$.
Here, $Z_{\mathrm{s}} = R_{\mathrm{s}} + \mathrm{j}\omega L_{\mathrm{s}}$, so $Z_{\mathrm{s}}^* = R_{\mathrm{s}} - \mathrm{j}\omega L_{\mathrm{s}}$. And $Z_{\mathrm{l}} = R_{\mathrm{l}} - \mathrm{j}/(\omega C_{\mathrm{l}})$.
Thus, equating real and imaginary parts, we want $R_{\mathrm{l}} = R_{\mathrm{s}}$ and $C_{\mathrm{l}} = 1/(\omega^2 L_{\mathrm{s}})$.

b) When the load is chosen for maximum power transfer, the reactive elements in the load and source are equal and opposite. The total resistance in the circuit is therefore just $R_{\mathrm{l}} + R_{\mathrm{s}}$, which is $2R_{\mathrm{s}}$. The source voltage $\hat{U}$ is the peak value, so a factor $\frac{1}{2}$ is needed when calculating powers. Half of the source voltage appears across the load resistor, as the load and source resistances are equal (voltage division). The power into the load resistance is then $P_{\mathrm{l}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\hat{U}/2}{R_{\mathrm{s}}}\right)^2 = \frac{\hat{U}^2}{8R_{\mathrm{s}}}$.

c) By writing the source voltage over the total impedance of all four series-connected components, the frequency-domain current is

$$i(\omega) = \frac{\hat{U} \angle \phi}{R_{\mathrm{s}} + R_{\mathrm{l}} + \mathrm{j}\left(\omega L_{\mathrm{s}} - \frac{1}{\omega C_{\mathrm{l}}}\right)}.$$

Splitting this into magnitude and phase gives

$$i(\omega) = \frac{\hat{U}}{\sqrt{(R_{\mathrm{s}} + R_{\mathrm{l}})^2 + \left(\omega L_{\mathrm{s}} - \frac{1}{\omega C_{\mathrm{l}}}\right)^2}} \angle \phi - \tan^{-1}\left(\frac{\omega L_{\mathrm{s}} - \frac{1}{\omega C_{\mathrm{l}}}}{R_{\mathrm{s}} + R_{\mathrm{l}}}\right)$$

These are inserted into the time-domain equation, with a bit of manipulation of minus symbols in the angle,

$$i(t) = \frac{\hat{U}}{\sqrt{(R_{\mathrm{s}} + R_{\mathrm{l}})^2 + \left(\omega L_{\mathrm{s}} - \frac{1}{\omega C_{\mathrm{l}}}\right)^2}} \cos\left(\omega t + \phi + \tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{\omega C_{\mathrm{l}}} - \omega L_{\mathrm{s}}}{R_{\mathrm{s}} + R_{\mathrm{l}}}\right)\right).$$