Kontrollskrivning i EI1110, Elkretsanalys – del 2 (2015-02-02, kl. 08-10)

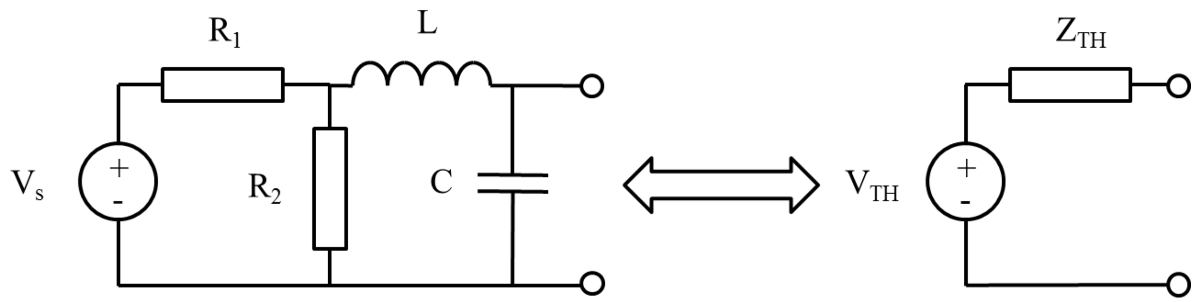
Hjälpmedel: miniräknare
Examinator: Daniel Månsson, tel. 08-790 9044

Kontrollskrivningen har två tal. Båda kommer bedömmas efter skalan: 3 = allt, i princip, ok, 2 = smärre ändringar skulle krävas, 1 = större ändringar skulle krävas och 0 = inget svar givet eller mycket grova fel. Senare kommer resultatet viktas för att erhålla antalet bonuspoäng till tentan.

Uttryck ekvationer först i kända storheter och förenkla innan siffervärden sätts in. På så viss vissas förståelse för problemet. Var tydlig med definitioner av variabler och tänk på att er handstil måste vara tydlig för att lösning ska kunna bedömmas. Kontrollera svarens rimlighet genom t.ex. dimensionsanalys eller alternativ lösningsmetod.

---

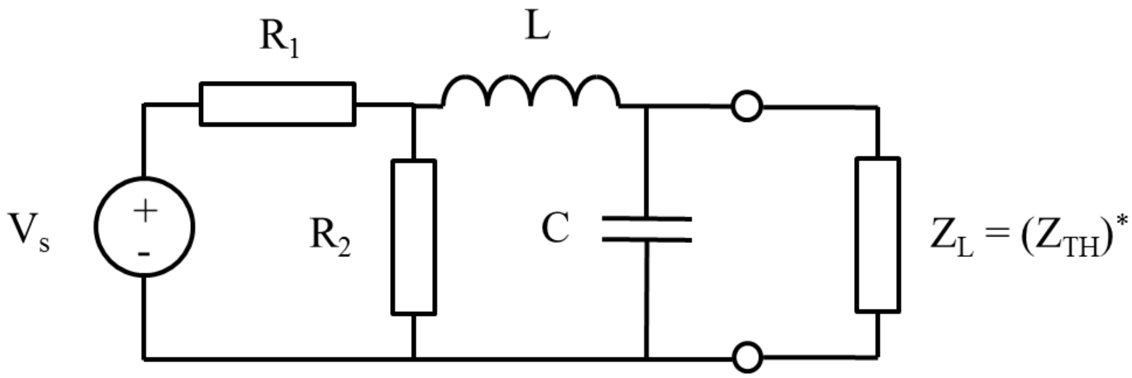
1) För nedanstående krets, bestäm Thevenin ekvivalenten.



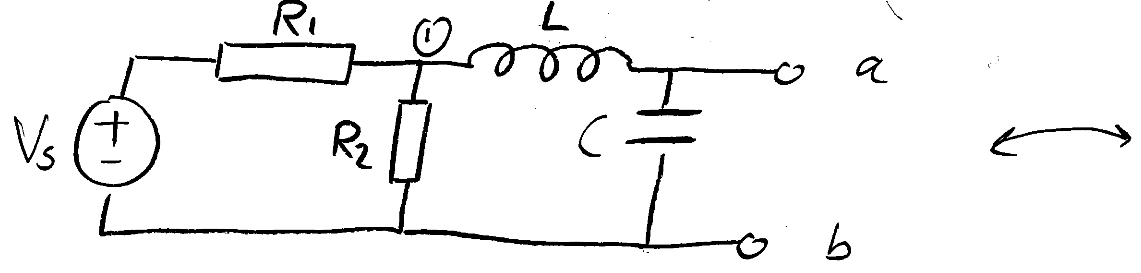
Använd följande data för att beräkna V_{TH} och Z_{TH}.

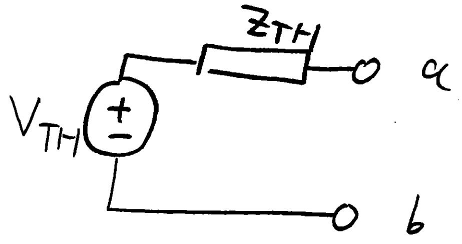
$$
\begin{cases}
R_1 = 5\,\Omega \qquad L = 2\,mH \\
R_2 = 20\,\Omega \quad C = 250\,\mu F \\
\omega = 1000\,rad/s \\
V_s = V_0 \cos(\omega t + \alpha); \\
V_0 = 20, \alpha = 0
\end{cases}
$$

2) Om nu en last med impedansen Z_L kopplas till utgången av kretsen och den väljs med ”konjugatmatchning”, $Z_L = (Z_{TH})^*$, bestäm då den aktiva effekten (P) i lasten? (Använda data och resultatet från **1)** ovan).



1)





För att erhålla V_{TH} behöver spänningen över den öppna porten ab (dvs V_{a-b}).
Vi inför noden (1) och får med KCL:

$$\frac{V_1 - V_s}{R_1} + \frac{V_1 - 0}{R_2} + \frac{V_1 - V_a}{j\omega L} = 0$$

I nod (a) har vi (KCL):

$$\frac{V_a - V_1}{j\omega L} + \frac{V_a - 0}{\frac{1}{j\omega C}} = 0$$

Dessa kan vi skriva såsom

$$\begin{cases} V_1\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{j\omega L}\right) + V_a\left(\frac{-1}{j\omega L}\right) = V_s/R_1 \\ V_1\left(\frac{-1}{j\omega L}\right) + V_a\left(\frac{1}{j\omega L} + j\omega C\right) = 0 \end{cases}$$

Alt. 1 Vi löser t.ex. detta ekvationssystem m.h.a. matris operationer.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{j\omega L}\right) & \frac{-1}{j\omega L} \\ \frac{-1}{j\omega L} & \left(\frac{1}{j\omega L}+j\omega C\right)\end{bmatrix}}_{=\bar{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} V_1 \\ V_a \end{bmatrix}}_{\bar{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} V_S/R_1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\bar{b}}$$

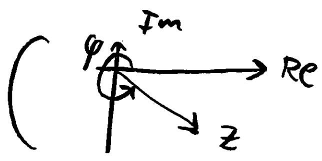
$$\Longrightarrow \quad \bar{x} = \bar{A}^{-1} b$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{20}+\frac{1}{2j}\right) & \frac{-1}{2j} \\ \frac{-1}{2j} & \left(\frac{1}{2j}+\frac{1}{4}j\right)\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0,25-0,5j & 0,5j \\ 0,5j & -0,25j \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0,8-1,6j & 1,6-3,2j \\ 1,6-3,2j & 3,2-2,4j \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$x = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_a \end{bmatrix} = A^{-1}\begin{bmatrix} 20/5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,2-6,4j \\ 6,4-12,8j \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$V_{TH} = V_a - V_b = V_a - 0 = \underline{\underline{6,4-12,8j}}$$

på polär form får vi (

$$V_{TH} = \underbrace{\sqrt{6,4^2+12,8^2}}_{\approx 14,3}\, e^{j\left(\underbrace{\frac{3\pi}{2}+\tan^{-1}\left(\frac{6,4}{12,8}\right)}_{\varphi}\right)}$$

$\varphi \approx 297°$ (5,18 rad)

$$\Longrightarrow \quad V_{TH} = 14,3\cos(\omega t + 297°)$$

(cosinus som riktfas!)

alt. 2) Vi löser ekvationssystemet:

$$V_1\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{j\omega L}\right)+V_a\left(\frac{-1}{j\omega L}\right)=V_s/R_1 \quad (1)$$

$$V_1\left(\frac{-1}{j\omega L}\right)+V_a\left(\frac{1}{j\omega L}+j\omega C\right)=0 \quad (2)$$

$$(2) \Rightarrow \quad V_1 = j\omega L\, V_a\left(\frac{1}{j\omega L}+j\omega C\right)=$$

$$=V_a(1-\omega^2 LC) \quad (3)$$

Vi sätter in (3) i (1) $\Rightarrow$

$$V_a(1-\omega^2 LC)\cdot\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{j\omega L}\right)+V_a\left(\frac{j}{\omega L}\right)=V_s/R_1$$

data i uppgiften ger $\Rightarrow$

$$V_a\,\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}-j\frac{1}{2}\right)+V_a\,j\frac{1}{2}=4 \iff$$

$$V_a\left(\frac{1}{8}-j\frac{1}{4}+j\frac{1}{2}\right)=4=V_a(1+2j)\frac{1}{8} \iff$$

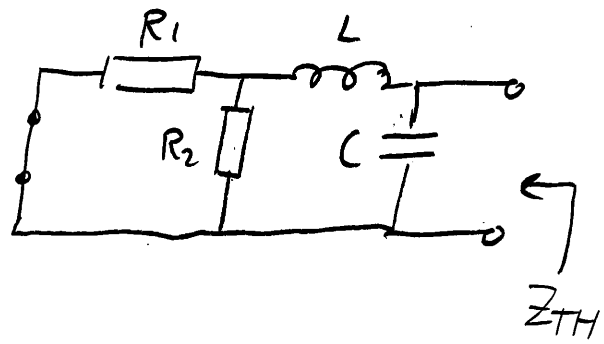
$$V_a=\frac{32}{1+2j}\,\frac{(1-2j)}{(1-2j)}=\frac{32-64j}{5}=6{,}4-12{,}8j$$

$$\left(\Rightarrow V_1=V_a(1-\omega^2 LC)=\frac{1}{2}\cdot(6{,}4-12{,}8j)=3{,}2-6{,}4j\right)$$

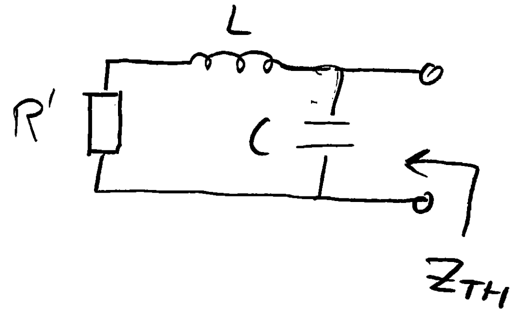
$$V_{TH}=V_a-V_b=V_a-0=\underline{6{,}4-12{,}8j} \Rightarrow$$

$$\left(V_{TH}=\sqrt{6{,}4^2+12{,}8^2}\;e^{j\left(\frac{3\pi}{2}+\tan^{-1}(6{,}4/12{,}8)\right)}\right)$$

Z_{TH}: Eftersom vi endast har oberoende källor kan vi nollställa dessa. $\Longrightarrow$



$\Longleftrightarrow$



$$R' = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{5 \cdot 20}{5+20} = 4$$

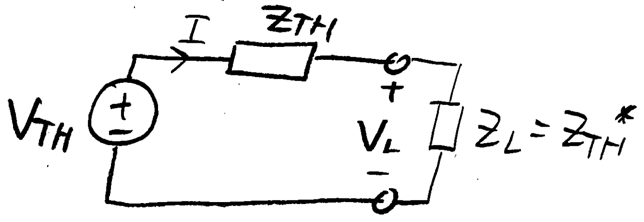
$$Z_{TH} = \frac{(R' + j\omega L)\frac{1}{j\omega C}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{(4+2j)4\frac{1}{j}}{4+2j+4\frac{1}{j}} = \frac{8-16j}{4-2j}$$

$$= \frac{(8-16j)(4+2j)}{(4-2j)(4+2j)} = \frac{64-48j}{20} = \underline{\underline{3{,}2-2{,}4j}}$$

(Z_{TH} kan ses såsom: $Z_{TH} = R + jX =$
$= R - j\frac{1}{\omega C}$ med $R = 3{,}2$ och $\frac{1}{\omega C} = 2{,}4$
$\Longleftrightarrow$ $(\omega = 1000)$ $C \approx 420\,\mu F$)

2) För att maximera den aktiva effekten (P) i Z_L ska vi välja
$\underline{Z_L = Z_{TH}^* = 3{,}2 + 2{,}4j}$.

Vi får då:



$$KVL: \Rightarrow \quad + V_{TH} - I(Z_{TH} + Z_{TH}^*) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$I = \frac{V_{TH}}{2 \cdot R_{TH}} = \frac{6{,}4 - 12{,}8j}{2 \cdot 3{,}2} = 1 - 2j = I_L$$

Den komplexa effekten som förbrukas i Z_L är nu (toppvärdesskalan):

$$S = \frac{1}{2} V_L I_L^* = \frac{1}{2}(Z_L I_L) I_L^* = \frac{1}{2} Z_L |I_L|^2 =$$

$$= \frac{1}{2}(3{,}2 + 2{,}4j)\left(\sqrt{1^2 + 2^2}\right)^2 = 8 + 6j$$

$$S = P + jQ \quad \Rightarrow \quad \underline{P = 8 \quad W}$$