KTH EI1110 Elkretsanalys (CELTE), Omtenta 2015-06-11 kl 14–19

Tentan har 9 tal i 3 delar: två tal i sektion A (12p), två i sektion B (10p) och fem i sektion C (30p).

Hjälpmedel: En sida av A4, med studentens egna handskrivna anteckningar.

Om inte annan information anges i ett tal, ska: komponenter antas vara idéala; angivna värden av komponenter (t.ex. R för ett motstånd, U för en spänningskälla, k för en beroende källa) antas vara *kända* storheter; och andra markerade storheter (t.ex. strömmen markerad i ett motstånd eller spänningskälla) antas vara *okända* storheter. Lösningar ska uttryckas i kända storheter, och förenklas. På så sätt visas förståelse för problemet. Tänk på att er handstil måste vara tydlig för att lösning ska kunna bedömmas. Bonuspoäng som erhölls under del 2 gäller endast för del 2 (C). Var tydlig med diagram och definitioner av variabler.

Tips: Dela tiden mellan talen. Det hjälper, ofta, att rita om ett diagram för olika tillstånd eller med ersättningar eller borttagning av delar som inte är relevant till det sökta värdet. Då blir kretsen ofta mycket lättare att tänka på och lösa. Kontrollera svarens rimlighet genom t.ex. dimensionskoll eller alternativ lösningsmetod.

Räknande av betyg: Låt A, B och C vara de maximala möjliga poängen från delarna A, B och C i tentan. Låt a, b och c vara poängen man får i dessa respektive delar i tentan, eller (bara relevant till a och b) ersatt av eventuella bättre poäng i TEN1 eller KS1; och låt p vara bonuspoängen från del 2 av kursen. Godkänd tentamen (och därigenom hel kurs) kräver:

$$\frac{a}{A} \geq 0,4 \ \& \ \frac{b}{B} \geq 0,4 \ \& \ \frac{c+p}{C} \geq 0,5 \ \& \ \frac{a+b+c+p}{A+B+C} \geq 0,5.$$

Betyget räknas också från summan över alla delar och bonuspoäng, d.v.s. sista termen ovan, med gränser (%) av 50 (E), 60 (D), 70 (C), 80 (B), 90 (A). Är man sedan tidigare godkänd på del 1 räcker det att göra sektion C som motsvarar del 2. Om tentan missade nivån för godkänd med liten marginal, på bara ett kriterium, så kan betyget Fx registreras, med möjlighet att få betyget E om ett kompletteringsarbete är godkänt inom några veckor efter tentamen.

Examinator: Daniel Månsson (08 790 90 44), Nathaniel Taylor

Sektion A. Likström

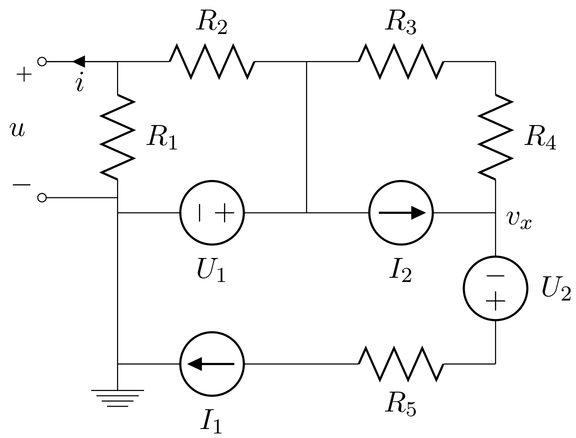
1) [7p]

(I deltal 'a' och 'b' är polerna till vänster en öppenkrets, som i diagrammet, och därför är $i = 0$.)

a) [3p] Bestäm effekten som utvecklas i varenda av följande tre komponenterna: R_5, R_1, och R_3.

b) [2p] Bestäm spänningen u och potentialen v_x.

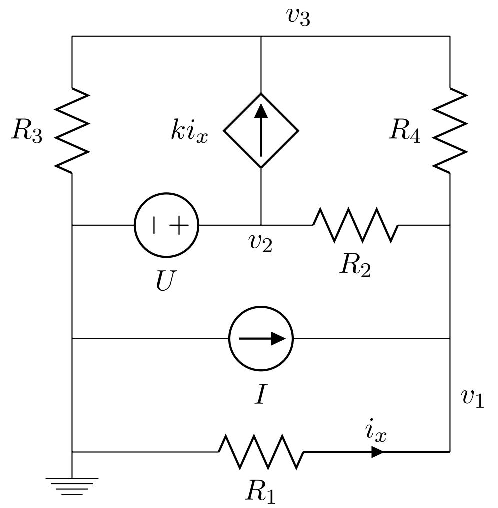
c) [2p] Bestäm Nortonekvivalenten av kretsen, sett på polerana där u och i är markerade.



2) [5p]

Använd nodanalys för att skriva ekvationer som skulle kunna lösas för att få ut de markerade nodpotentialerna v_1, v_2, v_3.

Du behöver bara visa att du kan översätta från kretsen till ekvationerna: du *måste inte* lösa eller förenkla ekvationerna.

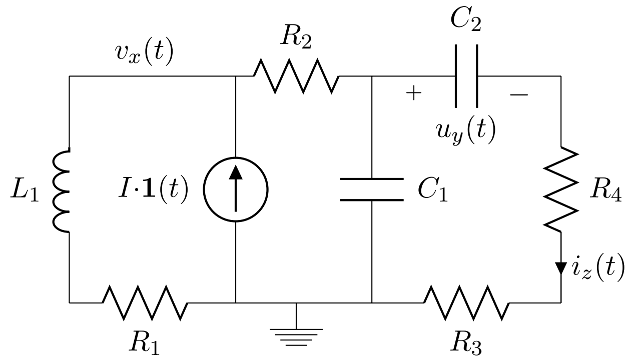


Sektion B. Transient

---

3) [5p] *Obs:* $\mathbf{1}(t)$ är enhetsstegfunktionen.

Bestäm följande storheterna vid angivna tider:
$v_x(0^+)$ $v_x(\infty)$ $u_y(\infty)$ $i_z(0^+)$ $i_z(\infty)$

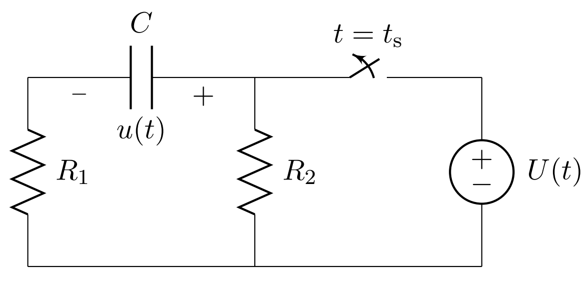


---

4) [5p]

a) [3p] Låt $U(t) = \hat{U} \cdot (1 - \mathbf{1}(t))$ och $t_\mathrm{s} > 0$.
Bestäm i så fall $u(t)$, för $0 < t < t_\mathrm{s}$.

b) [2p] Låt $t_\mathrm{s} = 0$, och $U(t) = \hat{U}$ (konstant).
Bestäm $u(t)$ i detta fall, för $0 < t$.



Slut på del 1! Men slösa inte eventuell återstående tid: kolla och dubbelkolla på svaren.

Sektion C - växelström - TEN2 2015-6-11

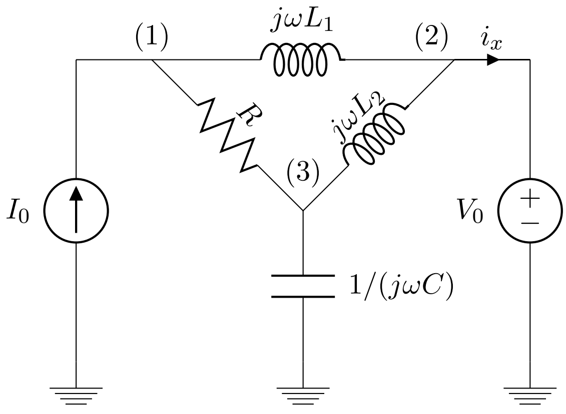
Uppgift 5 [9 p.]

För kretsen nedan:

(a) [3 p.] Ställ upp nödvändiga nodekvationer på matrisform (dvs på formen Ax=b[1]). V_0 och I_0 representerar amplituden hos växelströmskällorna (båda har vinkelfrekvensen ω och fasvinkeln $\phi = 0$). (i_x är den okända strömmen som går ner genom spänningskällan.)

(b) [2 p.] Hur mycket aktiv och reaktiv effekt levererar källorna?
Använda $V_0 = 2$ V, $I_0 = 4$ A, $V_1 = 6 + 4j$ V samt $V_3 = 6$ V. Därtill, använd $j\omega L_1 = j\ \Omega$, $j\omega L_2 = 2j\ \Omega$, $R = 1\ \Omega$, $1/(j\omega C) = -j\ \Omega$

(c) [4 p.] Visa att summan av den komplexa effekten för alla komponenter (källor och impedanser) är noll (dvs $\sum_i S_i = 0$). (Använd samma värden som ovan.)



[1] A är nodadmittansmatrisen, x nodspänningsvektorn och b är källvektorn.

Uppgift 6 [6 p.]

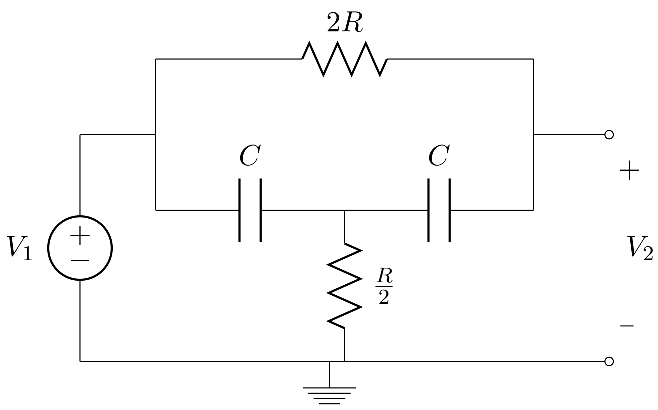
För kretsen nedan:

(a) [3 p.] Visa att överföringsfunktionen ges av

$$H(\omega) = \frac{V_2}{V_1} = \frac{1 - (\omega RC)^2 + j\omega RC}{1 - (\omega RC)^2 + 3j\omega RC}$$

(b) [2 p.] Genom att studera $H(0)$, $H(\infty)$ samt $H(\frac{1}{RC})$, skissa förstärkingen (dvs. $|H(\omega)|$). Amplitudnivåerna vid dessa vinkelfrekvenser måste vara korrekta.

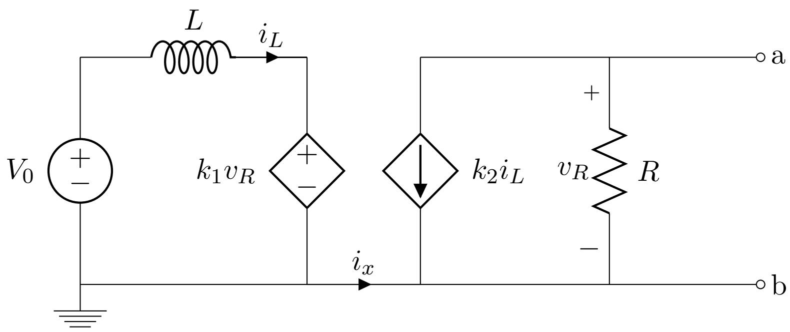
(c) [1 p.] Utifrån $|H(\omega)|$, eller annat resonemang, hur benämns beteendet på detta filter[2] bäst (låg/hög/band-pass/stop)?



Uppgift 7 [6 p.]

(a) [5 p.] Bestäm kretsens Thevenin ekvivalent, sett ifrån utgången $a - b$. (*Obs!* Vad är i_x?) (V_0 representerar amplituden hos växelströmskällan med vinkelfrekvensen ω och $\phi = 0$.)

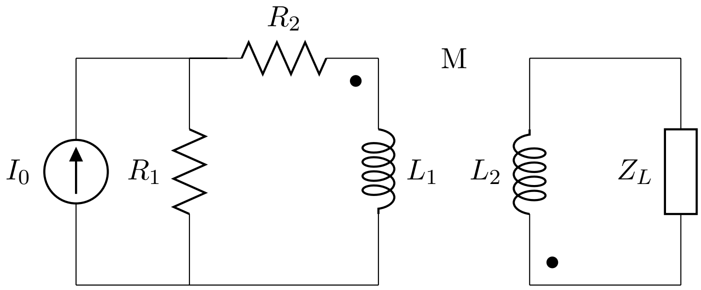
(b) [1 p.] Vilken last Z_L bör kopplas mellan $a - b$ för att maximal aktiv effekt ska utvecklas i Z_L. (Inget algebraiskt arbete behövs.)



[2] Som på engelska heter *bridged-T network/filter*

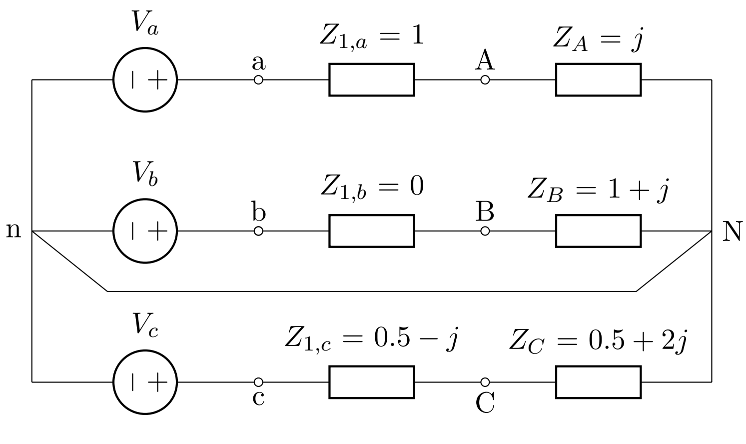
Uppgift 8 [5 p.]

Nedan finns en krets i vilken en känd generator (I_0 och R_1) är kopplad till en känd last (Z_L) genom en transformator. Antag en generell transformator (dvs. du antas då veta L_1, L_2 och M). För kretsen, ställ upp ekvationssystemet som behövs lösas för att erhålla spänningsfallet över lasten. Du måste tydligt vissa din plan för hur problemet ska lösas.



Uppgift 9 [4 p.]

Ge det korrekta svaret på flervalsfrågorna (ingen vidare motivering behövs). Endast ett svar på varje fråga är rätt.



1. [1 p.] En balanserad trefaskälla är kopplad till en trefaslast enligt ovan. Vilken ström flyter i återledaren ("nN") i kretsen ovan.

   (a) $3|V_{AN}|/|Z_A|$
   (b) 0
   (c) V_{AN}/Z_A
   (d) $V_a/(Z_{1,a} + Z_A)$

2. [1 p.] Om fasförskjutningen mellan ström och spänning i en fas i en trefaslast är sådan att den aktiva effekten är noll, vad är då den reaktiva effekten där?

(a) 0
(b) 1
(c) den skenbara effekten
(d) $1/\sqrt(2)$

3. [1 p.] För ett balanserat trefassystem, om effekten i en av faserna i lasten är x, vad är då den totalt förbrukade effekten i trefaslasten?

(a) $3x$
(b) $x\sqrt(2)$
(c) $x/\sqrt(2)$
(d) $3x/\sqrt(2)$

4. [1 p.] Vad erfordras för balans i en trefaskälla? Antag att källans faser beskrivs såsom $V_i = V_{i0}e^{j(\omega t+\phi_i)}$, där $i = a, b, c$ är källans faser.

(a) $\sum V_{i0} = 0$ samt $\sum e^{j\phi_i} = 0$
(b) $\sum e^{j\phi_i} = 0$
(c) $\sum e^{j\phi_i} = 0$ samt $V_{a0} = V_{b0} = V_{c0}$
(d) $V_{a0} = V_{b0} = V_{c0}$

Lösningar (EI1110, VT15, 2015-06-11)

1.

a)

$P_{\mathrm{R5}} = I_1^2 R_5$ seriekoppling till strömkällan I_1 bestämmer strömmen.

$P_{\mathrm{R1}} = \left(\frac{U_1}{R_1+R_2}\right)^2 R_1$ R_1 är i serie med R_2 (då polerna är öppna så $i = 0$) över en spänning U_1.

$P_{\mathrm{R3}} = (I_2 - I_1)^2 R_3$ KCL i nod v_x ger att strömmen i R_3 är $I_2 - I_1$.

b) Den markerade u, när polerna är öppenkrets (tomgång), är $u_{\mathrm{tg}} = \frac{U_1 R_1}{R_1+R_2}$, genom spänningsdelning. Potentialen v_x kan erhållas genom potentialvandring från jordnoden, men man måste välja en bra väg. Spänningarna över strömkällor är inte direkt kända; de kan beräknas, men det är ofta lättast att undvika dem. Förmodligen den lättaste vägen här är genom U_1, R_3 och R_4. Strömmen i R_3 och R_4 är känd genom KCL i noden v_x: strömmen är $I_2 - I_1$ in till R_4 från nod v_x. Därför är

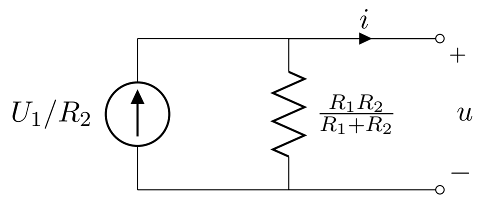
$$v_x = U_1 + (R_3 + R_4)(I_2 - I_1).$$

c) Källan U_1 bestämmer spänningen över seriekombinationen R_1 av och R_2: alla andra komponenter blir då irrelevanta till kretsens beteende sett vid polerna.

Kortslutningsströmmen är $i_{\mathrm{ks}} = U_1/R_2$. Ekvivalentresistansen sett på polerna är $R_{\mathrm{ek}} = \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}$.

Uttrycket kan erhållas direkt genom att nollställa källorna i kretsen. Alternativt kan tomgångsspänningen u_{tg} (från deltal 'b') användas med sambandet $R_{\mathrm{ek}} = u_{\mathrm{tg}}/i_{\mathrm{ks}}$.

Nortonekvivalenten blir då som nedan, med u och i markerade på samma sättet som på originalkretsen.



2.

KCL tas vid varje nod förutom jordnoden.
Vid nod 1 (potential v_1), blir de utgående strömmarna

$$0 = \frac{v_1}{R_1} - I + \frac{v_1 - v_2}{R_2} + \frac{v_1 - v_3}{R_4}.$$

Vid nod 2 kan vi definiera den okända strömmen i spänningskällan som i_α in på pluspolen.
Då blir KCL

$$0 = i_\alpha + \frac{v_2 - v_1}{R_2} + k i_x.$$

Vid nod 3,

$$0 = \frac{v_3}{R_3} - k i_x + \frac{v_3 - v_1}{R_4}.$$

Spänningskällan har introducerat en okänd ström i_α, men däremot kompenserar den genom att orsaka ett till samband mellan nodpotentialerna,

$$v_2 = U.$$

Den beroende källans styrvariabel måste definieras med hänsyn till andra storheter som redan finns i ekvationsystemet,

$$i_x = -v_1/R_1.$$

Dessa är 5 ekvationer i 5 okända: v_1, v_2, v_3, i_α och i_x. Som vanligt, hade andra metoder (t.ex. 'supernod') kunnat gör några ersättningar innan skrivandet av ekvationerna, men våra ekvationer kan förenklas algebraisk till den samma formen.

3.

Bara en ändring sker: strömkällan ändras från noll till 'I' vid tid $t = 0$. Innan dess finns ingen källa och därför antas inga strömmar eller spänningar i kretsen (en undersökning av kretsen visar även att energi som reaktiva komponenter eventuellt hade 'länge innan $t = 0$' kommer att ha dött bort över tid pga motstånden). Alla storheter vid $t = 0^-$ antas vara noll, och kontinuerliga storheter kommer därför vara noll vid $t = 0^+$.

$v_x(0^+) = IR_2$ kontinuitet i L_1 samt i C_1, sedan KCL i toppnoden, och KVL genom R_2 och C_1.

$v_x(\infty) = IR_1$ gör de vanliga jämviktsersättningar (C blir öppna, L blir kortslutna)

$u_y(\infty) = IR_1$ gör de vanliga jämviktsersättningar

$i_z(0^+) = 0$ Ohms lag: kontinuitet ger noll spänning på C_1 samt C_2

$i_z(\infty) = 0$ C_2 är öppenkrets i jämvikt

4.

a) Under perioden $0 < t < t_\mathrm{s}$ är brytaren fortfarande stängd, men källans spänning har nyligen stegat ner från $\hat{U}$ till noll. Innan $t = 0$ var kretsen i en jämvikt för värdet $\hat{U}$ hos spänningskällan (vi ser att $U(t) = \hat{(U)}$ för $t < 0$). I jämvikten var $u(0^-) = \hat{U}$: ersätt kondensatorn med öppenkrets, och brytaren med kortslutning, för att lättare förstå varför.

När källan steger ner till 0 vid tid $t = 0$, så blir den som en kortslutning över R_2 samt över seriekombinationen av R_1 och C. Runt det yttresnurren erhålls med KVL att $i(t)R_1 + u(t) = 0$, där $i(t)$ är strömmen neråt genom R_1. På grund att $i(t)$ också passar genom C (seriekoppling), så kan den också skrivas att $i(t) = C\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}$.

$$u(t) = \hat{U}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{CR_1}} \qquad 0 < t < t_\mathrm{s}.$$

b) Här är situationen samma som i deltal 'a', *innan* $t = 0$. Från $t = 0$ är skillnaden att grenen med källan ser ut nu som en öppenkrets (brytaren öppet) i stället för en kortslutning (brytaren stängd, källan nollställd). Begynnelsevärdet $u(0)$ är därför samma, men urladdningen sker genom R_1 *och* R_2 i serie:

$$u(t) = \hat{U}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{C(R_1+R_2)}} \qquad 0 < t.$$

Sektion C - TEN2 2015-6-11 - Lösningsförslag

Daniel Månsson

Uppgift 5

5.a

Vi ställer upp nodekvationerna, dvs KCL, som säger att $\sum I = 0$ i varje nod. Nod 1 är kopplad till I_0, 2 är kopplad till V_0 och 3 är kopplad till jord (via kondensatorn). Vi räknar strömmarna som positiva ut ur noden i fråga och får (*numreringen är inte samma som noderna!*):

$$-I_0 + \frac{1}{j\omega L_1}(V_1 - V_2) + \frac{1}{R}(V_1 - V_3) = 0 \tag{1}$$

$$(j\omega C)(V_3) + \frac{1}{R}(V_3 - V_1) + \frac{1}{j\omega L_2}(V_3 - V_2) = 0 \tag{2}$$

$$\frac{1}{j\omega L_1}(V_2 - V_1) + \frac{1}{j\omega L_2}(V_2 - V_3) + I_x = 0 \tag{3}$$

Sista ekvationen behövs inte för att läsa ut nodspänningarna eftersom vi ser att $V_2 = V_0$. I ekvationssystemet är I_0 och V_0 givna källor. Vi samlar termerna:

$$V_1(\frac{1}{j\omega L_1} + \frac{1}{R}) - V_3(\frac{1}{R}) = I_0 + V_0(\frac{1}{j\omega L_1}) \tag{4}$$

$$-V_1(\frac{1}{R}) + V_3(\frac{1}{R} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L_2}) = V_0(\frac{1}{j\omega L_2}) \tag{5}$$

På matrisform får vi:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{j\omega L_1} + \frac{1}{R} & \frac{-1}{R} \\ \frac{-1}{R} & \frac{1}{R} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_0 + \frac{V_0}{j\omega L_1} \\ \frac{V_0}{j\omega L_2} \end{pmatrix}$$

5.b

Vi behöver veta strömmen genom V_0 och spänningen över I_0. Strömmen genom spänningskällan ges av ekvationen ovan och blir:

$$I_x = \frac{1}{j}(V_1 - V_2) + \frac{1}{2j}(V_3 - V_2) = V_1(\frac{1}{j}) - V_0(\frac{1}{2j} + \frac{1}{j}) + V_3(\frac{1}{2j}) \tag{6}$$

Löser vi ekvationssystemet från 1.a får vi $V_1 = 6 + 4j$ och $V_3 = 6$ som i sin tur ger att $I_x = 4 - 6j$. Strömmen I_x är ritad in i plusterminalen av V_0 och tolkar vi resultatet enligt "passivnotation" får vi den komplexa effekten som förknippas med V_0 att bli:

$$S_{V0} = \frac{1}{2}VI^* = \frac{1}{2}V_0(I_x)^* = \frac{1}{2}2(4 + 6j) = 4 + 6j \text{ VA} \tag{7}$$

Ur vilken vi finner den aktiva effekten, P = 4 W, och den reaktiva, Q = 6 VAr. Spänningen över strömkällan, I_0 är $(V_1 - 0)$, vilket ger:

$$S_{I0} = \frac{1}{2}VI^* = \frac{1}{2}(V_1 - 0)(-I_0)^* = \frac{1}{2}(6 + 4j)(-4) = -12 - 8j \text{ VA} \tag{8}$$

Observera att minustecknet för strömmen kommer av att om vi liknar strömkällan med en svartlåda med plusterminalen vid V_1 så kommer strömmen I_0 att lämna plusterminalen och för att ha passiv teckenkonvention kommer strömmen som är riktad in i denna vara $-I_0$.

5.c

Den komplexa effekten som levereras av källorna är $S_s = S_{I0} + S_{V0} = -8 - 2j$ VA. Både P och Q är mindre än noll som i passivnotation betyder att både aktiv och reaktiv effekt levereras till impedanserna (men V_0 absorberar både aktiv och reaktiv effekt). De komplexa effekterna som förknippas med impedanserna är:

$$S_{L1} = \frac{1}{2}VI^* = \frac{1}{2}(V_1 - V_2)(\frac{V_1 - V_2}{j})^* = 16j \tag{9}$$

$$S_R = \frac{1}{2}VI^* = \frac{1}{2}(V_1 - V_3)(\frac{V_1 - V_3}{1})^* = 8 \tag{10}$$

$$S_C = \frac{1}{2}VI^* = \frac{1}{2}(V_3 - 0)(\frac{V_3 - 0}{-j})^* = -18j \tag{11}$$

$$S_{L2} = \frac{1}{2}VI^* = \frac{1}{2}(V_2 - V_3)(\frac{V_2 - V_3}{2j})^* = 4j \tag{12}$$

Summan av dessa komplexa effekter blir $S_{imp} = 8 + 2j$ och därmed är $\sum_i S_i = 0$.

(Notera att jag inte sätter ut enheten [VA] eftersom jag undviker den filosofisk diskussion huruvida en rent imaginär komplex effekt har enheten [VA] eller [VAr] och på samma sätt huruvida en rent reell komplex effekt har enheten [VA] eller [W].)

Uppgift 6

6.a

Nodanalys vid noden V_3 (som placeras på toppen av grenen med $R/2$ impedansen) och vid V_2 ger:

$$\frac{V_3 - 0}{\frac{R}{2}} + (V_3 - V_1)j\omega C + (V_3 - V_2)j\omega C = 0 \tag{13}$$

$$\frac{V_2 - V_1}{2R} + (V_2 - V_3)j\omega C + = 0 \tag{14}$$

$$\tag{15}$$

Ur andra ekvationen kan vi lösa ut $V_3 = \frac{V_2 - V_1}{2j\omega RC} + V_2$ som vi sätter in i den första ekvationen. Om vi då samlar termerna får vi:

$$V_2 \left(2(j\omega C + \frac{1}{R}) + \frac{j\omega C + \frac{1}{R}}{j\omega RC} - j\omega C \right) = V_1 \left(j\omega C + \frac{j\omega C + \frac{1}{R}}{j\omega RC} \right) = \tag{16}$$

Multiplicera båda sidorna med R och ersätt $x = j\omega RC$. Multiplicera båda sidorna med x och bearbeta uttrycket så får vi:

$$V_2 \left(x^2 + 2x + x + 1\right) = V_1 \left(x^2 + 1 + x\right) = \tag{17}$$

Sätt in $x = j\omega RC$ och flytta över termerna så får vi $H(\omega) = \frac{V_2}{V_1} = \frac{1-(\omega RC)^2 + j\omega RC}{1-(\omega RC)^2 + 3j\omega RC}$. Kom ihåg att $x^2 = (j\omega RC)^2 = -(\omega RC)^2$.

6.b

Se Figur 1 nedan (argumentet visas också för fullständighetens skull).
$|H(0)| = |H(\infty)| = 1$ och $|H(\frac{1}{RC})| = 1/3$.

6.c

Det beter sig som ett bandstopp filter

Uppgift 7

För att lösa detta söker vi Theveninekvivalenten genom att beräkna tomgångsspänningen och kortslutningsströmmen vid utgången $a - b$ (eftersom det finns beroende källor). Vi börjar med tomgångsspänningen.

Först måste vi inse att det inte flyter någon strömmen mellan den vänstra och den högra delen av kretsen, dvs $i_x = 0$. Detta gör att spänningen över R, dvs v_R, endast kommer att bero på strömmen som levereras av den beroende strömkällan, dvs $k_2 i_L$. En KCL vid noden "a" ger oss:

$$+k_2 i_l + \frac{v_R}{R} = 0 \rightarrow \tag{18}$$

$$v_R = -Rk_2 i_L \tag{19}$$

Vi gör därefter en spänningsvandring runt den vänstra delen och får:

$$+V_0 - j\omega L i_L - k_1 v_R = 0 \rightarrow \tag{20}$$

$$V_0 - j\omega L i_L - k_1(-Rk_2 i_L) = 0 \rightarrow \tag{21}$$

$$i_L = \frac{V_0}{j\omega L - k_1 k_2 R} \tag{22}$$

Tomgångsspänningen ger $V_{TH} = V_a - V_b = V_a - 0 = v_R$ som vi har sedan tidigare. Detta ger:

$$V_{TH} = v_R = -Rk_2 i_L = \frac{Rk_2 V_0}{k_1 k_2 R - j\omega L} \tag{23}$$

En snabb dimensionsanalys (k_1 och k_2 är dimensionslösa) ger oss enheten [V].

Nu ändrar vi situationen när vi kortsluter $a-b$ och ändrar därmed alla strömmar och spänningar. Kortslutningsströmmen är, till beloppet, helt enkelt samma strömmen som den beroende strömgeneratorn ger eftersom motståndet, R, kopplas förbi och vi får då $I_{sc} = -k_2 i_L$. Observera att nu är i_L inte samma som tidigare! Eftersom vid kortslutning blir $v_R = 0$ och därmed blir $k_1 v_R = 0$ (kortsluten) och vi får helt enkelt att $i_L = \frac{V_0}{j\omega L}$. Detta ger att:

$$I_{sc} = -k_2 i_L = \frac{-k_2 V_0}{j\omega L} \tag{24}$$

Enhent ser ut att stämma ([V]/[Ω] = [A]) Detta leder slutligen till:

$$Z_{TH} = \frac{V_{TH}}{I_{sc}} = \frac{\frac{Rk_2 V_0}{k_1 k_2 R - j\omega L}}{\frac{-k_2 V_0}{j\omega L}} = \frac{j\omega L R}{j\omega L - k_1 k_2 R}\ [\Omega] \tag{25}$$

Därmed ska vi välja $Z_L = (Z_{TH})^*$ för att maximera den aktiva effekten som utvecklas i Z_L

Uppgift 8

Vi benämner övre vänstra noden såsom "a", strömmen som går genom R_2, in i pricken på primärsidan, kallar vi I_1 och då ger KCL oss:

$$-I_0 + \frac{V_a}{R_1} + I_1 = 0 \rightarrow V_a = (I_0 - I_1)R_1 \tag{26}$$

Spänningsvandring (KVL) på primärsidan ger oss (V_1 är spänningsfallet över primärsidan):

$$+V_a - I_1 R_2 - V_1 = 0 \tag{27}$$

Vi benämner strömmen som går nedåt genom sekundärsidan som I_2, varpå spänningsvandring på sekundärsidan ger oss:

$$+V_2 + V_{Z_L} = 0 \tag{28}$$

Med I_2 är riktad nedåt genom sekundärsidan erhålls motverkande flöden (ty strömmen I_1 och I_2 går inte in i transformatorn på samma sätt, dvs I_1 går "in i pricken" medans I_2 gör inte det):

$$V_1 = j\omega L_1 I_1 - j\omega M I_2 \tag{29}$$
$$V_2 = j\omega L_2 I_2 - j\omega M I_1 \tag{30}$$

Kombinerar vi detta med spänningsvandringarna (från primär- och sekundärsidan) samt med $V_a = (I_0 - I_1)R_1$ och $V_{Z_L} = I_2 Z_L$ får vi:

$$R_1(I_0 - I_1) - I_1 R_2 - (j\omega L_1 I_1 - j\omega M I_2) \tag{31}$$
$$(j\omega L_2 I_2 - j\omega M I_1) + I_2 Z_L \tag{32}$$

Efter samlat termerna får vi.

$$I_1(-R_1 - R_2 - j\omega L_1) + I_2(j\omega M) + R_1 I_0 = 0 \tag{33}$$
$$I_1(-j\omega M) + I_2(Z_L + j\omega L_2) = \tag{34}$$

På matrisform får vi:

$$\begin{pmatrix} R_1 + R_2 + j\omega L_1 & -j\omega M \\ -j\omega M & Z_L + j\omega L_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 I_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Löser vi detta, enligt $Ax = b \to x = A^-1b$, får vi ut spänningsfallet över lasten ur $V_{Z_L} = Z_L I_2$

Uppgift 9

b, c, a, c

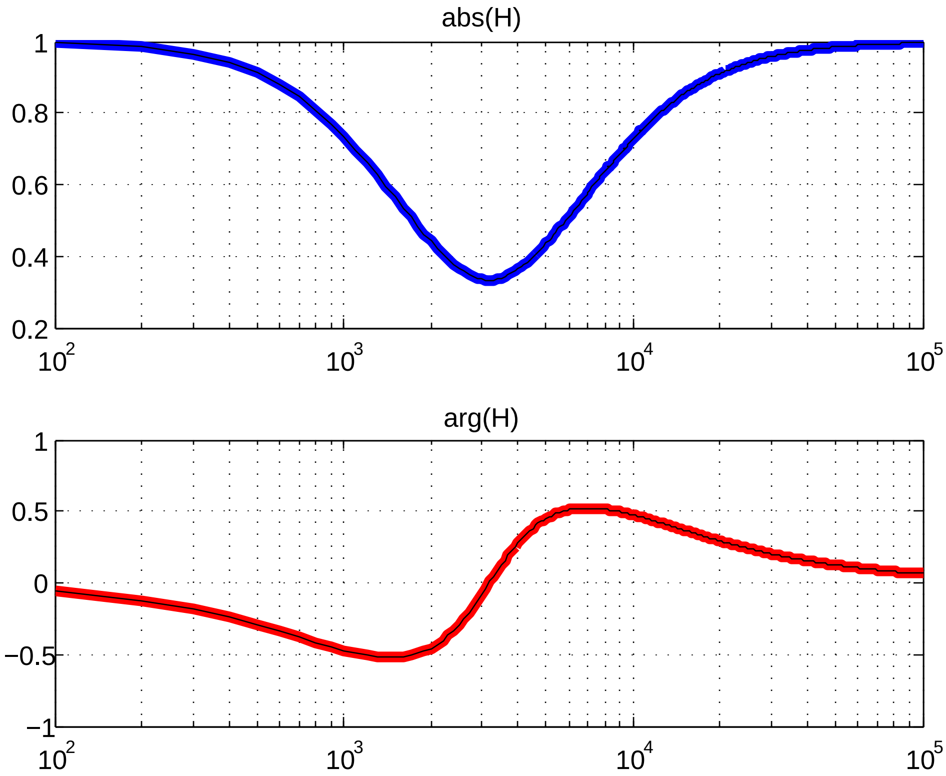


Figure 1: abs(H) och arg(H) för uppgift 2. (Fun fact: de som ser bilden i färg kan ev. urskilja en svart linje också, denna kommer från det generella uttrycket där man inte har antaget så bra värde på komponenterna.)