KTH EI1110 Elkretsanalys (CELTE), Tentamen (TEN2) 2016-03-17 kl 14–19

Hjälpmedel: En A4 sida, med studentens egna anteckningar.

Alla källor ska antas vara tidsharmoniska växelströmskällor om inget annat explicit anges och beteckningar såsom V_0, I_1 etc. beskriver amplituden hos dessa. Om ingen annan information ges ska komponenter antas vara ideala. Angivna värden av komponenter (t.ex. R för ett motstånd, U för en spänningskälla) ska antas vara kända storheter och andra markerade storheter (t.ex. strömmen genom, eller spänningen över, ett motstånd) ska antas vara okända storheter. Lösningarna ska uttryckas i de kända storheterna och förenklas innan eventuella värden används. Därmed visas förståelse för problemet. **Tänk på att er handstil måste vara tydlig för att lösningen ska kunna bedömas.** Var tydlig med diagram och definitioner av variabler. Dela tiden mellan talen och kontrollera svarens rimlighet genom t.ex. dimensionsanalys eller alternativ lösningsmetod.
Endast ett problem per sida och text på baksidan kommer inte att beaktas.
Betygsgränserna är: 50% (E), 60% (D), 70% (C), 80% (B), 90% (A).

Examinator: Daniel Månsson (08 790 9044)

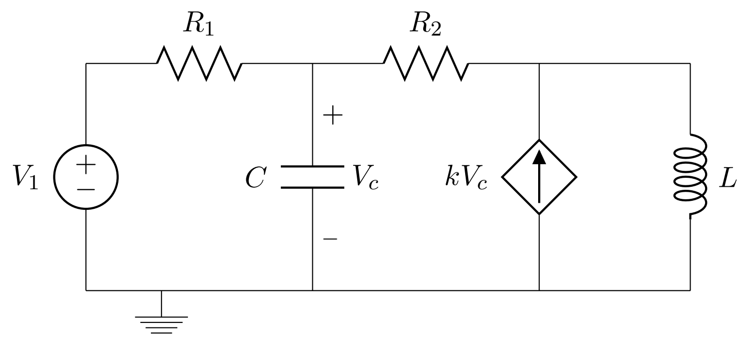
Lycka till och ta det lugnt.

Uppgift 1 [9 p.]

För kretsen nedan:

(a) [3 p.] Ställ upp nodekvationerna på matrisform (dvs på formen $Ax = b$ där A är nodadmittansmatrisen, x nodspänningsvektorn och b är källvektorn).

(b) [6 p.] Visa att summan av den komplexa effekten för alla komponenter (källor och impedanser) i kretsen är noll (dvs $\sum_i S_i = 0$).



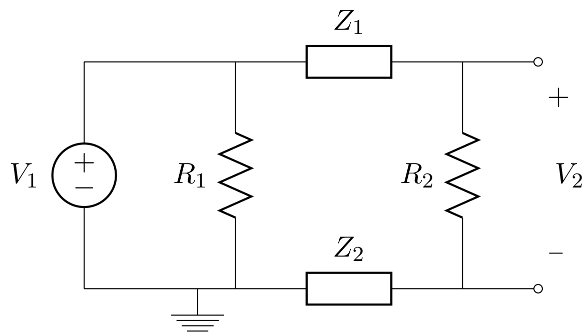
Uppgift 2 [4 p.]

För kretsen nedan:
(*Obs.* $R_1, R_2, Z_1, Z_2 \neq 0$ och ∞.)

(a) [2 p.] Bestäm överföringsfunktionen $H(\omega) = \frac{V_2(\omega)}{V_1(\omega)}$.

(b) [1 p.] Bestäm impedanserna Z_1 och Z_2 så att kretsen beter sig som ett lågpassfilter och visa vad överföringsfunktionen blir uttryckt i dessa nya impedanser.

(c) [1 p.] Bestäm impedanserna Z_1 och Z_2 så att kretsen beter sig som ett högpassfilter och visa vad överföringsfunktionen blir uttryckt i dessa nya impedanser.

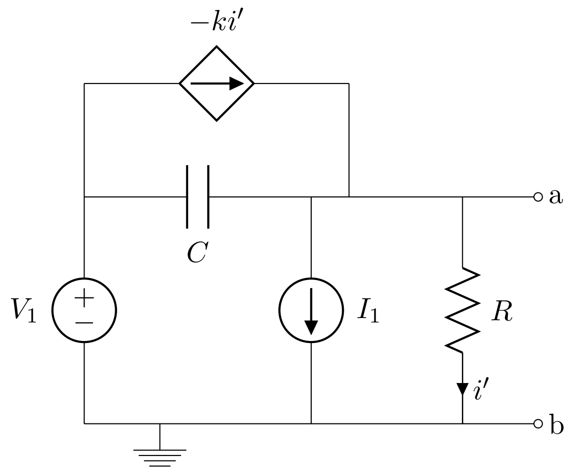


Uppgift 3 [8 p.]

För kretsen nedan:

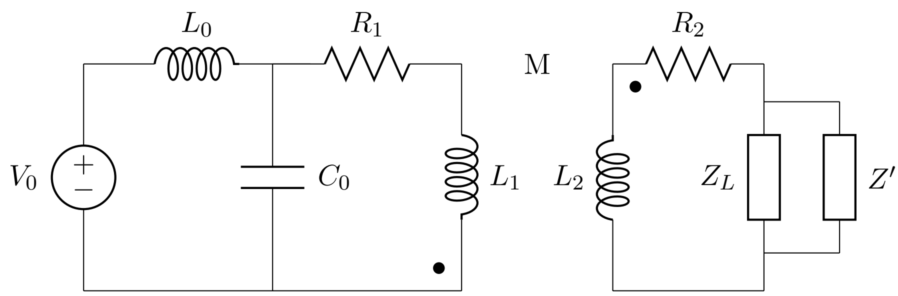
(a) [7p.] Bestäm kretsens Thevenin ekvivalent, sett ifrån utgången $a - b$ och rita den (med vanliga komponenter). Använd följande: $R = 1$, $k = 1$, $Z_c = -0.5j$, $V_1 = 10\cos(\omega t)$, $|I_1| = \sqrt{2}$, arg(I_1)$= \pi/4$. (*Tips*, sätt in värdena i slutet av din beräkningar så visar du lättare din förståelse)

(b) [1 p.] Vilken last $Z_L = R_L + jX_L$ bör kopplas mellan $a - b$ för att maximalt med aktiv effekt ska utvecklas i Z_L.



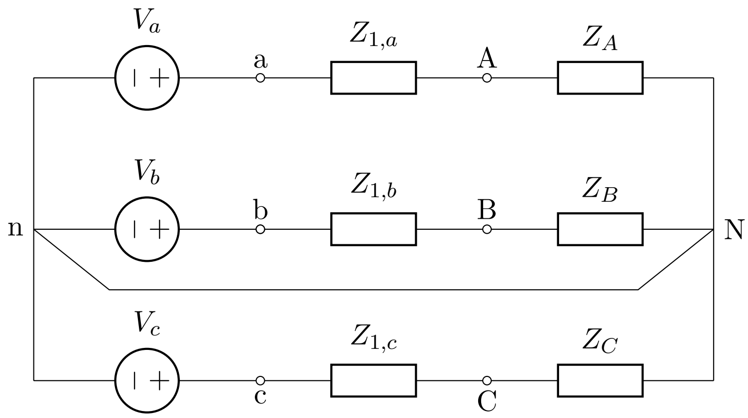
Uppgift 4 [8 p.]

Nedan finns en krets i vilken en känd generator (V_0, L_0 och C_0) är kopplad till en känd last (Z_L) genom en transformator. Antag en generell transformator (dvs. du antas då veta R_1, R_2, L_1, L_2 och M). Ställa upp nödvändiga ekvationssystem/relationer som behövs lösas och visa hur de ska behandlas för att kunna bestämma den reaktiva effekten som utvecklas i Z' ~~i förhållande till den i~~ och i Z_L.
Du måste tydligt visa din plan för hur problemet ska lösas för att få poäng.



Uppgift 5 [4 p.]

Ge det korrekta svaret på flervalsfrågorna. Endast ett svar på varje fråga är rätt och ingen motivering behövs.



1. [1 p.] För ett balanserat trefassystem, om effekten i en av faserna i lasten är x, vad är då den totalt förbrukade effekten i trefaslasten?

   (a) $3x$
   (b) $x\sqrt(2)$
   (c) $x/\sqrt(2)$
   (d) $3x/\sqrt(2)$

2. [1 p.] Vilket alternativ representerar en balanserad trefaskälla (cosinus som referens):

   (a) $V_a = 1 + j$, $V_b = \sqrt(2)\cos(\omega t + 165°)$, $V_c = \sqrt(2)\angle - 75°$
   (b) $V_a = 1 - j$, $V_b = \sqrt(2)\angle 90°$, $V_c = 1e^{-j\frac{\pi}{2}}$
   (c) $V_a = 2 - 2j$, $V_b = \sqrt(4)\cos(\omega t + 120°)$, $V_c = \sqrt(4)e^{-j\frac{2\pi}{3}}$
   (d) inget av ovan

3. [1 p.] I ett balanserat trefassystem (Y-Y) är fasförskjutningen $\pi/4$ mellan spänningen över, och strömmen genom, en av lastens faser. Vad gäller då för effekten som utvecklas i denna :

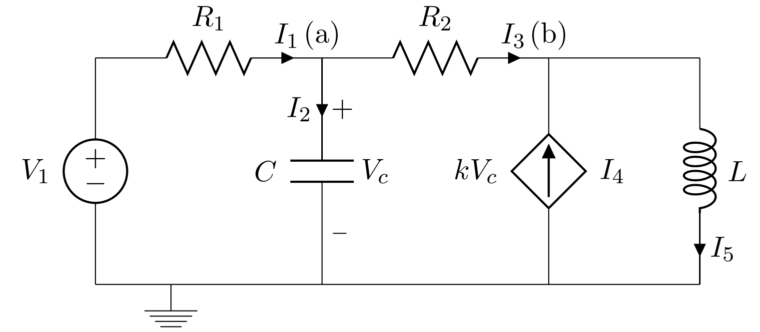
   (a) $P = 0$, $Q = 3V_m/(\sqrt{2}Z)$
   (b) $P = 3V_m/(\sqrt{2}Z)$, $Q = 0$
   (c) $S = 0$
   (d) $P = Q$

4. [1 p.] Hur står sig proportionerna av värmeförlusterna i återledaren (”nN”) i ett balanserat trefassystem?

   (a) $\propto 3V_a^2/Z_A$
   (b) $\propto |V_a|^2/Z_A^*$
   (c) $\propto V_a^2/Re\{Z_{1,a} + Z_A\}$
   (d) $\propto 0$

KTH EI1110 Elkretsanalys (CELTE), Tentamen (TEN2) 2016-03-17 kl 14–19; Lösningsförslag.

Uppgift 1 [9 p.]



(1a) Vi inför noderna a och b och använder oss av KCL i dessa och får:

$$(V_a - V_1)\frac{1}{R_1} + V_a j\omega C + (V_a - V_b)\frac{1}{R_2} = 0 \tag{1}$$

$$(V_b - V_a)\frac{1}{R_2} + V_b\frac{1}{j\omega L} - kV_c = 0 \tag{2}$$

Därtill har vi $0 + V_c = V_a$. Samlar vi nu termerna och sätter upp dem på matrisform får vi:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{R_1} + j\omega C + \frac{1}{R_2} & \frac{-1}{R_2} \\ \frac{-1}{R_2} - k & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{j\omega L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_a \\ V_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{V_1}{R_1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

(1b) Vi använder passiv konvention och vi inför strömmarna $I_1, ..., I_5$. Den komplexa effekten för varje komponent ges av $S = VI^*$. Vi får då:

1. $S_{V_1} = V_1(-I_1)^*$ (eftersom strömmen går ut ur "+"-terminalen).
2. $S_{R_1} = (V_1 - V_a)I_1^* = \frac{(V_1 - V_a)(V_1 - V_a)^*}{R_1}$
3. $S_C = V_a I_2^* = \frac{V_a V_a^*}{-1/(j\omega C)}$
4. $S_{R_2} = (V_a - V_b)I_3^* = \frac{(V_a - V_b)(V_a - V_b)^*}{R_2}$
5. $S_{KV_c} = V_b(-I_4)^*$ (eftersom vi definierar I_5 med den riktningen så måste V_b vara högre än jord och därmed går strömmen I_4 ut ur "+"-terminalen på strömkallan (pga hur den är ritad) och vi får ett minustecken. Byter vi riktningar så försvinner detta minustecken men andra kommer in senare så vi ska få samma resultat i slutändan).

6. $S_L = V_b I_5^* = \frac{V_b V_b^*}{-j\omega L}$

Vi har inga komponentvärde och att lösa ut nodspänningarna behövs inte här utan vi använder oss här direkt av uttrycken skrivna med $S_i = V_i I_i^*$ istället (se *Tellegen's teorem*). Vi får med KCL i noderna (a) och (b): $-I_1 + I_2 + I_3 = 0$ samt $-I_3 - I_4 + I_5 = 0$ som vi sätter in. Vi får:

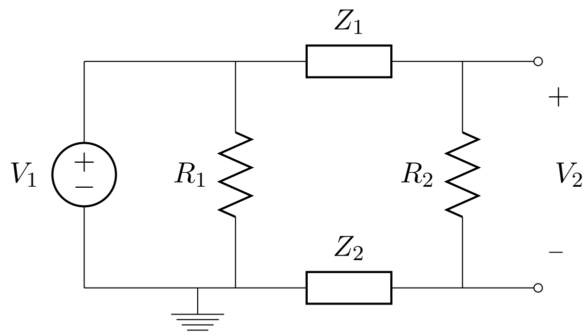
$$\sum S_i = V_1(-I_1)^* + (V_1 - V_a)I_1^* + V_a I_2^* + (V_a - V_b)(I_1 - I_2)^* + V_b(I_3 - I_5)^* + V_b I_5^* \quad (3)$$

Man kan se att några termer tar ut varandra direkt och om vi använder igen att $I_1 - I_2 = I_3$ får vi att:

$$\sum S_i = -V_b I_3^* + V_b(I_3 - I_5)^* + V_b I_5^* = 0 \quad (4)$$

Det är det kortaste sättet att här visa $\sum S_i = \sum V_i I_i^* = 0$.
Som sagt, man kan alternativt lösa ut nodspänningarna (a) och (b) och använda sig av $S_i = \frac{V_i}{I_i^*} = \frac{V_i V_i^*}{Z_i^*}$.

Uppgift 2 [4 p.]



(2a) I detta fallet är det lättast att göra en KVL runt kretsen (istället för nodanalys i "$+V_2$" och "$-V_2$"):

$$+V_1 - IZ_1 - IR_2 - IZ_2 = 0 \Leftrightarrow I = \frac{V_1}{Z_1 + Z_2 + R_2} \quad (5)$$

Vi får nu $V_2 = IR_2$ och:

$$H = \frac{V_2}{V_1} = \frac{R_2}{Z_1 + Z_2 + R_2} \quad (6)$$

(Alternativt lösar man ut noderna $V_a =$ " $+ V_2$" och $V_b =$ " $- V_2$" ur nodekvationerna:

$$(V_a - V_1)\frac{1}{Z_1} + (V_a - V_b)\frac{1}{R_2} = 0 \quad (7)$$

$$(V_b - V_a)\frac{1}{R_2} + V_b\frac{1}{Z_2} = 0 \quad (8)$$

Man får då:

$$V_a = V_1 \frac{R_2 + Z_2}{Z_1 + R_2 + Z_2} \tag{9}$$

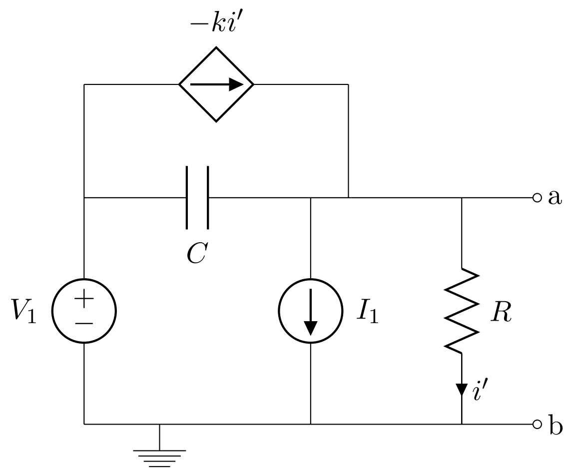
$$V_b = V_1 \frac{Z_2}{Z_1 + R_2 + Z_2} \tag{10}$$

Ur detta får vi $V_2 = V_a - V_b$ vilket sen ger samma som ovan.)

(2b) Överföringsfunktionen för ett lågpassfilter ser ut såsom: $H = 1/(1 + j\omega RC)$ eller $H = 1/(1 + j\omega L/R)$. Det vi kan matcha till överföringsfunktionen för kretsen ovan är $H = 1/(1 + \frac{1}{R_2}(Z_1 + Z_2))$ vilket gör att vårt enda val är att använda kretsen med "$j\omega L/R$"-termen. Därmed ska vi sätta $Z_1 + Z_2 = jX_1$ där $X_1 > 0$. Dvs. summan $Z_1 + Z_2$ måste vara induktiv. Kretsen ser då ut som ett lågpassfilter med en induktans och en resistans (se t.ex. föreläsningsanteckningarna) där $j\omega L = Z_1 + Z_2 = jX_1$.

(2c) Resonomanget går på samma sätt som ovan. Överföringsfunktionen för högpassfiltret måste väljas här såsom $H = j\omega RC/(1+j\omega RC) = R/(R-j/(\omega C))$. Överföringsfunktionen från vår krets är $H = R_2/(R_2 + Z_1 + Z_2)$ vilket ger att vi måste ha $Z_1 + Z_2 = -j/X_2 = 1/jX_2)$ med $X_2 > 0$, vilket totalt sett ger att $Z_1 + Z_2$ måste ha ett kapacitivt beteende. Kretsen ser då ut som ett högpassfilter med en kapacitans och en resistans (se t.ex. föreläsningsanteckningarna) där $1/(j\omega C) = Z_1 + Z_2 = -j/X_2$.

Uppgift 3 [8 p.]



(3a) För att erhålla Thevenin ekvivalenten kan vi t.ex. använda oss av tomgångsspänningen (V_{TH}) och kortslutningsströmmen (I_{sc}) vid utgången i fråga ($a-b$).
En KCL vid noden a ger oss (med $V_b = 0$):

$$(V_a - V_1)j\omega C + I_1 + i' + ki' = 0 \tag{11}$$

$$i' = V_a/R \rightarrow \tag{12}$$

$$V_a = \frac{V_1 j\omega C - I_1}{j\omega C + \frac{1}{R}(1+k)} = V_{TH} \tag{13}$$

(Med data i texten får vi $V_1 = 10$ och $I_1 = 1 + j$ vilket ger $V_{TH} = \frac{19j-1}{2+2j} = 4.5 + 5j$.)

När vi kortsluter utgången $a-b$ så kommer spänningsfallet över R att bli noll och det går ingen ström genom resistansen, därmed är $i' = 0$. Vi ersätta därför den beroende källan med ett avbrott. Nu har nodspänningen V_a ändrats från fallet ovan och en KCL vid noden a ger oss nu (med $V_b = V_a$=0):

$$I_{sc} + I_1 + (0 - V_1)j\omega C = 0 \tag{14}$$

$$I_{sc} = V_1 j\omega C - I_1 \tag{15}$$

Vi får nu:

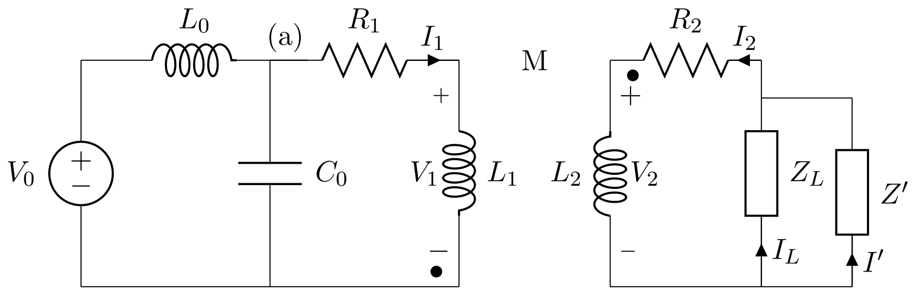
$$Z_{TH} = V_{TH}/I_{sc} = \left(\frac{V_1 j\omega C - I_1}{j\omega C + \frac{1}{R}(1+k)}\right)/(V_1 j\omega C - I_1) = \tag{16}$$

$$= \frac{1}{j\omega C + \frac{1}{R}(1+k)} = \frac{1}{2j+2} = \frac{1}{4}(1-j) \tag{17}$$

Z_{TH} består av $R = 1/4$ i serie med en kapacitans med impedansen $Z_c = \frac{1}{j\omega C} = -j/4$.

(3b) Vi ska sätta $Z_L = Z_{TH}^* = \frac{1}{4}(1+j)$ för att utveckla maximalt med aktiv effekt i Z_L.

Uppgift 4 [8 p.]



[*I texten hade tyvärr en rest från en tidigare version av uppgiften (då kretsen såg annorlunda ut) följt med och det ska stå "reaktiva effekten som utvecklas i Z' och i Z_L.". Givetvis tas detta misstaget i beaktande (till er fördel) vid rättningen.*]

Vi behöver veta strömmarna som går genom Z_L och Z'.
Vi definierar nodspänningen V_a, spänningsfallen V_1 och V_2 samt strömmarna I_1, I_2, I_L och I' i kretsen.
Vi börjar med att göra en KCL vid noden a:

$$V_a j\omega C + \frac{(V_a - V_0)}{j\omega L} + \frac{(V_a - V_1)}{R_1} = 0 \rightarrow \tag{18}$$

$$V_a = \left(\frac{V_0}{j\omega L} + \frac{V_1}{R_1}\right) / (j\omega C + 1/R_1 + 1/(j\omega L)) \tag{19}$$

Vi gör sedan en spänningsvandring (KVL) runt maskan med L_1:

$$+V_a - I_1 R_1 - V_1 = 0 \rightarrow \tag{20}$$

$$\left(\frac{V_0}{j\omega L} + \frac{V_1}{R_1}\right) / (j\omega C + 1/R_1 + 1/(j\omega L)) - I_1 R_1 - V_1 = 0 \tag{21}$$

Vi behöver veta V_1 också.
Eftersom prickarna som indikerar hur lindningarna på transformatorns spolar är gjorda (alternativt hur spolarna är riktade) är placerade som de är så kommer vi att få destruktiv interferens i flödena (och vi får därför minustecknen nedan):

$$V_1 = j\omega L_1 I_1 - j\omega M I_2 \tag{22}$$

$$V_2 = j\omega L_2 I_2 - j\omega M I_1 \tag{23}$$

Vi kan använda uttrycket för V_1 och då får vi:

$$\left(\frac{V_0}{j\omega L} + \frac{j\omega L_1 I_1 - j\omega M I_2}{R_1}\right) / (j\omega C + 1/R_1 + 1/(j\omega L)) - ... \tag{24}$$

$$I_1 R_1 - (j\omega L_1 I_1 - j\omega M I_2) = 0 \tag{25}$$

Nu lämnar vi primärsidan av transformatorn ett tag och vi gör en spänningsvandring (KVL) runt maskan med L_2 som ger (t.ex.) med V_2 sen insatt:

$$-I_L Z_L - I_2 R_2 - V_2 = 0 \rightarrow \tag{26}$$

$$-I_L Z_L - I_2 R_2 - (j\omega L_2 I_2 - j\omega M I_1) = 0 \tag{27}$$

Vi får strömmen genom Z_L med strömdelning: $I_L = I_2 \frac{Z'}{Z_L + Z'}$ som vi kan använda i ekvationen ovan. (På samma sätt får vi $I' = I_2 \frac{Z_L}{Z_L + Z'}$.)

$$-I_2 \frac{Z'}{Z_L + Z'} Z_L - I_2 R_2 - (j\omega L_2 I_2 - j\omega M I_1) = 0 \tag{28}$$

Denna ekvationen tillsammans med den för primärsidan är det vi behöver!
Vi har ett ekvationssystem i kända storheter (impedanserna och V_0) och med de okända strömmarna I_1 och I_2 som vi kan lösa (samla först termerna för I_1, I_2 och källan V_0). Därmed kan vi få strömmarna genom Z_L och Z' (dvs. I_L och I') och de reaktiva effekterna, Q_i ur $S_i = P_i + jQ_i$, som utvecklas däri med (samma spänning, V_L, ligger över dem):

$$Q_{Z_L} = Im\{V_L I_L^*\} = Im\{Z_L I_L I_L^*\} \tag{29}$$

$$Q_{Z'} = Im\{V_L I'^*\} = Im\{Z' I' I'^*\} \tag{30}$$

Uppgift 5 [4 p.]

a, a, d, d