KTH ei1110 Elkretsanalys (CELTE), tentamen (TEN2) 2017-06-08 kl 08–13.

Hjälpmedel: En A4 sida, med studentens egna anteckningar.

Alla källor ska antas vara tidsharmoniska växelströmskällor om inget annat explicit anges och beteckningar såsom V_0, I_1 etc. beskriver oftast amplituden hos dessa. Om ingen annan information ges ska komponenter antas vara ideala. Angivna värden av komponenter (t.ex. R för ett motstånd, U för en spänningskälla) ska antas vara kända storheter och andra markerade storheter (t.ex. strömmen genom, eller spänningen över, ett motstånd) ska antas vara okända storheter. Antag **stationärt tillstånd**, dvs. lång tid efter alla komponenter har kopplats ihop.
Några viktiga saker för att kunna få maximalt antal poäng:

- **Endast ett problem per sida** och text på baksidan kommer inte att beaktas.
- Tänk på att er handstil måste vara tydlig för att lösningen ska kunna bedömas. **Kan vi inte läsa, kan vi inte ge poäng!** Använd **inte rödpenna**.
- Lösningarna ska uttryckas i de kända storheterna och förenklas **innan** eventuella värden används. Därmed visas förståelse för problemet.
- **Ge alltid din krets** och var tydlig med diagram och definitioner av variabler. Tänk på hur du definierar polariteten och riktningen på de spänningar och strömmar du använder. Om det fattas figur med definierade variabler utsatta kan det bli **avdrag** vid tvetydighet. Var noga med definitionen av impedanserna, t.ex. en spoles impedans är inte "L", detta kan ge avdrag.
- Därtill, dela tiden mellan talen och kontrollera svarens rimlighet genom t.ex. dimensionsanalys eller alternativ lösningsmetod.

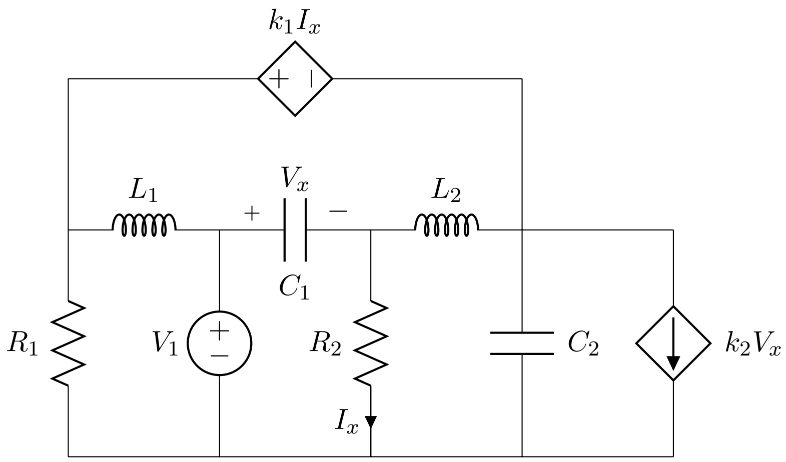
Betygsgränserna är: 50% (E), 60% (D), 70% (C), 80% (B), 90% (A).
För (Fx) krävs $> 45\%$ samt att inte mer än ett tal har poängen x sådan att $0 < x < 50\%$.
(Med detta menas att för att få Fx får endast ett tal dra ner resultatet under godkänt.)

Examinator: Daniel Månsson (08 790 9044)

Lycka till och ta det lugnt!

Uppgift 1 [7 p.]

Antag att du ska bestämma den komplexa effekten som utvecklas i V_1 i kretsen nedan. Använd KCL och ställ upp enbart de nödvändiga nodekvationerna (och eventuellt andra erforderliga ekvationer) som du behöver för att beräkna effekten och förklara/visa hur du skulle använda dem.



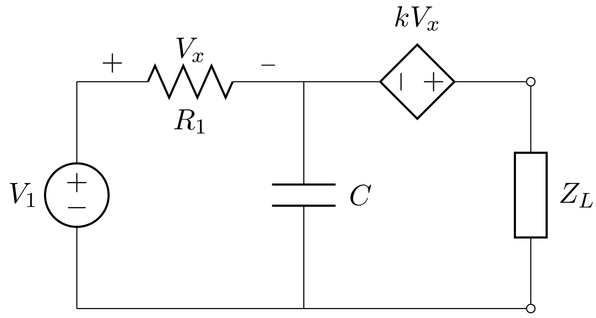
Uppgift 2 [16 p.]

För kretsen nedan:

(a) [6 p.] Visa att summan av den komplexa effekten från alla komponenter (källor och impedanser) i kretsen är noll (dvs. att $\sum S = 0$ är uppfyllt).

(b) [9 p.] Bestäm Z_L så att maximalt med aktiv effekt utvecklas i denna.
Använd här följande: $R_1 = 10$ [Ω], $k = 5$, $Z_C = -j10$ [Ω], $V_1 = -40 + j40$ [V].
Obs, sätt endast in värdena i slutet av dina olika beräkningar så visar du din förståelse!

(c) [1 p.] Utifrån ditt Z_L ovan, kan detta väljas med vanliga komponter (R, L, C)? Argumentera.

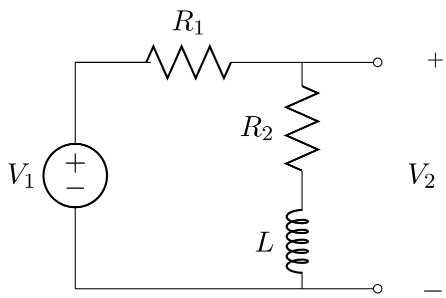


Uppgift 3 [8 p.]

Antag att vi har kretsen nedan i vilken $R_2 + j\omega L$ är impedansen för en spole från vårt labb.

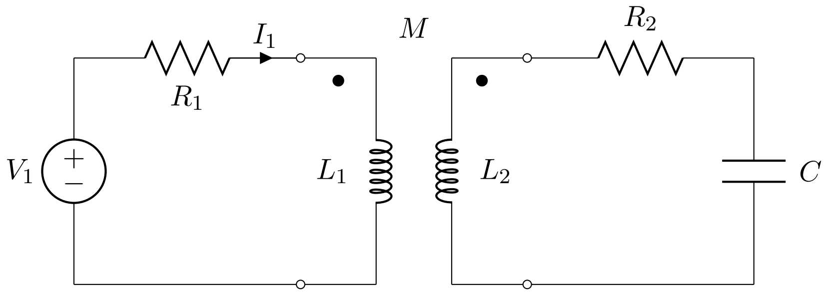
(a) [6 p.] Antag nu att vi bytar ut den mot en spole med, i princip, ingen resistans. Härled överföringsfunktionerna, $H(\omega)$, för de två fallen samt studera dem genom att rita Bodediagrammen för förstärkningen, dvs. $|H(\omega)|$, (inkluderat värden på deras olika nivåer och intressanta brytfrekvenser).

(b) [2 p.] Diskutera skillnaderna inkluderat ev. fördelar och nackdelar med de två filtren.



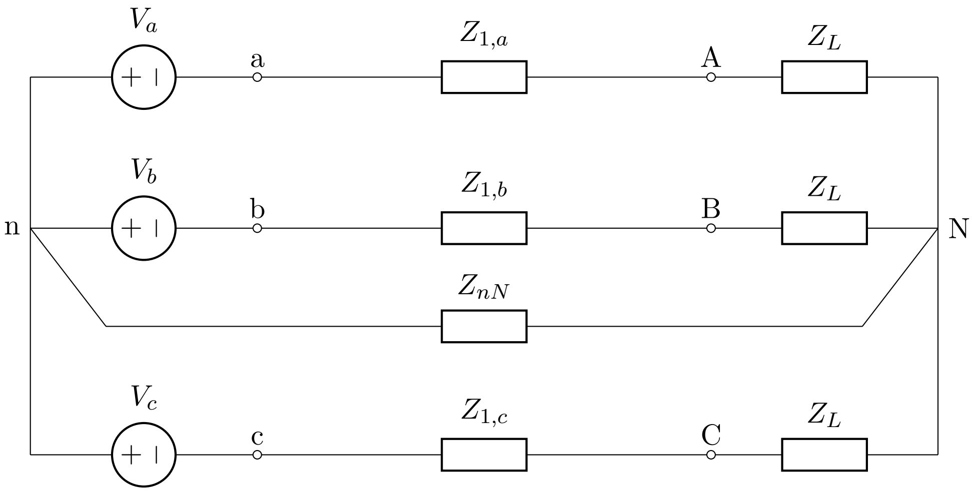
Uppgift 4 [8 p.]

I kretsen nedan, härled den impedans som V_1 ser (dvs. $Z_{int} = \frac{V_1}{I_1}$).
(*Tips,* använd $Z_1 = R_1 + j\omega L_1$ och $Z_2 = R_2 + j\omega L_2 + 1/(j\omega C)$ så blir det mer överskådligt efter början av härledningen).



Uppgift 5 [4 p.]

Ge det korrekta svaret på flervalsfrågorna. Endast ett svar på varje fråga är rätt och ingen motivering behövs.



1. [1 p.] För ett balanserat trefassystem, om den förbrukade effekten i trefaslasten är x, vad är då effekten i en av fasernas last (dvs. $|Z_L|$)?

   (a) $x\sqrt(2)$
   (b) $|x|\angle 120°$
   (c) x
   (d) $x/3$

2. [1 p.] I ett balanserat trefasssystem, vilken reaktiv effekt utvecklas i återledaren, dvs. Z_{nN}

   (a) $\propto \sum (V_i V_i^* / (Z_{1,i} + Z_i)^*)$, där $i = a, b, c$
   (b) $\propto \sum (Q_a + Q_b + Q_c)$

(c) $\propto Re\{S_a\}\angle(Z_{1,a} + Z_{1,b} + Z_{1,c} - Z_{nN})$
(d) 0

3. [1 p.] Vilket alternativ representerar en balanserad trefaskälla (cosinus som referens):

   (a) $V_a = 2 + 2j$, $V_b = \sqrt(8)\cos(\omega t + 165°)$, $V_c = \sqrt(8)\angle - 75°$
   (b) $V_a = 3 - 3j$, $V_b = \sqrt(18)\angle + 120°$, $V_c = \sqrt(18)e^{-j\frac{2\pi}{3}}$
   (c) $V_a = 1 + j$, $V_b = \sqrt(1)\angle 90°$, $V_c = 1e^{-j\frac{\pi}{2}}$
   (d) inget av ovan

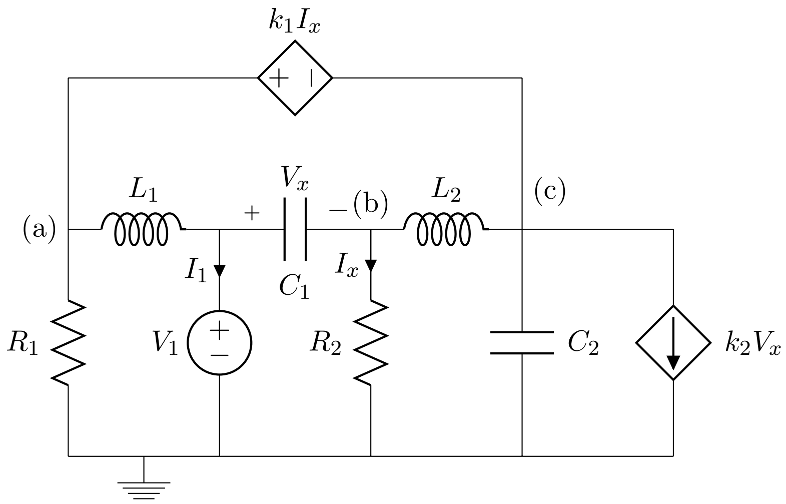
4. [1 p.] Om fasförskjutningen mellan spänning och ström i en fas i en trefaslast är sådan att den reaktiva effekten är lika med den skenbara effekten ($|S|$), vad är då den aktiva effekten där?

   (a) 1
   (b) $|S|$
   (c) $1/\sqrt(3)$
   (d) 0

KTH ei1110 Elkretsanalys (CELTE), tentamen (TEN2) 2017-06-08 kl 08–13; lösningsförslag

---

Uppgift 1 [7 p.]



Vi definierar noder och ser att noden mellan L_1 och C_1 har värdet V_1. Om vi tittar på strömmen, I_1, ner genom V_1 så kan den fås genom (KCL):

$$I_1 + \frac{V_1 - V_a}{j\omega L_1} + \frac{V_1 - V_b}{1/(j\omega C_1)} = 0 \tag{1}$$

Vi använder oss av en supernod bestående av "$(a) - -k_1 I_x - -(c)$". Nu tittar vi på strömmarna (KCL) som blir i supernoden samt i nod (b).

$$\frac{V_a}{R_1} + \frac{V_a - V_1}{j\omega L_1} + \frac{V_c}{1/(j\omega C_2)} + \frac{V_c - V_b}{j\omega L_2} + k_2 V_x = 0 \tag{2}$$

$$\frac{V_b - V_c}{j\omega L_2} + \frac{V_b}{R_2} + \frac{V_b - V_1}{1/(j\omega C_1)} = 0 \tag{3}$$

Vi har två ekvationer men fler obekanta. Vi bestämmer oss för att behålla V_a och V_b som variabler (eftersom det är dessa som vi behöver veta för I_1) så vi behöver mer information för att uttrycka de andra obekanta. Spänningsvandring (KVL) ger oss:

$$V_1 - V_x = V_b \rightarrow V_x = V_1 - V_b \tag{4}$$

$$V_a - k_1 I_x = V_c \rightarrow I_x = \frac{1}{k_1}(V_a - V_c) \tag{5}$$

$$I_x = \frac{V_b}{R_2} \rightarrow V_c = V_a - V_b \frac{k_1}{R_2} \tag{6}$$

Nu har vi uttryckt V_x och V_c i V_a och V_b så vi kan lösa ut nodekvationerna i dessa. Därmed vet vi V_a och V_b och kan nu få ut I_1. När vi sedan vet I_1 kan vi använda denna för att beräkna den komplexa effekten som utvecklas i V_1 (notera tecknet för I_1 och dess riktning in i V_1).

$$S_{V_1} = V_1 I_1^* \tag{7}$$

Alternativ till att använda sig av en supernod är att titta på strömmarna i nod (a) och nod (c) var för sig och sedan föra samma dessa två ekvationer till den ovan. Vi får, där I_{k_1} är strömmen genom $k_1 I_x$:

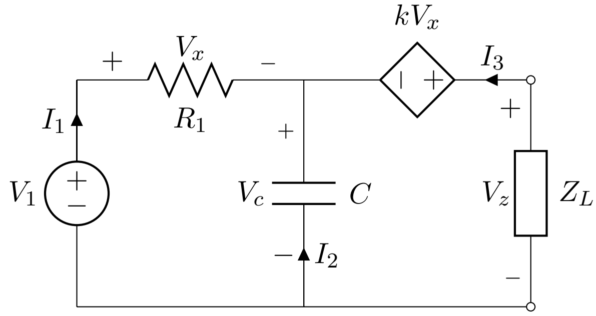
$$\frac{V_a}{R_1} + \frac{V_a - V_1}{j\omega L_1} + I_{k_1} = 0 \tag{8}$$

$$\frac{V_c}{1/(j\omega C_2)} + \frac{V_c - V_b}{j\omega L_2} + k_2 V_x - I_{k_1} = 0 \tag{9}$$

Sedan kan vi fortsätta som ovan.

Uppgift 2 [16 p.]

(2a) Vi använder passiv konvention och inför strömmar och spänningar och tittar på den komplexa effekten som utvecklas i de olika komponenterna. Det är viktigt att tänka på vilket tecken det blir framför de individuella effekterna som resultat av om den definierade strömmen lämnar eller går in i "plus terminalen" av spänningen där. Hur man än definierar strömmarna (eller spänningarna) så kommer det i slutat att bli samma (om man håller reda på tecknen dvs.). Vi får:



$$\sum S = V_1(-I_1)^* + V_x I_1^* + V_c(-I_2)^* + kV_x I_3^* + V_z(-I_3)^* \tag{10}$$

Därtill har behöver vi veta hur de olika spänningarna och strömmarna förhåller sig till varandra:

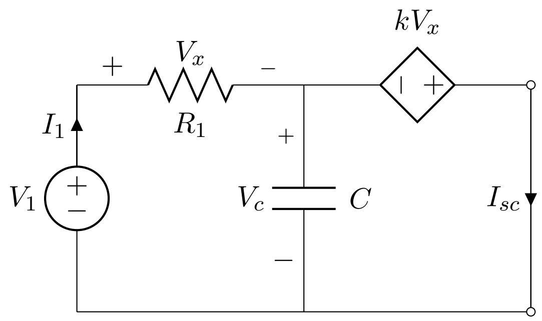
$$+V_1 - V_x - V_c = 0 \tag{11}$$
$$+V_c + kV_x - V_z = 0 \tag{12}$$
$$-I_1 - I_2 - I_3 = 0 \tag{13}$$

Om vi använder dessa tre och sedan samlar termerna får vi en ekvation som summeras till noll:

$$V_1(I_2+I_3)^* + V_x(-I_2-I_3)^* + (V_1-V_x)(-I_2)^* + kV_xI_3^* + (V_1-V_x+kV_x)(-I_3)^* = 0 \tag{14}$$

Q.E.D.

(2b) För att beräkna detta Z_L använder vi oss av Thevenin ekvivalenten av kretsen (till vänster om Z_L) och vi behöver då veta korslutningsströmmen och tomgångsspänningen. Vid kortslutning får vi efter spänningsvandringar:



$$+V_1 - V_x - Z_c(I_1 - I_{sc}) = 0 \tag{15}$$
$$+Z_c(I_1 - I_{sc}) + kV_x = 0 \tag{16}$$

Därtill har vi $V_x = R_1I_1$. Om vi kombinerar detta med de två ekvationerna ovan får vi:

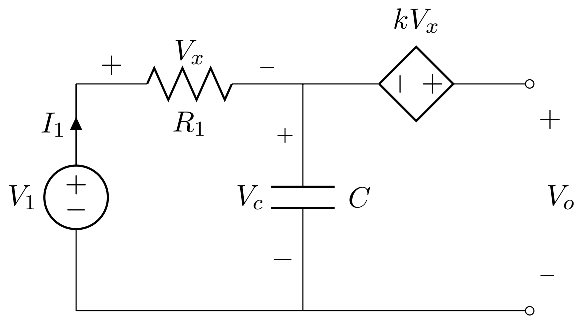
$$V_1 - R_1I_1 = -kR_1I_1 \rightarrow I_1 = \frac{V_1}{R_1(1-k)} \tag{17}$$

Om vi sätter in våra värden så får vi $I_1 = (-40+40j)/(10(1-5)) = 1-j$. Vi kan få ut kortslutningsströmmen ur:

$$Z_c(I_1 - I_{sc}) + kR_1I_1 = 0 \rightarrow I_{sc} = \frac{Z_cI_1 + kR_1I_1}{Z_c} \tag{18}$$

Om vi sätter in våra värden så får vi $I_{sc} = 6 + 4j$.

Om vi nu istället tittar på tomgångspänningen så har situationen ändrats (strömmar och spänningar i kretsen är mest troligen inte samma längre) och vi får:



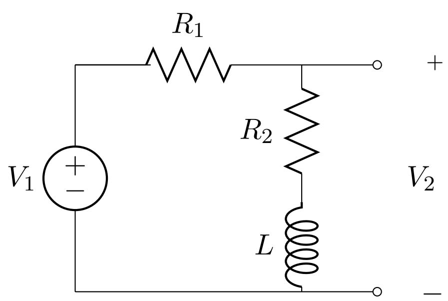
$$+V_1 - R_1 I_1 - Z_c I_1 = 0 \rightarrow I_1 = \frac{V_1}{R_1 + Z_c} = -4 \tag{19}$$

$$+V_0 - kR_1 I_1 - Z_c I_1 = 0 \rightarrow V_0 = (kR_1 + Z_c) I_1 = \frac{kR_1 + Z_c}{R + Z_c} V_1 = -200 + j40 \tag{20}$$

Vi får nu en impedans $Z_{TH} = V_0 / I_{sc} = -20 + j20$ vilket gör att vi ska välja $Z_L = (Z_{TH})^* = -20 - j20$.

(2c) Eftersom Z_L har en resistiv del som är mindre än noll så kan vi inte realisera denna i endast vanliga" R, L, C komponenter.

Uppgift 3 [8 p.]



(3a) Vi har två filter där R_2 är borta i den ena. Överföringsfunktionerna kan fås med (t.ex.) spänningsdelning och vi får:

$$H_1 = \frac{V_2}{V_1} = \frac{R_2 + j\omega L}{R_1 + R_2 + j\omega L} = k_1 \frac{1 + \frac{j\omega}{\omega_1}}{1 + \frac{j\omega}{\omega_{21}}} \tag{21}$$

$$k_1 = \frac{R_2}{R1 + R_2}, \ \omega_1 = R_2/L, \ \omega_{21} = (R_1 + R_2)/L \tag{22}$$

$$H_2 = \frac{V_2}{V_1} = \frac{j\omega L}{R_1 + j\omega L} = k_2 \frac{j\omega}{1 + \frac{j\omega}{\omega_{22}}} \tag{23}$$

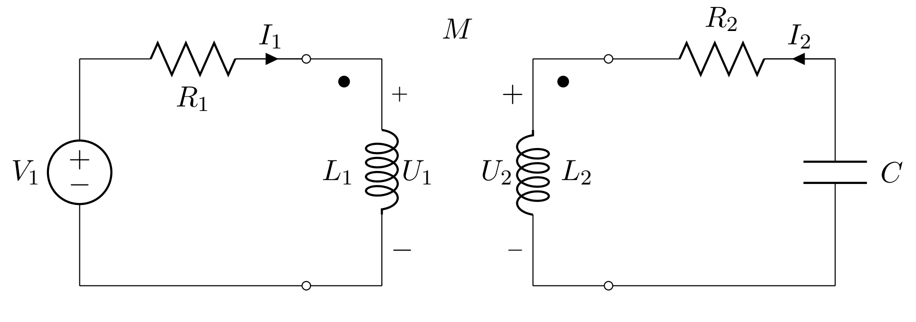
$$k_2 = \frac{L}{R_1}, \ \omega_{22} = R_1/L \tag{24}$$

Vi kan nu identifiera brytfrekvenserna, där $\omega_1 = \frac{R_2}{L}$ är ett nollställe och $\omega_{21} = \frac{R_1+R_2}{L}$ samt $\omega_{22} = \frac{R_2}{L}$ poler. Nollställe ändrar $|H(\omega)|$ med +20 dB/dekad och en pol ändrar $|H(\omega)|$ med -20 dB/dekad. Därtill så kan vi ur detta få att $H_1(\omega = 0) = k_1$ och $H_2(\omega = 0) = 0$ samt att $H_1(\omega \to \infty) \to 1$ och $H_2(\omega \to \infty) \to 1$.

Så med detta får vi en graf såsom (för att rita i Matlab har följande värden använts $R_1 = R_2 = 100[\Omega]$, $L = 0.001[H]$ vilket ger att $\omega_1 = 1e5$ [rad/s], $\omega_{21} = 2e5$ [rad/s], $\omega_{22} = 1e5$ [rad/s] samt $\frac{R_2}{R_1+R_2} = 0.5 \approx -6$ dB, se "Figure 1" nedan):

(3b) Båda dessa filter fungerar såsom högpass filter, där H_2 dämpar de lägre frekvenserna mycket mer än H_1 som har en DC nivå som sätts av $R2/(R1 + R2)$. En tänkbar fördel med H_2 är att omslaget från en "dämpande" nivå till en "pass" sker i ett smalare frekvensspann än för H_1, vilket är bättre om man vill särskilja dämpande mot icke-dämpade frekvenser (eftersom alla dämpade frekvenser för H_2 har olika värden.

Uppgift 4 [8 p.]



Vi behöver veta I_1 så vi börja med att definiera en ström I_2 på sekundär sidan som går in i pricken. Detta ger oss då:

$$+V_1 - R_1 I_1 - U_1 = 0 \tag{25}$$
$$+U_2 + R_2 I_2 + Z_c I_2 = 0 \tag{26}$$
$$U_1 = j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_2 \tag{27}$$
$$U_2 = j\omega L_2 I_2 + j\omega M I_1 \tag{28}$$

Om vi nu använder oss av $Z_1 = R_1 + j\omega L_1$ och $Z_2 = R_2 + j\omega L_2 + Z_c$ och ordnar termerna så får vi:

$$V_1 - Z_1 I_1 - j\omega M I_2 = 0 \tag{29}$$
$$Z_2 I_2 + j\omega M I_1 = 0 \rightarrow I_1 = I_2 \frac{Z_2}{-j\omega M} \tag{30}$$

Vi kan nu använda I_1 i spänningsvandring på primärsidan och få:

$$V_1 - Z_1 \left(I_2 \frac{Z_2}{-j\omega M} \right) - j\omega M I_2 = 0 \rightarrow \tag{31}$$
$$j\omega M V_1 + Z_1 Z_2 I_2 + \omega^2 M^2 I_2 = 0 \rightarrow I_2 = \frac{-j\omega M V_1}{Z_1 Z_2 + \omega^2 M^2} \rightarrow \tag{32}$$

Vi sätter nu in detta i uttrycket för I_1:

$$I_1 = \left(\frac{-j\omega M V_1}{Z_1 Z_2 + \omega^2 M^2} \right) \frac{Z_2}{-j\omega M} = \frac{V_1 Z_2}{Z_1 Z_2 + \omega^2 M^2} \rightarrow \tag{33}$$
$$\tag{34}$$
$$Z_{int} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{Z_1 Z_2 + \omega^2 M^2}{Z_2} = Z_1 + \frac{\omega^2 M^2}{Z_2} \tag{35}$$

Uppgift 5 [4 p.]

d, d, a, d

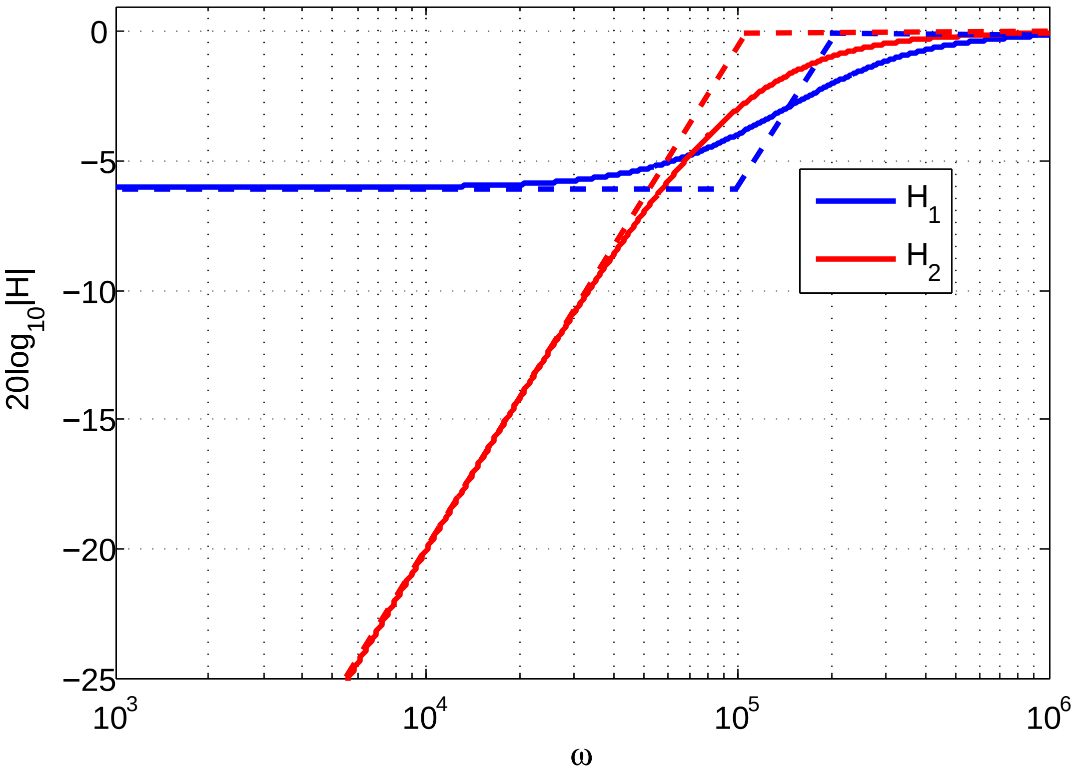


Figure 1: $|H|$ ritat med den approximativa metoden samt verkligt beteende ritat i Matlab. Notera +20 dB/dekad förändringen för den approximativa metoden.