KTH ei1110 Elkretsanalys (utökad kurs) CELTE, tentamen (TEN1) 2017-10-27 kl 08–13.

Hjälpmedel: Inga extra hjälpmedel är tillåtna.

Alla källor ska antas vara likströmskällor och beteckningar såsom V_0, I_1 etc. beskriver oftast amplituden hos dessa. Om ingen annan information ges ska komponenter antas vara ideala. Angivna värden hos komponenter (t.ex. R för ett motstånd, V för en spänningskälla) ska antas vara kända storheter och andra markerade storheter (t.ex. strömmen genom, eller spänningen över, ett motstånd) ska antas vara okända storheter. Om inget annat framgår, antag stationärt tillstånd, dvs. lång tid efter att alla komponenter har kopplats ihop.
Några viktiga saker för att kunna få maximalt antal poäng:

- **Endast ett problem per sida** och text på baksidan kommer inte att beaktas.
- Tänk på att er handstil måste vara tydlig för att lösningen ska kunna bedömas. **Kan vi inte läsa, kan vi inte ge poäng!** Använd **inte rödpenna**.
- Lösningarna bör som oftast uttryckas i de kända storheterna och förenklas **innan** eventuella värden används. Därmed visas förståelse för problemet.
- **Ge alltid din krets** och var tydlig med diagram och definitioner av variabler. Tänk på hur du definierar polariteten och riktningen på de spänningar och strömmar du använder. **Använd passiv teckenkonvention**. Om det fattas figur med definierade variabler utsatta kan det bli **avdrag** vid tvetydighet.
- Därtill, dela tiden mellan talen och kontrollera svarens rimlighet genom t.ex. dimensionsanalys eller alternativ lösningsmetod.

Betygsgränserna är: 50% (E), 60% (D), 70% (C), 80% (B), 90% (A).
För (Fx) krävs $> 45\%$ samt att inte mer än ett tal har poängen x sådan att $0 < x < 50\%$.
(Med detta menas att för att få Fx får endast ett tal dra ner resultatet under godkänt.)

Examinator: Daniel Månsson (08 790 9044)

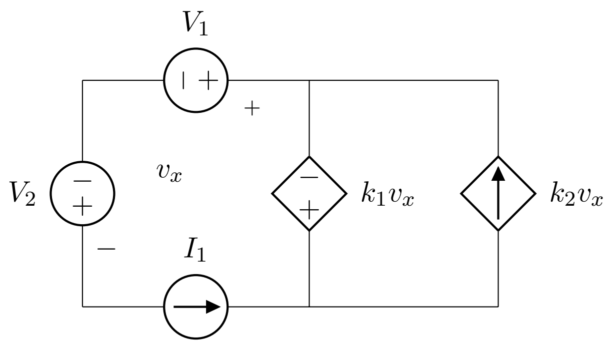
Lycka till och ta det lugnt!

Uppgift 1 [14 p.]

För kretsen här:

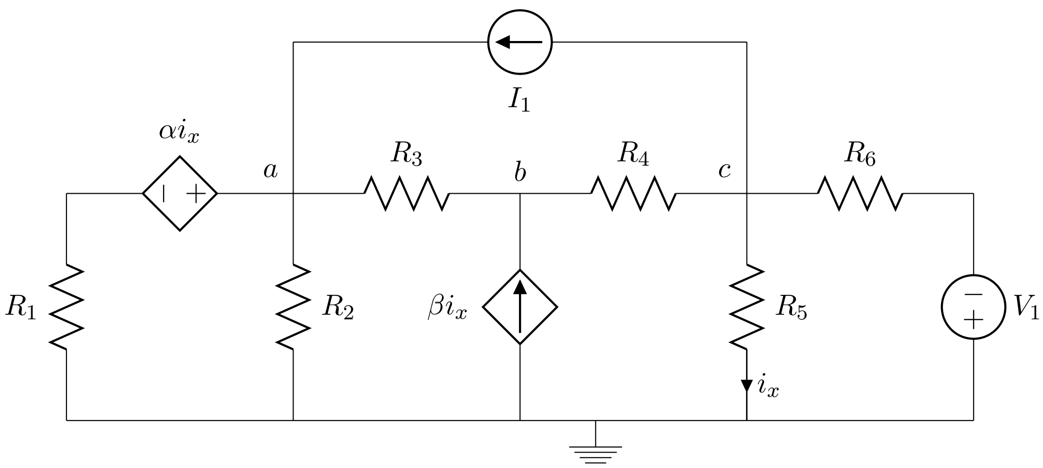
(a) [6 p.] Använd KVL samt KCL och visa att kretsen är en ”giltig uppkoppling” samt om det finns några begränsningar på k_1 och/eller k_2. ($V_1, V_2, I_1 > 0$.)

(b) [8 p.] Visa att summan av effekten från alla komponenter i kretsen är noll (dvs. att $\sum P = 0$ är uppfyllt). Du måste använda passiv teckenkonvention och vara tydlig med hur dina strömmar och spänningar definieras.



Uppgift 2 [7 p.]

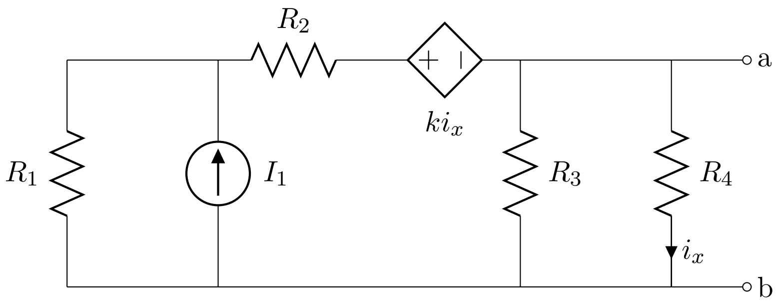
För kretsen här nedan, använd nodanalys och sätt upp ekvationssystemet (där termerna är samlade) för de angivna noderna a, b, c. Ekvationssystemet ska endast innehålla kända storheter samt nodpotentialerna.



Uppgift 3 [10 p.]

För kretsen nedan, sett in i kretsen vid porten ”$a - b$”, bestäm **samt** rita, Thevenin- och Nortonekvivalenten. Resistanserna har alla värdet $R_i = 3$ [Ω], $I_1 = 4$ [A], $k = 3$ [Ω].

(Lösningen ska uttryckas i de kända storheterna och förenklas innan värdena används. Därmed visas förståelse för problemet.)

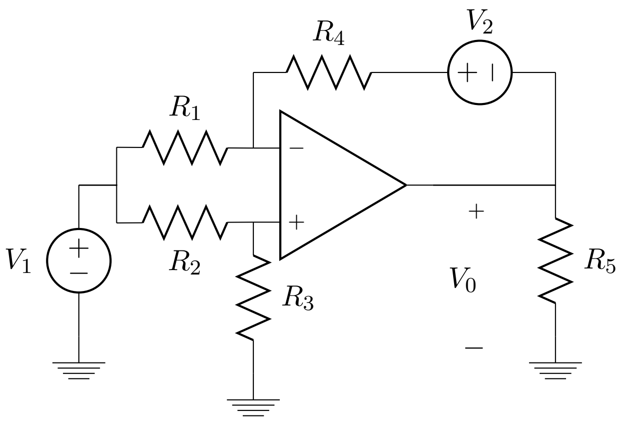


Uppgift 4 [9 p.]

För kretsen nedan;

(a) [5 p.] Bestäm V_0 som funktion av de kända storheterna.

(b) [4 p.] Antag nu att $V_1, V_2 > 0$ samt att $R_i = R$ för $i = 1, ..., 5$. Visa huruvida V_2 nu levererar eller absorberar effekt i kretsen. Du måste använda passiv teckenkonvention och vara tydlig med hur dina strömmar och spänningar är definierade.



Uppgift 5 [13 p.]

Kretsen nedan befinner sig i jämviktstillstånd men vid $t = 0$ **stängs** brytaren[1]. Bestäm, som funktion av de kända storheterna:

[1]Om strömkällans placering och beteende innan $t < 0$ oroar så se den såsom $i_1(t) = I_1 H(t)$, där $H(t)$ är Heavisides stegfunktion vid $t = 0$.

(a) [1 p.] $i_c(0^-)$

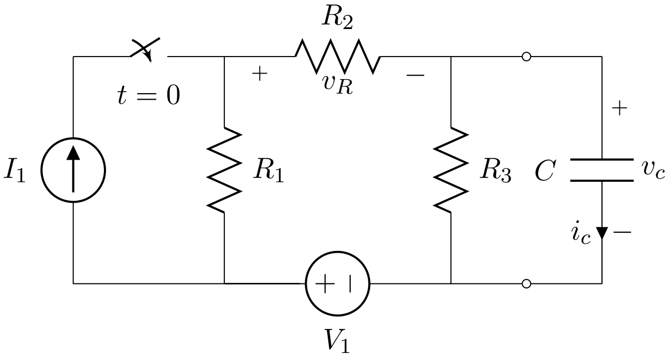
(b) [1 p.] $v_c(0^-)$

(c) [1 p.] $v_R(0^-)$

(d) [1 p.] $v_c(0^+)$

(e) [4 p.] $v_R(0^+)$

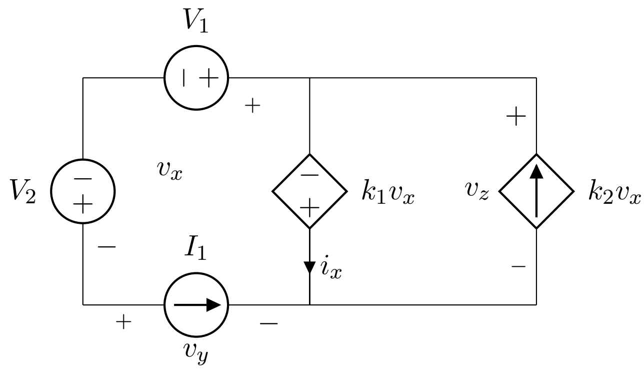
(f) [5 p.] $v_c(t \geq 0)$ *(tips, Theveninekvivalent).*



KTH ei1110 Elkretsanalys (utökad kurs) CELTE, tentamen (TEN1) 2017-10-27 kl 08–13. – Lösningsförslag

---

Uppgift 1 [14 p.]



(1a) [6 p.]
Vi kan börja med att bestämma v_x m.h.a en KVL; $+v_x - V_1 + V2 = 0 \rightarrow v_x = V_1 - V_2$. Vi gör tre till KVL'er som ger oss (v_y och v_z kan riktas olika när vi inte vet exakta värden på källornas parametrar).

$$+v_y - V_2 + V_1 + k_1v_x = 0 \tag{1}$$
$$+v_y - V_2 + V_1 - v_z = 0 \tag{2}$$
$$-k_1v_x - v_z = 0 \tag{3}$$

Vi ser att v_y och v_z kommer att anpassa sig efter kretsen och lösas ut utan problem. Vi tittar på strömmarna med KCL:

$$+I_1 + i_x - k_2v_x = 0 \tag{4}$$

Även här föreligger det inga problem och inga begränsningar på k_1 eller k_2 finns. Detta eftersom, t.ex. oavsett vad k_1 är så kommer KVL i kretsen att kunna uppfyllas pga att v_z anpassar sig och likadant kan k_2 anta vilka värden som helst eftersom strömmen i_x kommer att anpassa sig så KCL uppfylls.

(1b) [8 p.]
Vi summerar effekterna för de olika komponenterna. Vi använder passiv teckenkonvention där vi sätter "-" framför strömmen om den är riktad ut ur plus-terminalen/spänningsfallet. Givetvis så kan sen värdet på strömmen byta tecken om vi sätter in siffror men det gör

inget i slutändan, därtill så spelar det ingen roll hur spänningsfallen eller strömmarna är definierade så länge man använder passiv teckenkonvention hela tiden så ska alla teckenändringar ta ut varandra i slutet!

$$0 = \sum P_i = P_{V_1} + P_{V_2} + P_{I_1} + P_{k_1 v_x} + P_{k_2 v_x} = \tag{5}$$

$$V_1 I_1 + V_2(-I_1) + v_y I_1 + k_1 v_x(-i_x) + v_z(-k_2 v_x) \tag{6}$$

KCL ger oss att $i_x = k_2 v_x - I_1$ som vi använder oss av:

$$0 = \sum P_i = V_1 I_1 + V_2(-I_1) + v_y I_1 - k_1 v_x(k_2 v_x - I_1) + v_z(-k_2 v_x) \tag{7}$$

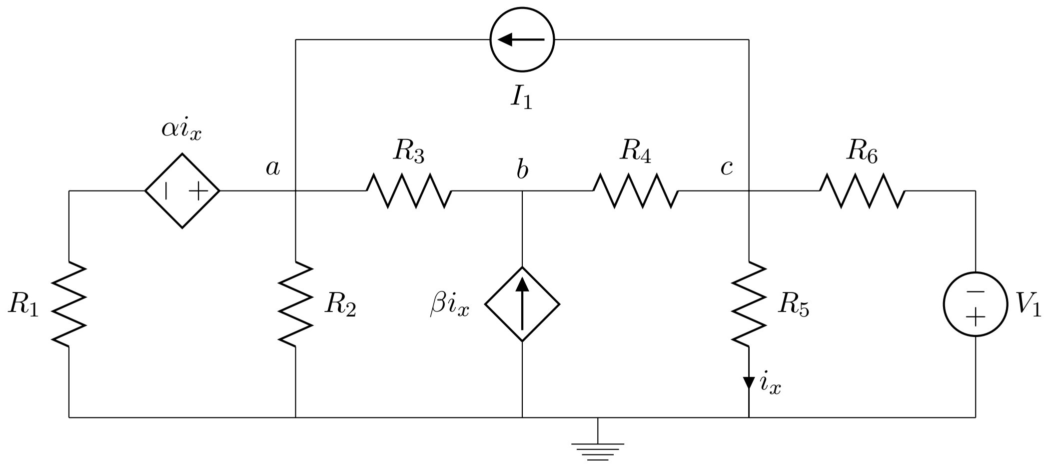
Vi samlar termerna och ser att (t.ex. ur en enkel KVL) att $v_z = -k_1 v_x$ samt att en stor del av uttrycket blir noll pga det är en KVL runt loopen:

$$0 = \sum P_i = I_1(V_1 - V_2 + v_y + k_1 v_x) - k_1 v_x k_2 v_x - v_z k_2 v_x = \tag{8}$$

$$I_1 * 0 - k_1 v_x k_2 v_x - (-k_1 v_x) k_2 v_x = 0 \tag{9}$$

QED

Uppgift 2 [7 p.]



Nodanalys i de tre markerade noderna ger i tur och ordning (räknat strömmen som positiv ut ur noden):

$$\frac{v_a - \alpha i_x - 0}{R_1} + \frac{v_a - 0}{R_2} - I_1 + \frac{v_a - v_b}{R_3} = 0 \tag{10}$$

$$-\beta i_x + \frac{v_b - v_a}{R_3} + \frac{v_b - v_c}{R_4} = 0 \tag{11}$$

$$\frac{v_c - v_b}{R_4} + \frac{v_c}{R_5} + I_1 + \frac{v_c - (-V_1)}{R_6} = 0 \tag{12}$$

Med $i_x = v_c/R_5$ får vi:

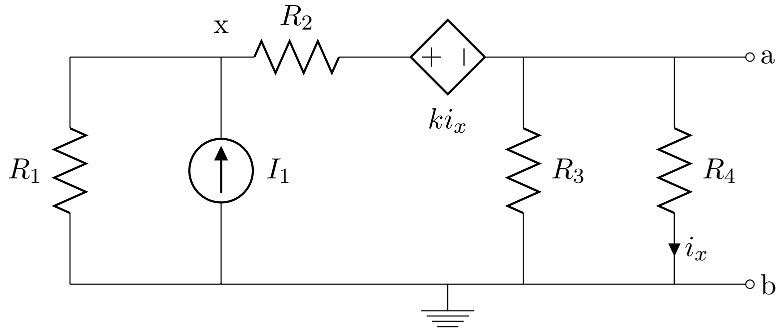
$$v_a(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}) + v_b(\frac{-1}{R_3}) + v_c(\frac{-\alpha}{R_5 R_1}) = I_1 \tag{13}$$

$$v_a(\frac{-1}{R_3}) + v_b(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}) + v_c(\frac{-1}{R_4} - \frac{\beta}{R_5}) = 0 \tag{14}$$

$$0 + v_b(\frac{-1}{R_4}) + v_c(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6}) = -I_1 - \frac{V_1}{R_6} \tag{15}$$

$$\tag{16}$$

Uppgift 3 [10 p.]



Vi ska bestämma Thevenin- och Nortonekvivalenten och gör det här genom att ta fram V_{TH} och I_{sc}.
Vi börjar med att bestämma V_{TH} genom att sätta jord vid b vilket ger oss $V_{TH} = v_a - v_b = v_a - 0 = v_a$. EN KCL vid nod a och sen nod x ger:

$$\frac{v_a}{R_3} + \frac{v_a}{R_4} + \frac{(v_a + ki_x) - v_x}{R_2} = 0 \tag{17}$$

$$-I_1 + \frac{v_x}{R_1} + \frac{v_x - (v_a + ki_x)}{R_2} \tag{18}$$

Dessutom så har vi att $i_x = v_a/R_4$ och om vi använder detta tillsammans med $R_i = R$ (samt att $\frac{k}{R} = 1$) får vi för nod a och sen nod x:

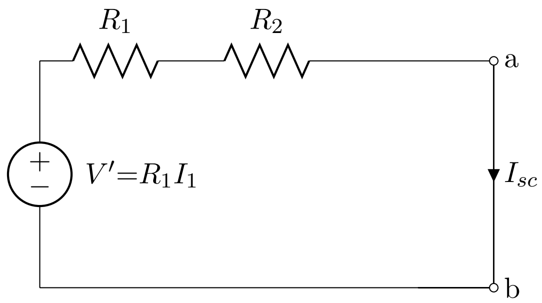
$$\frac{v_a}{R} + \frac{v_a}{R} + \frac{v_a}{R} + \frac{k}{R}\frac{v_a}{R} - \frac{v_x}{R} = 0 \rightarrow \tag{19}$$

$$v_x = v_a\left(3 + \frac{k}{R}\right) \tag{20}$$

$$-I_1 + v_x\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R}\right) - \frac{k}{R}\frac{v_a}{R} - \frac{v_a}{R} = 0 \rightarrow \tag{21}$$

$$-I_1 R + 6v_a = 0 \rightarrow v_a = V_{TH} = 2\ [V] \tag{22}$$

Nu bestämmer vi I_{sc} och tittar vi på kretsen när vi kortsluter utgången vid $a-b$. Vi får en krets som ser ut som (efter t.ex. källtransformation av strömkällan) samt det faktum att den beroende spänningskällan nollställs pga. kortslutningen tvingar $i_x = 0$.



En KVL ger nu

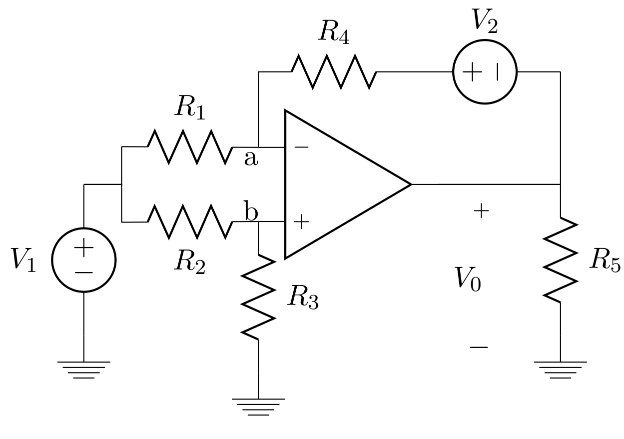
$$+V' - I_{sc}(R_1 + R_2) = 0 \rightarrow \tag{23}$$

$$I_{sc} = \frac{V'}{R_1 + R_2} = \frac{R_1 I_1}{R_1 + R_2} = \frac{RI_1}{2R} = I_N = 2\ [A]. \tag{24}$$

(Alternativt strömdelning direkt.)

Ur V_{TH} och I_N får vi nu Theveninresistansen $R_{TH} = \frac{V_{TH}}{I_N} = 1\ [\Omega]$ och kretsarna såsom beskrivits på föreläsningen och i böcker.

Uppgift 4 [9 p.]



(4a) [5 p.]

Vi börjar med att ta i beaktning att $v_a = v_b$ samt att ingen ström går in i operationsförstärkaren vid a och b. En KCL (eller enkel spänningsdelning) i b ger oss:

$$\frac{v_b - V_1}{R_2} + \frac{v_b}{R_3} = 0 \rightarrow v_b = \frac{V_1 R_3}{R_2 + R_3} \tag{25}$$

KCL i a ger oss (tillsammans med $v_a = v_b$ från ovan):

$$\frac{v_a - V_1}{R_1} + \frac{v_a - (V_o + V_2)}{R_4} = 0 \rightarrow \tag{26}$$

$$v_a\left(\frac{R_1 + R_4}{R_1 R_4}\right) - \frac{V_1}{R_1} - \frac{V_2}{R_4} - \frac{V_0}{R_4} = 0 \rightarrow \tag{27}$$

$$\frac{V_1 R_3}{R_2 + R_3}\left(\frac{R_1 + R_4}{R_1 R_4}\right) - \frac{V_1}{R_1} - \frac{V_2}{R_4} - \frac{V_0}{R_4} = 0 \rightarrow \tag{28}$$

$$V_0 = V_1\left(\frac{R_3(R_1 + R_4)}{R_1(R_2 + R_3)} - \frac{R_4}{R_1}\right) - V_2 \tag{29}$$

(4b) [4 p.]

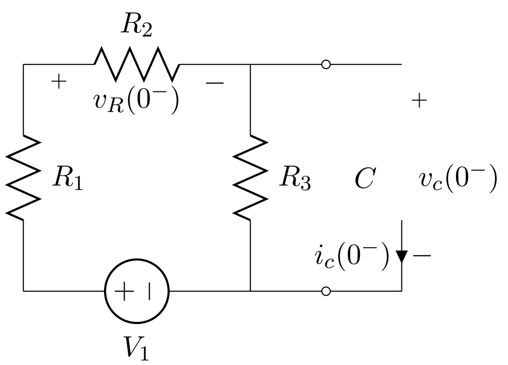
Vi måste vet hur strömmen genom V_2 flyter och vi antar att den är positiv om den flyter från a till V_0 som då ger oss att $I_{V_2} = I_{R_4} = \frac{V_a - (V_0 + V_2)}{R_4}$. Vi använder oss av att resistanserna nu alla har värdet R, vilket ger oss att $V_0 = -V_2$. Med detta, och att $v_a = v_b = V_1 \frac{R_3}{R_2 + R3}$, får vi:

$$I_{V_2} = I_{R_4} = \frac{1}{R}\left(V_1 \frac{R}{R + R} - (-V_2 + V_2)\right) = \frac{V_1}{2R} \tag{30}$$

$I_{V_2} = \frac{V_1}{2R} > 0$ eftersom $V_1, R > 0$. Detta betyder att strömmen går in i plusterminalen på V_2 (eftersom $V_2 > 0$ är den verkligen riktad såsom definierat ovan) vilket ger med passiv teckenkonvention $P_{V_2} = V_2 I_{V_2} > 0$ och därmed absorberar V_2 effekt.

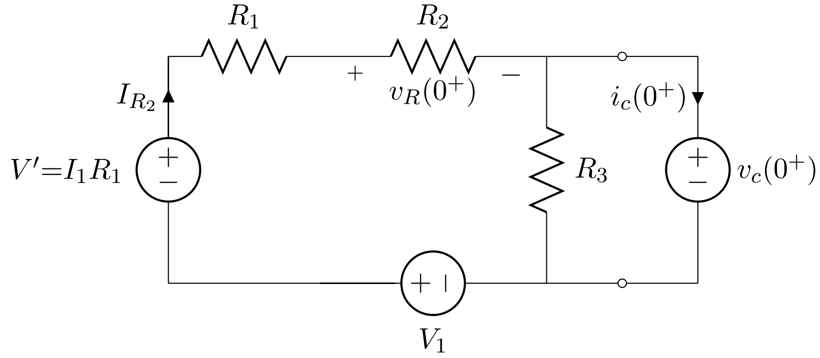
Uppgift 5 [13 p.]

Kretsen för $t = 0^-$ blir



(5a) [1 p.] $i_c(0^-) = 0$
(5b) [1 p.] $v_c(0^-) = R_3 I_{R_3}(0^-) = R_3 \frac{V_1}{R_1+R_2+R_3}$
(5c) [1 p.] $v_R(0^-) = R_2 I_{R_2}(0^-) = R_2 \frac{V_1}{R_1+R_2+R_3}$
(5d) [1 p.] $v_c(0^+) = v_c(0^-)$

(5e) [4 p.]
Nu undersöker vi $v_R(0^+)$. Kretsen för $t = 0^+$ kan mha en källtransformation ges av:



Vi behöver veta strömmen $I = I_{R_2}(0^+)$ och vi gör en KVL:

$$+I_1R_1 - IR_1 - IR_2 - V_{R_3} + V_1 = 0 \tag{31}$$

Vi ser att $V_{R_3} = v_c(0^+)$ vilket vi tidigare hade att $v_c(0^+) = v_c(0^-) = R_3 \frac{V_1}{R_1+R_2+R_3}$. Om vi använder oss av detta får vi:

$$I_1R_1 - I(R_1+R_2) + V_1 = V_1 \frac{R_3}{R_1+R_2+R_3} \rightarrow \tag{32}$$

$$I = \left(I_1R_1 + V_1 - V_1 \frac{R_3}{R_1+R_2+R_3}\right) \frac{1}{R_1+R_2} \rightarrow \tag{33}$$

$$v_R(0^+) = R_2 I = R_2 \left(I_1R_1 + V_1 - V_1 \frac{R_3}{R_1+R_2+R_3}\right) \frac{1}{R_1+R_2} = \tag{34}$$

$$\frac{I_1R_1R_2}{R_1+R_2} + \frac{V_1R_2}{R_1+R_2+R_3} \tag{35}$$

Bara för kul[1] så tittar vi på hur vi nu skulle kunna få fram $i_c(0^+)$. En KCL ger oss:

$$i_c(0^+) + I_{R_3} - I_{R_2} = 0 \rightarrow \tag{36}$$

$$i_c(0^+) = I_{R_2} - I_{R_3} = \frac{v_R(0^+)}{R_2} + \frac{v_c(0^+)}{R_3} \tag{37}$$

[1] ...och eventuella framtida tentor så klart :-)

Denna kan vi lösa med det vi har hitintills och vi får faktiskt att $i_c(0^+) = \frac{I_1 R_1}{R_1+R_2}$. Notera att $i_c(0^+) \neq i_c(0^-) = 0$.

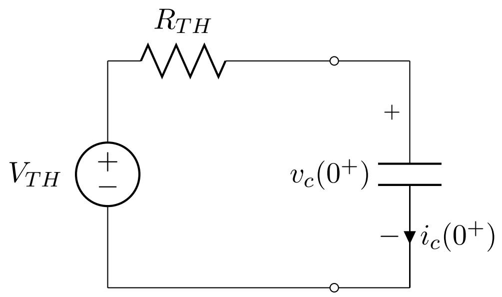
(5f) [5 p.]
Nu undersöker vi slutligen $v_c(t \geq 0)$ vilket vi enklast gör med att beskriva kretsen, sett in i porten där kondensatorn sitter (efter brytaren slutits), som en Theveninekvivalent (eller Nortonekv.).
Eftersom kretsen inte har några beroende källor kan vi nollställa V_1 och I_1 och titta på den resistans vi får (sett in i porten vid C) vilket är $(R_1 + R_2)//R_3$:

$$R_{TH} = \frac{R_3(R_1+R_2)}{R_3+R_1+R_2} \tag{38}$$

Theveninspänningen är spänningen över R_3 och vi får den genom en spänningsdelning :

$$V_{TH} = \frac{(V_1 + I_1 R_1)R_3}{R_1+R_2+R_3} \tag{39}$$

Detta betyder att vi jobbar med en krets som ser ut som:



Om vi ska härleda från början[2] så ger en KVL oss att (med $i_c = C\frac{dV_c}{dt}$):

$$+V_{TH} - i_c R_{TH} - V_c = 0 \rightarrow \tag{40}$$

$$\frac{dV_c}{dt} + V_c\frac{1}{R_{TH}C} = V_{TH}\frac{1}{R_{TH}C} \tag{41}$$

Vi vet att ekvationer av typen $\dot{y}+ay = b$ löses av $y(t) = \frac{b}{a}+Ke^{-at}$ (detta behöver man inte härleda) och om vi identifierar variablerna så får vi att $v_c(t) = V_{TH} + Ke^{-t/(R_{TH}C)}$. För att bestämma K använder vi begynnelsevilkoret $v_c(0^+) = v_c(0^-) = R_3\frac{V_1}{R_1+R_2+R_3} = V_{TH} + K * e^0 \rightarrow K = R_3\frac{V_1}{R_1+R_2+R_3} - V_{TH}$. Om vi nu samlar termerna och sätter in vad V_{TH} och R_{TH} är så får vi tillsist:

$$v_c(t) = V_{TH} + \left(R_3\frac{V_1}{R_1+R_2+R_3} - V_{TH}\right)e^{-t/(R_{TH}C)} = \tag{42}$$

$$\frac{(V_1+I_1R_1)R_3}{R_1+R_2+R_3} - \frac{I_1R_1R_3}{R_1+R_2+R_3}e^{-t\left(\frac{R_3(R_1+R_2)}{R_3+R_1+R_2}C\right)^{-1}} \tag{43}$$

---

[2]...vilket är kul ju :-)