KTH ei1110 Elkretsanalys (utökad kurs) CELTE, Omtentamen (TEN1) 2017-12-18 kl 08–13.

Hjälpmedel: Inga extra hjälpmedel är tillåtna.

Alla källor ska antas vara likströmskällor och beteckningar såsom V_0, I_1 etc. beskriver amplituden hos dessa. Om ingen annan information ges ska komponenter antas vara ideala. Angivna värden hos komponenter (t.ex. R för ett motstånd, V för en spänningskälla) ska antas vara kända storheter och andra markerade storheter (t.ex. strömmen genom, eller spänningen över, ett motstånd) ska antas vara okända storheter. Om inget annat framgår, antag stationärt tillstånd, dvs. lång tid efter att alla komponenter har kopplats ihop.
Några viktiga saker för att kunna få maximalt antal poäng:

- **Endast ett problem per sida** och text på baksidan kommer inte att beaktas.
- Tänk på att er handstil måste vara tydlig för att lösningen ska kunna bedömas. **Kan vi inte läsa, kan vi inte ge poäng!** Använd **inte rödpenna**.
- Lösningarna bör som oftast uttryckas i de kända storheterna och förenklas **innan** eventuella värden används. Därmed visas förståelse för problemet.
- **Ge alltid din krets** och var tydlig med diagram och definitioner av variabler. Tänk på hur du definierar polariteten och riktningen på de spänningar och strömmar du använder. **Använd passiv teckenkonvention**. Om det fattas figur med definierade variabler utsatta kan det bli **avdrag** vid tvetydighet.
- Därtill, dela tiden mellan talen och kontrollera svarens rimlighet genom t.ex. dimensionsanalys eller alternativ lösningsmetod.

Betygsgränserna är: 50% (E), 60% (D), 70% (C), 80% (B), 90% (A).
För (Fx) krävs $> 45\%$ samt att inte mer än ett tal har poängen x sådan att $0 < x < 50\%$.
(Med detta menas att för att få Fx får endast ett tal dra ner resultatet under godkänt.)

Examinator: Daniel Månsson (08 790 9044)

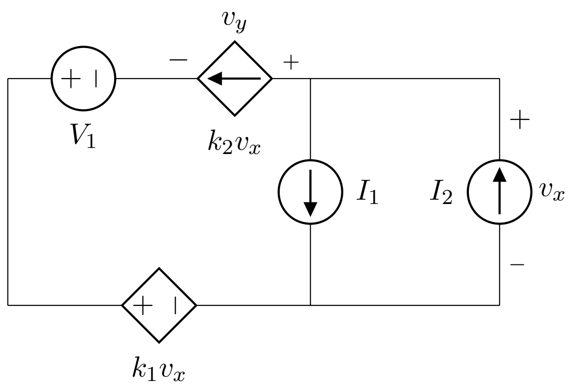
Lycka till och ta det lugnt!

Uppgift 1 [10 p.]

För kretsen här:

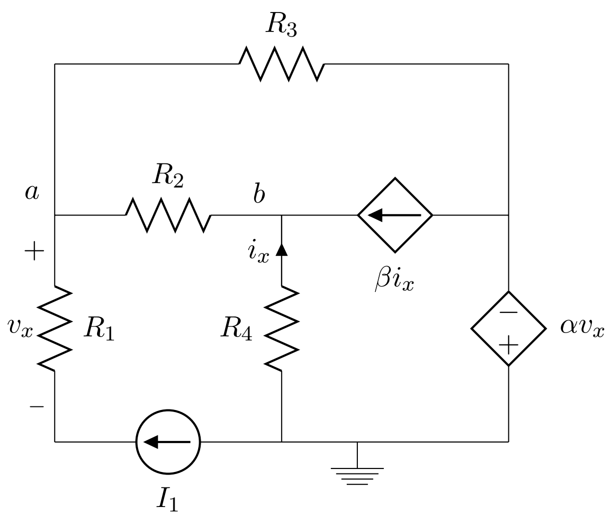
(a) [3 p.] Uttryck spänningen över den beroende strömkällan i de kända storheterna.

(b) [7 p.] Visa att summan av effekten från alla komponenter i kretsen är noll (dvs. att $\sum P = 0$ är uppfyllt). Du måste använda passiv teckenkonvention och vara tydlig med hur dina strömmar och spänningar definieras.



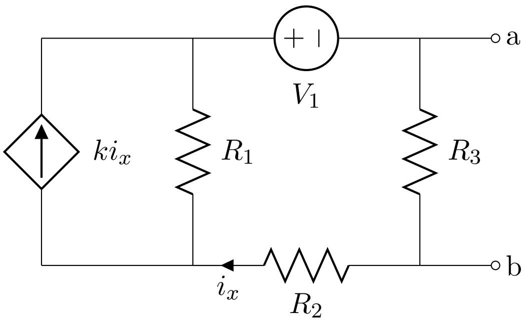
Uppgift 2 [7 p.]

För kretsen här nedan, använd nodanalys och sätt upp ekvationssystemet (där termerna är samlade) för de angivna noderna a, och b. Ekvationssystemet ska endast innehålla kända storheter samt nodpotentialerna.



Uppgift 3 [10 p.]

För kretsen nedan, sett in i kretsen vid porten "$a - b$", bestäm **samt** rita, Thevenin- och Nortonekvivalenten. Resistanserna har alla värdet $R_i = R$ [Ω] ($\forall i = 1, ..., 3$).
(Lösningen ska uttryckas i de kända storheterna och förenklas innan värdena används. Därmed visas förståelse för problemet.)

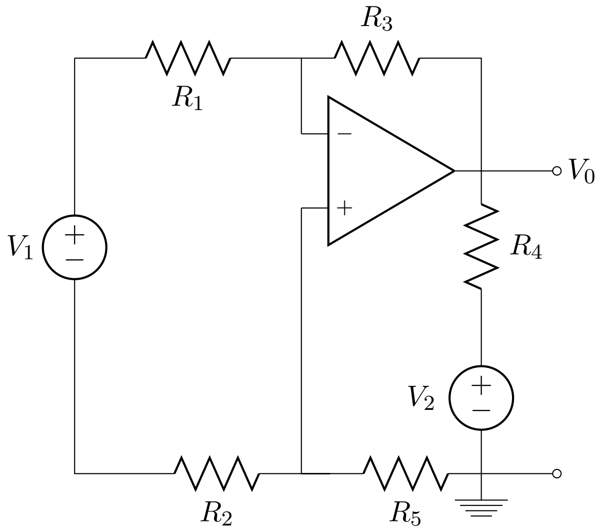


Uppgift 4 [7 p.]

För kretsen nedan;

(a) [4 p.] Bestäm V_0 som funktion av de kända storheterna. Antag att $R_1 = R_2 = R$ samt att $R_3 = R_5 = 2R$.
(Lösningen ska uttryckas i de kända storheterna och förenklas innan värdena används. Därmed visas förståelse för problemet.)

(b) [3 p.] Antag nu att $V_1, V_2 > 0$. Visa huruvida V_2 levererar eller absorberar effekt i kretsen. Du måste använda passiv teckenkonvention och vara tydlig med hur dina strömmar och spänningar är definierade.



Uppgift 5 [8 p.]

Kretsen nedan befinner sig i jämviktstillstånd men vid $t = 0$ nollställs strömkällan[1]. Bestäm, som funktion av de kända storheterna:

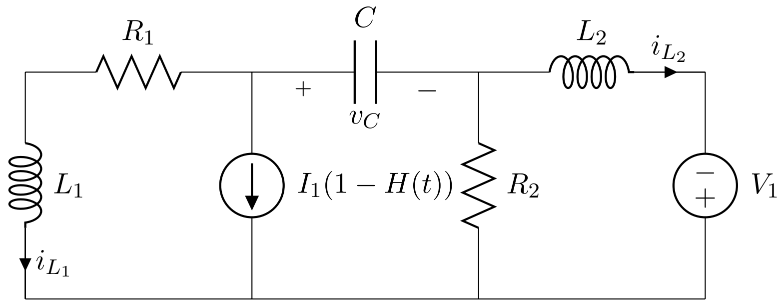
(a) [1 p.] $i_{L_1}(0^-)$

(b) [1 p.] $i_{L_2}(0^-)$

(c) [2 p.] $v_C(0^-)$

(d) [2 p.] $P_{V_1}(0^+)$

(e) [2 p.] $P_{R_1}(0^+)$



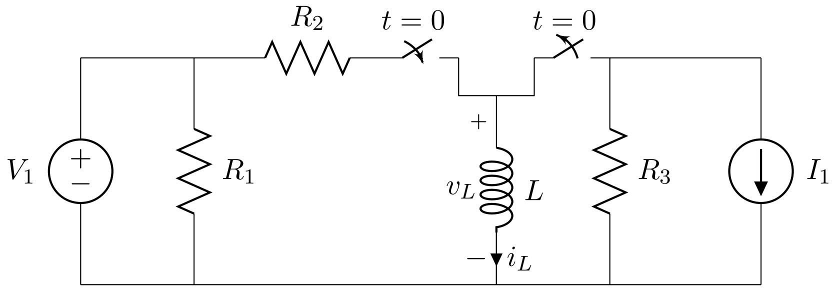
[1]Dvs. $i_1(t) = I_1(1 - H(t))$, där $H(t)$ är Heavisides stegfunktion vid $t = 0$.

Uppgift 6 [6 p.]

Kretsen nedan befinner sig i jämviktstillstånd men vid $t = 0$ slås brytarna om. Bestäm, som funktion av de kända storheterna:

(a) [4 p.] $i_L(t \geq 0)$

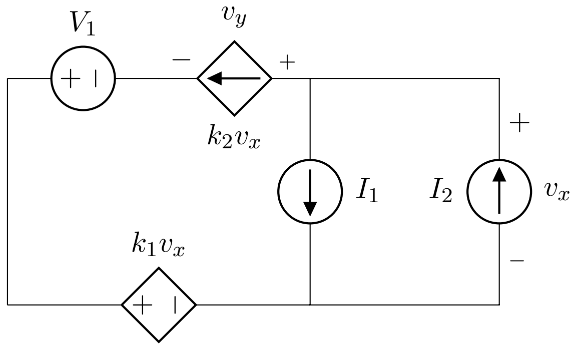
(b) [2 p.] $v_L(0^+)$



KTH ei1110 Elkretsanalys (utökad kurs) CELTE, tentamen (TEN1) 2017-10-27 kl 08–13. – Lösningsförslag

---

Uppgift 1 [10 p.]



(1a) [3 p.]
KVL och en KCL ger oss:

$$+k_1 v_x - V_1 + v_y - v_x = 0 \quad (1)$$
$$+I_1 - I_2 + k_2 v_x = 0 \rightarrow \quad (2)$$

$$v_y = V_1 + v_x(1 - k_1) = V_1 + \frac{1}{k_2}(I_2 - I_1)(1 - k_1) \quad (3)$$

(1b) [7 p.]
Vi summerar effekterna för de olika komponenterna. Vi använder passiv teckenkonvention där vi sätter "-" framför strömmen om den är riktad ut ur plus-terminalen/spänningsfallet. Givetvis så kan sen värdet på strömmen byta tecken om vi sätter in siffror men det gör inget i slutändan, därtill så spelar det ingen roll hur spänningsfallen eller strömmarna är definierade så länge man använder passiv teckenkonvention hela tiden så ska alla

teckenändringar ta ut varandra i slutet!

$$0 = \sum P_i = P_{V_1} + P_{k_2 v_x} + P_{k_1 v_x} + P_{I_1} + P_{I_2} = \tag{4}$$

$$V_1(-k_2 v_x) + v_y(k_2 v_x) + k_1 v_x(k_2 v_x) + v_x(I_1) + v_x(-I_2) = \tag{5}$$

$$(-V_1 + v_y + k_1 v_x)(k_2 v_x) + v_x(I_1 - I_2) = \tag{6}$$

...KCL för andra termen ger oss...

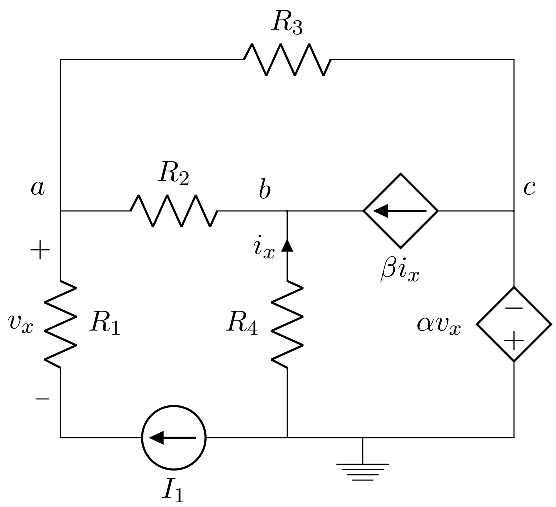
$$(-V_1 + v_y + k_1 v_x)(k_2 v_x) + v_x(-k_2 v_x) = \tag{7}$$

...samla termerna och därefter ger KVL oss...

$$(-V_1 + v_y + k_1 v_x - v_x)(k_2 v_x) = 0 \tag{8}$$

Q.E.D

Uppgift 2 [7 p.]



KCL i a och b ger oss:

$$-I_1 + \frac{v_a - v_b}{R_2} + \frac{v_a - v_c}{R_3} = 0 \tag{9}$$

$$\frac{v_b - v_a}{R_2} - i_x - \beta i_x = 0 \tag{10}$$

Därtill, så får vi med KVL och KCL (och nod c) lite mer användbara saker ur kretsen:

$$0 - \alpha v_x = v_c \tag{11}$$

$$v_x = -I_1 R_1 \tag{12}$$

("-" beror på hur spänningen v_x är definierad jämfört med riktning på I_1)

$$\text{...detta ger oss...} \quad \rightarrow v_c = \alpha I_1 R_1 \tag{13}$$

$$i_x = \frac{0 - v_b}{R_4} \tag{14}$$

Använder vi detta och sen samlar termerna får vi:

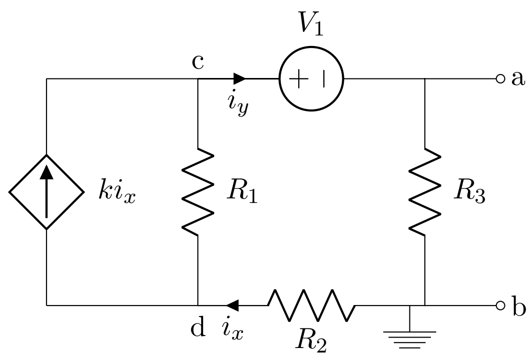
$$-I_1 + v_a\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) + v_b\left(\frac{-1}{R_2}\right) + \left(\frac{-1}{R_3}\right)(\alpha I_1 R_1) = 0 \tag{15}$$

$$v_a\left(\frac{-1}{R_2}\right) + v_b\left(\frac{1}{R_2}\right) - \left(\frac{-v_b}{R_4}\right) - \beta\left(\frac{-v_b}{R_4}\right) = 0 \tag{16}$$

$$v_a\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) + v_b\left(\frac{-1}{R_2}\right) = I_1\left(1 + \frac{\alpha R_1}{R_3}\right) \tag{17}$$

$$v_a\left(\frac{-1}{R_2}\right) + v_b\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{\beta}{R_4}\right) = 0 \tag{18}$$

Uppgift 3 [10 p.]



Vi ska bestämma Thevenin- och Nortonekvivalenten och gör det här genom att ta fram V_{TH} och I_{sc}.
Vi markerar noderna c och d samt strömmen i_y. Vi bestämmer V_{TH} genom att först sätta jord vid b vilket ger oss $V_{TH} = v_a - v_b = v_a - 0 = v_a$. En KCL vid nod c ger:

$$-ki_x + \frac{v_c - v_d}{R_1} + i_y = 0 \tag{19}$$

Därtill ser vi att:

$$i_x = \frac{0 - v_d}{R_2} \tag{20}$$

$$i_y = \frac{v_a - 0}{R_3} \tag{21}$$

$$0 + v_a + V_1 = v_c \tag{22}$$

...men även att ...

$$i_x = i_y \to \frac{-v_d}{R_2} = \frac{v_a}{R_3} \to v_d = -v_a \frac{R_2}{R_3} \tag{23}$$

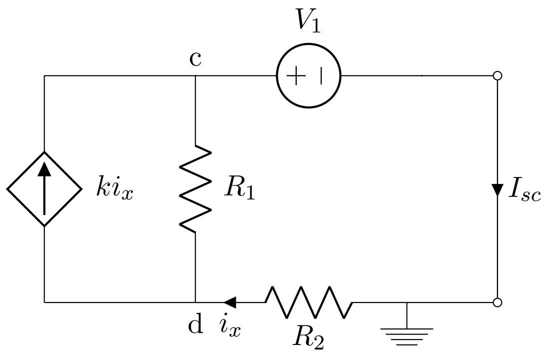
Vi sätter in detta, samt att alla motstånden har värdet R, och vi får:

$$-k\frac{v_a}{R_3} + \frac{v_a + V_1 - \left(-v_a \frac{R_2}{R_3}\right)}{R_1} + \frac{v_a}{R_3} = 0 \to \tag{24}$$

$$-k\frac{v_a}{R} + \frac{v_a + V_1 + v_a}{R} + \frac{v_a}{R} = 0 \to \tag{25}$$

$$v_a = V_{TH} = \frac{V_1}{k - 3} \tag{26}$$

Nu bestämmer vi I_{sc} och tittar vi på kretsen när vi kortsluter utgången vid $a - b$. Vi får en krets som ser ut som:



Vi ser att att $i_x = I_{SC}$ och en KCL ger oss (nu är $v_a = 0$ och $v_c = V_1$):

$$\frac{V_1 - v_d}{R_1} - ki_x + I_{SC} = 0 \tag{27}$$

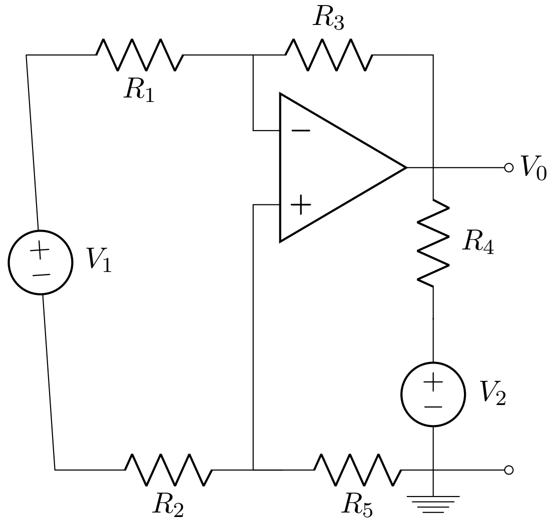
$$\text{...därtill ser vi att } i_x = \frac{0 - v_d}{R_2} \to v_d = -i_x R_2 \to \tag{28}$$

$$\frac{V_1}{R_1} + i_x \left(\frac{R_2}{R_1} - k + 1\right) \to \tag{29}$$

$$i_x = I_{SC} = (R_i = R) = \frac{V_1}{R(k-2)} = I_N \tag{30}$$

Ur V_{TH} och I_N får vi nu Theveninresistansen $R_{TH} = \frac{V_{TH}}{I_N} = \frac{V_1}{k-3}\frac{R(k-2)}{V_1} = \frac{R(k-2)}{(k-3)}$ och kretsarna såsom beskrivits på föreläsningarna och i böcker.

Uppgift 4 [7 p.]



(4a) [4 p.]

Summera strömmarna i den inverterande och icke-inverterande ingången ger oss i tur och ordning:

$$\text{inverterande: } \frac{(v_- - V_1) - v_+}{R_1 + R_2} + \frac{v_- - V_0}{R_3} = 0 \tag{31}$$

$$\text{icke-inverterande: } \frac{v_+ - (v_- - V_1)}{R_1 + R_2} + \frac{v_+}{R_5} = 0 \tag{32}$$

Eftersom ingen ström går in i operationsförstärkaren och vi vet att $v_- = v_+$:

$$R_3 \frac{V_1}{R_1 + R_2} + \frac{V_0}{R_3} R_3 = v_- \tag{33}$$

$$\frac{-V_1}{R_1 + R_2} R_5 = v_- \tag{34}$$

Tillsammans med det att $R_1 = R_2 = R$ och att $R_3 = R_5 = 2R$ får vi:

$$R_3 \frac{V_1}{R_1 + R_2} + V_0 + \frac{V_1}{R_1 + R_2} R_5 = 0 \rightarrow \tag{35}$$

$$V_1 + V_0 + V_1 = 0 \rightarrow V_0 = -2V_1 \tag{36}$$

(4b) [3 p.]

Vi får veta att $V_1, V_2 > 0$ och för att veta om V_2 levererar eller förbrukar/absorberar effekt behöver vi veta riktningen på strömmen genom V_2.

$$I_{V_2} = I_{R_4} = \frac{V_0 - V_2}{R_4} = \frac{-2V_1 - V_2}{R_4} < 0 \quad (37)$$

(eftersom alla storheterna är större än 0)

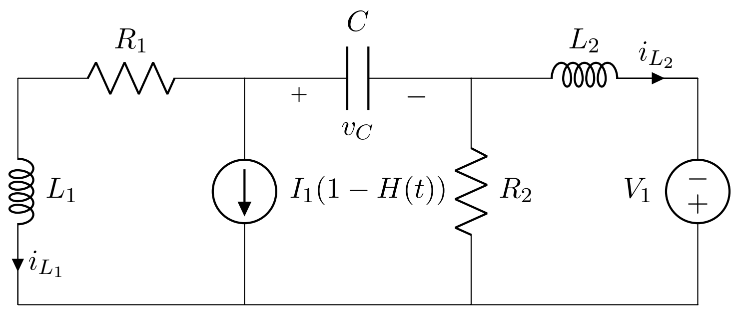
Detta betyder att utifrån hur vi valde att bestämma strömmen i uttrycket (från V_0 till V_2) går strömmen åt andra hållet (eftersom den är mindre än noll), dvs strömmen lämnar egentligen "+" terminalen på V_2 men här så behåller vi vår ursprungliga definition och riktning:

$$P_{V_2} = V_2 I_{V_2} = V_2 \frac{-2V_1 - V_2}{R_4} < 0 \quad (38)$$

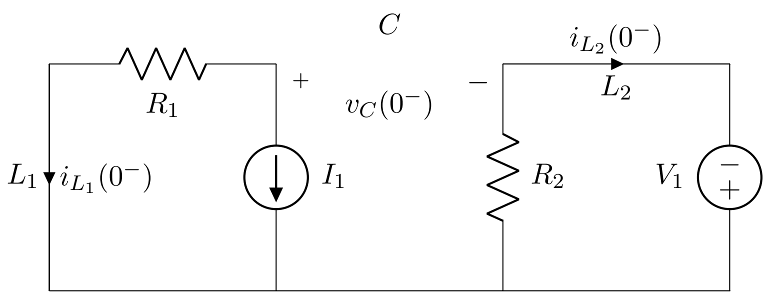
Dvs V_2 levererar effekt.

(Om vi korrigerar för riktningen på strömmen så får vi $I'_{V_2} = -I_{V_2} = -(\frac{-2V_1-V_2}{R_4}) = \frac{2V_1+V_2}{R_4}$ vilket ger oss att $P_{V_2} = V_2(-I'_{V_2}) = V_2(-\frac{2V_1+V_2}{R_4} < 0.)$

Uppgift 5 [8 p.]

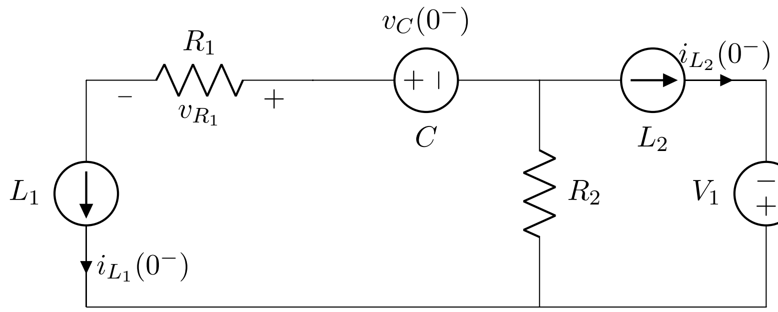


Vid jämviktstillstånd (vid $t < 0$) har vi en krets såsom och vi får:



(5a) [1 p.] $i_{L_1}(0^-) = -I_1$
(5b) [1 p.] $i_{L_2}(0^-) = V_1/R_2$
(5c) [2 p.] $v_C(0^-) = -R_1 I_1 - (-V_1) = V_1 - R_1 I_1$

Precis efter att I_1 har nollställts (vid $t = 0^+$) har vi en krets såsom (pga. ström- och spänningströgheten i spolarna och kondensatorn, dvs $i_L(0^-) = i_L(0^+)$ och $v_C(0^-) = v_C(0^+)$):

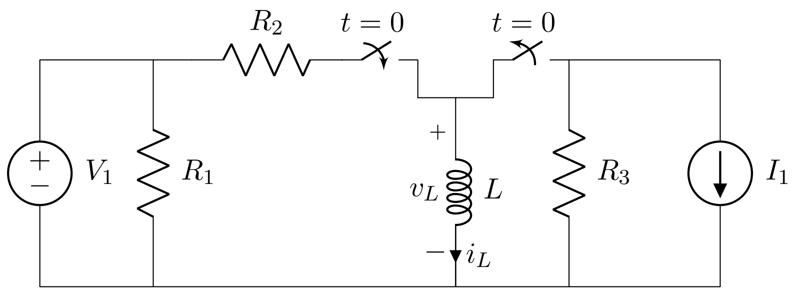


Vi får:

(5d) [2 p.] $P_{V_1}(0^+) = V_1(-i_{L_2}(0^-)) = -V_1 \frac{V_1}{R_2}$
(5e) [2 p.] $P_{R_1}(0^+) = v_{R_1}(0^+) i_{R_1}(0^+) = i_{L_1}(0^-) R_1 i_{L_1}(0^-) = (-I_1)^2 R_1 > 0$

Uppgift 6 [6 p.]

(6a) [4 p.]



Vi använder oss av metoden att titta på Thevenin ekvivalenten där spolen sitter. Vid $t = 0^-$ har vi att $i_L(0^-) = -I_1$ (R_3 är kortsluten och vänster delen är inte inkopplad ännu).

Vid $t = 0^+$ gör vi en Thevenin ekvivalent av delen av kretsen till vänster om spolen (det till höger har ju kopplas bort). Vi får då att $V_{TH} = V_{oc} = V_{R_1} = V_1$ (ingen ström genom R_2 nu) och att $R_{TH} = R_2$ (eftersom R_1 kortsluts då V_1 nollställs). Detta ger att $I_{SC} = V_1/R_2$ och att strömmen genom L ges av ($\tau = \frac{L}{R_{TH}}$):

$$x(t) = x(\infty) + (x(0) - x(\infty))e^{(-t/\tau)} \rightarrow \tag{39}$$

$$i_L(t) = I_{SC} + (i_L(0^-) - I_{SC})e^{-tR_{TH}/L} = \tag{40}$$

$$\frac{V_1}{R_2} + (-I_1 - \frac{V_1}{R_2})e^{-tR_2/L} \tag{41}$$

$$\tag{42}$$

(6b) [2 p.]

$v_L(0^+) = L\frac{di_L}{dt}|_{t=0} = L(\frac{I_1 R_2}{L} + \frac{V_1}{L}) = I_1 R_2 + V_1$
(Notera att vi tittar på derivatans värde vid t=0 och inte derivatan av strömmen vid t=0, dvs först $\frac{d}{dt}$ *och sen* $t = 0$ *och inte tvärtom.)*