KTH ei1110 Elkretsanalys (CELTE), tentamen (TEN2) 2018-03-12 kl 08–13.

Hjälpmedel: Inga extra hjälpmedel är tillåtna.

Alla källor ska antas vara tidsharmoniska växelströmskällor om inget annat explicit anges och beteckningar såsom V_0, I_1 etc. beskriver oftast amplituden hos dessa. Om ingen annan information ges ska komponenter antas vara ideala. Angivna värden hos komponenter (t.ex. R för ett motstånd, V för en spänningskälla) ska antas vara kända storheter och andra markerade storheter (t.ex. strömmen genom, eller spänningen över, ett motstånd) ska antas vara okända storheter. Antag **stationärt tillstånd**, dvs. lång tid efter alla komponenter har kopplats ihop.
Några viktiga saker för att kunna få maximalt antal poäng:

- **Endast ett problem per sida** och text på baksidan kommer inte att beaktas.
- Tänk på att er handstil måste vara tydlig för att lösningen ska kunna bedömas. **Kan vi inte läsa, kan vi inte ge poäng!** Använd **inte rödpenna**.
- Lösningarna bör som oftast uttryckas i de kända storheterna och förenklas **innan** eventuella värden används. Därmed visas förståelse för problemet.
- **Ge alltid din krets** och var tydlig med diagram och definitioner av variabler. Tänk på hur du definierar polariteten och riktningen på de spänningar och strömmar du använder. **Använd passiv teckenkonvention**. Om det fattas figur med definierade variabler utsatta kan det bli **avdrag** vid tvetydighet. Var noga med definitionen av impedanserna, t.ex. en spoles impedans är inte "L", detta kan ge avdrag.
- Därtill, dela tiden mellan talen och kontrollera svarens rimlighet genom t.ex. dimensionsanalys eller alternativ lösningsmetod.

Betygsgränserna är: 50% (E), 60% (D), 70% (C), 80% (B), 90% (A).
Ingen avrundning görs.
För (Fx) krävs $> 45\%$ samt att inte mer än ett tal har poängen x sådan att $0 < x < 50\%$.
(Med detta menas att för att få Fx får endast ett tal dra ner resultatet under godkänt.)

Examinator: Daniel Månsson (08 790 9044)

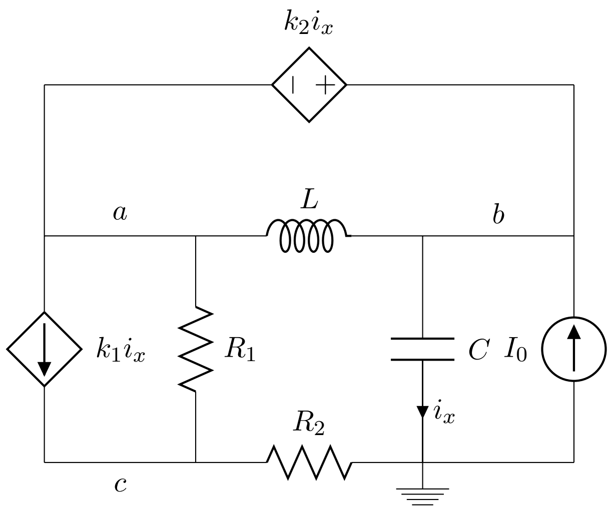
Lycka till och ta det lugnt!

Uppgift 1 [10 p.]

För kretsen nedan.

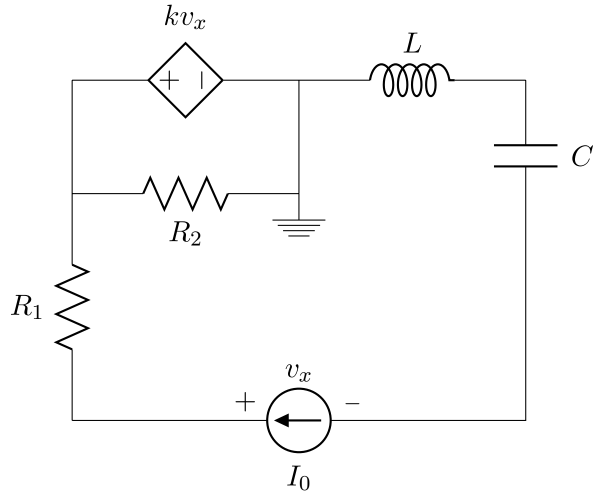
(a) [7 p.] Ställ upp de nödvändiga nodekvationerna uttryckt enbart i de kända storheterna. I de slutgiltiga uttrycken ska termerna vara samlade och rimligt förenklade.

(b) [3 p.] Härled numeriskt huruvida strömmen genom eller spänningen över C leder (ligger före) genom att bestämma <u>och</u> rita $i_C(t)$ och $v_C(t)$. Antag att $V_b = 1 - j$, $Z_C = -j$ och att $\omega = 1$ [rad/s].



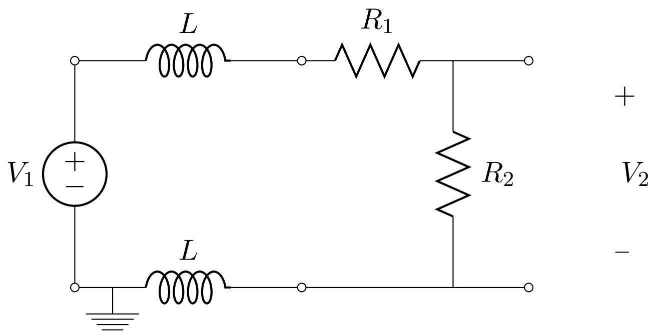
Uppgift 2 [8 p.]

För kretsen nedan, beräkna den komplexa effekten för varje komponent, uttryckt i de kända storheterna. Du måste använda passiv teckenkonvention och vara tydlig med hur dina strömmar och spänningar definieras.
(*Tips*, kontrollera dina delsteg genom att visa att $\sum S = 0$ är uppfyllt).



Uppgift 3 [11 p.]

(a) [3 p.] Kretsen nedan är en spänningsdelare där ledningsimpedanserna tagits i beaktande (via L). Härled överföringsfunktionen, $H(\omega)$, samt studera den genom att rita Bodediagrammen för förstärkningen med och utan förluster, dvs. $|H(\omega)|$ (inkluderat värden på nivåer och intressanta brytfrekvenser). ($H(\omega)$ måste ges på formen enligt nedan.)



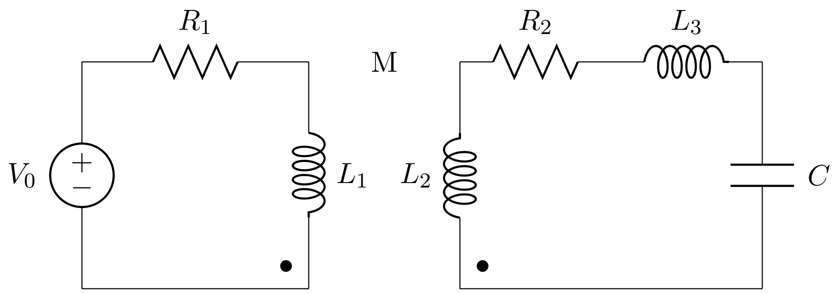
(b) [8 p.] Rita Bodediagrammet för förstärkningen nedan, dvs. $|H(\omega)|$, inkluderat värden på nivåer (algebraiskt förenklade, ej numeriska värden) och intressanta brytfrekvenser.

$$H = k\frac{(1 + j\frac{\omega}{\omega_1})(1 + j\frac{\omega}{\omega_4})}{(1 + j\frac{\omega}{\omega_2})(1 + j\frac{\omega}{\omega_3})}$$

$k = 3$; $\omega_1 = 1$ [rad/s]; $\omega_2 = 10$ [rad/s]; $\omega_3 = 100$ [rad/s]; $\omega_4 = 300$ [rad/s]

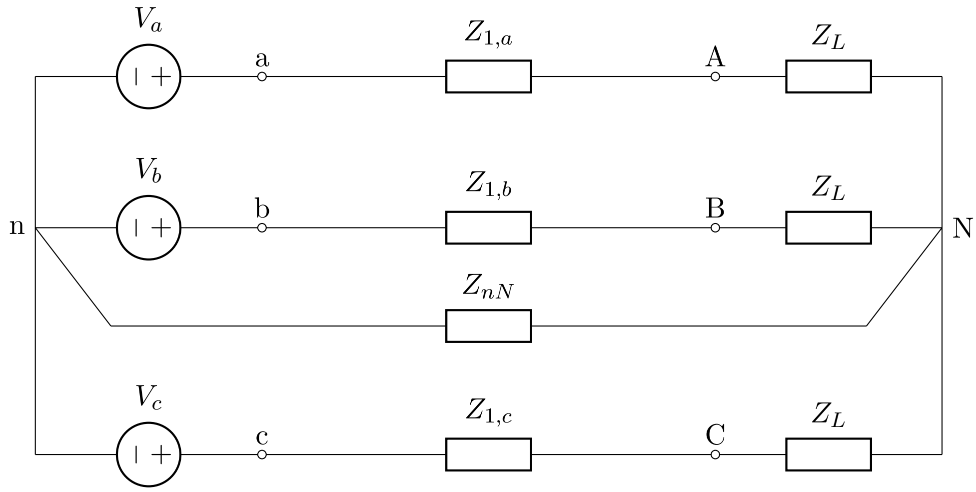
Uppgift 4 [11 p.]

Nedan finns en krets i vilken en last, Z_4, ska kopplas in parallellt med R_2. Bestäm Z_4 för att maximalt med aktiv effekt ska utvecklas i denna.
Ställa upp nödvändiga ekvationssystem/relationer som behövs lösas och visa tydligt hur de ska behandlas för att kunna bestämma Z_4.
Du måste tydligt visa, och i ord beskriva, din plan för hur problemet ska lösas för att få poäng.



Uppgift 5 [4 p.]

Ge de korrekta svaren på flervalsfrågorna. Endast ett svar på varje fråga är rätt och ingen motivering behövs.



1. [1 p.] Hur stor är den skenbara effekten som utvecklas i återledaren i ett balanserat trefassystem.

   (a) $\propto 3\frac{V_a}{Z_{1,a}+Z_L}$

(b) $\propto \sqrt{3}\sqrt{\sum(P_i)}$ där $i = a, b, c$
(c) 0
(d) $\propto \sqrt{3}$

2. [1 p.] För ett balanserat trefassystem, om den förbrukade aktiva effekten i en av fasernas last (dvs. $|Z_L|$) är P, vad är då den aktiva effekten i trefaslasten?

   (a) $3P$
   (b) $\sqrt{3}P$
   (c) $P/\sqrt{3}$
   (d) 0

3. [1 p.] Hur ser en balanserad trefaslast ut om den reaktiva effekt här är lika med den skenbara?

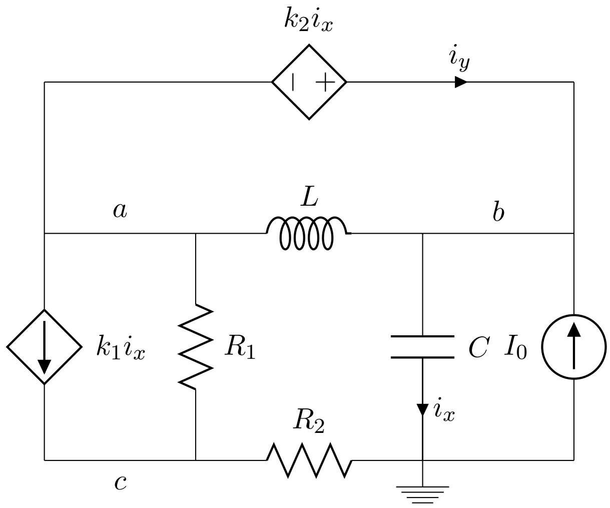
   (a) $\propto R$
   (b) $\propto 1/(j\omega C)$
   (c) $\propto j\omega L$
   (d) 0

4. [1 p.] Vilket alternativ representerar en balanserad trefaskälla (cosinus som referens och abc sekvens):

   (a) $V_a = 3$, $V_b = \sqrt{9}\cos(\omega t + 165°)$, $V_c = \sqrt{9}\angle - 75°$
   (b) $V_a = 2 - 2j$, $V_b = \sqrt{8}\cos(\omega t - 120°)$, $V_c = \sqrt{8}\angle 120°$
   (c) $V_a = -3j$, $V_b = \sqrt{9}\angle - 210°$, $V_c = \sqrt{9}\cos(\omega t + 30°)$
   (d) inget av ovan

KTH ei1110 Elkretsanalys (CELTE), tentamen (TEN2) 2018-03-12 kl 08–13 - Lösningsförslag.

Uppgift 1 [10 p.]



(a)
Vi börjar med att använda KCL i de angivna noderna för att få nodekvationerna:

$$\text{a: } k_1 i_x + \frac{v_a - v_c}{R_1} + \frac{v_a - v_b}{j\omega L} + i_y = 0 \tag{1}$$

$$\text{b: } -I_0 + i_x + \frac{v_b - v_a}{j\omega L} - i_y = 0 \tag{2}$$

$$\text{c: } -k_1 i_x + \frac{v_c - v_a}{R_1} + \frac{v_c - 0}{R_2} = 0 \tag{3}$$

Vi ser att $i_x = v_b j\omega C$. Istället för att infört strömmen i_y kunde vi använt oss av en supernod men kontentan är att vi endast behöver två noder så vi slår ihop, t.ex., a och b och använder oss av en kort KVL: $+v_a + k_2 i_x - v_b = 0$ vilket ger oss (med i_x ovan) att $v_b = \frac{v_a}{1 - k_2 j\omega C}$. Om vi använder oss av allt detta så får vi:

$$\text{a: } k_1 v_b j\omega C + \frac{v_a - v_c}{R_1} - I_0 + v_b j\omega C = 0 \tag{4}$$

$$\text{c: } - k_1 v_b j\omega C + \frac{v_c - v_a}{R_1} + \frac{v_c}{R_2} = 0 \tag{5}$$

$$\rightarrow \tag{6}$$

$$\text{a: } k_1 \frac{v_a}{1 - k_2 j\omega C} j\omega C + \frac{v_a - v_c}{R_1} - I_0 + \frac{v_a}{1 - k_2 j\omega C} j\omega C = 0 \tag{7}$$

$$\text{c: } - k_1 \frac{v_a}{1 - k_2 j\omega C} j\omega C + \frac{v_c - v_a}{R_1} + \frac{v_c}{R_2} = 0 \tag{8}$$

Vi samlar termerna och får:

$$\text{a: } v_a \left(\frac{k_1 j\omega C}{1 - k_2 j\omega C} + \frac{1}{R_1} + \frac{j\omega C}{1 - k_2 j\omega C} \right) - v_c \frac{1}{R_1} = I_0 \tag{9}$$

$$\text{c: } v_a \left(- \frac{k_1 j\omega C}{1 - k_2 j\omega C} - \frac{1}{R_1} \right) + v_c \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = 0 \tag{10}$$

(b)

Vi får $v_b = V_c = 1 - j = \sqrt{2}\angle{-\pi/4}$ $(= \sqrt{2}\angle 7\pi/4)$ samt information om Z_c så vi vet att strömmen genom kondensatorn, C, blir:

$$I_C = V_C / Z_C = \frac{1 - j}{-j} = 1 + j = \sqrt{2}\angle \pi/4. \tag{11}$$

V_C har ett fasargument som är < 0 så den har förskjutits till höger om y-axeln (dvs den kommer senare i tiden) och tvärtom för I_C som kommer tidigare (dvs leder/ligger före i tiden) som stämmer med vår ramsa ”ELI the ICE man”. Se graf nedan.

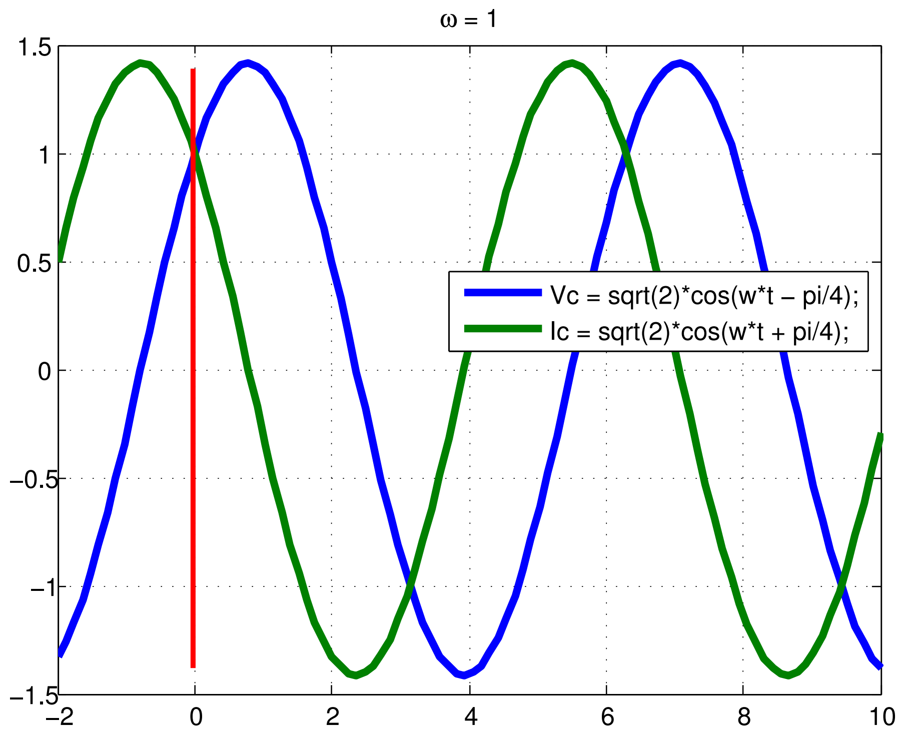
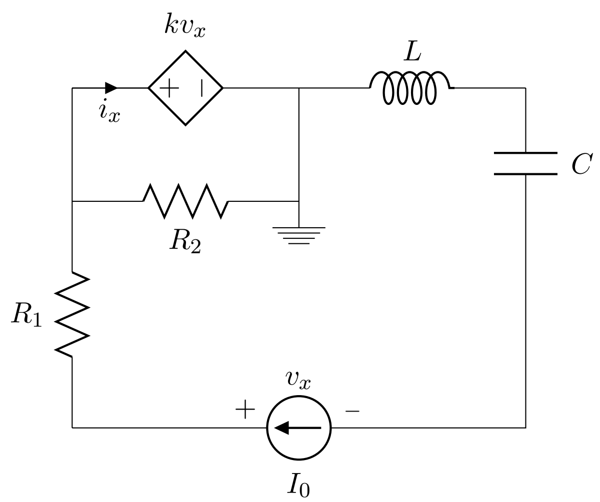


Figure 1: $V_c(t)$ och $I_c(t)$ och med $\omega = 1$ som exempel.

Uppgift 2 [8 p.]



Vi börjar med att bestämma v_x i kända storheter genom KVL:

$$+v_x - R_1 I_0 - kv_x - I_0 j\omega L - I_0 \frac{1}{j\omega C} \rightarrow \tag{12}$$

$$v_x = \frac{I_0 Z}{1-k} \tag{13}$$

$$Z = R_1 + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \tag{14}$$

Vi behöver också veta strömmen genom "kv_x" som vi får med en KCL:

$$-I_0 + I_{R_2} + i_x = 0 \rightarrow -I_0 + \frac{kv_x}{R_2} + i_x = 0 \tag{15}$$

$$i_x = I_0 - \frac{kv_x}{R_2} = I_0 - \frac{kI_0 Z}{R_2(1-k)} \tag{16}$$

Eftersom vi inte har några mer data, t.ex., diagram eller värden så kan vi anta, för att slippa $\frac{1}{2}$ faktorn, att källorna är givna i effektivvärde, vilket ger oss att den komplexa effekten ges av $S = VI^*$ och om vi tillämpar detta på våra komponenter får vi (med passiv teckenkonvention, där vi för in ett minustecken för strömmen om den går ut ur "+"-terminalen av den definierade spänningen för komponenten):

$$S_{I_0} = V_{I_0} I_{I_0}^* = v_x(-I_0)^* = -\frac{Z|I_0|^2}{1-k} \tag{17}$$

$$S_{R_1} = V_{R_1} I_{R_1}^* = R_1 I_0 I_0^* = R_1 |I_0|^2 \tag{18}$$

$$S_L = V_L I_L^* = j\omega L I_0 I_0^* = j\omega L |I_0|^2 \tag{19}$$

$$S_C = V_C I_C^* = \frac{1}{j\omega C} I_0 I_0^* = \frac{1}{j\omega C} |I_0|^2 \tag{20}$$

$$S_{R_2} = V_{R_2} I_{R_2}^* = kv_x \left(\frac{kv_x}{R_2}\right)^* = \frac{|kv_x|^2}{R_2} = \frac{1}{R_2} \left|\frac{kI_0 Z}{1-k}\right|^2 \tag{21}$$

$$= \tag{22}$$

$$S_{kv_x} = V_{kv_x} I_{kv_x}^* = kv_x i_x^* = k\frac{I_0 Z}{1-k} I_0 \left(1 - \frac{kZ}{R_2(1-k)}\right)^* \tag{23}$$

Vi kontrollerar om detta kan vara rätt genom att titta på $\sum S = 0$ för de tidiga uttrycken:

$$\sum S = S_{R_1} + S_L + S_C + S_{R_2} + S_{kv_x} + S_{I_0} = \tag{24}$$

$$|I_0|^2(R_1 + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}) + \frac{|kv_x|^2}{R_2} + kv_x I_x^* - v_x I_0^* = \tag{25}$$

$$|I_0|^2 Z + \frac{|kv_x|^2}{R_2} + kv_x \left(I_0 - \frac{kv_x}{R_2}\right)^* - v_x I_0^* = \tag{26}$$

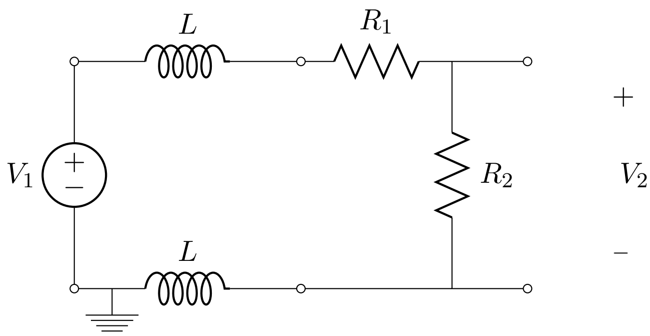
$$|I_0|^2 Z + kv_x (I_0)^* - v_x I_0^* = \tag{27}$$

$$|I_0|^2 Z + k\frac{I_0 Z}{1-k} I_0^* - \frac{I_0 Z}{1-k} I_0^* = \tag{28}$$

$$\frac{Z}{1-k}|I_0|^2 (1 - k + k - 1) = 0 \tag{29}$$

Q.E.D

Uppgift 3 [11 p.]



(a) En KVL för strömmen i kretsen ger oss att:

$$V_2 = R_2 I = R_2 \frac{V_1}{2j\omega L + R_1 + R_2} \rightarrow H = \frac{V_2}{V_1} = \tag{30}$$

$$\frac{R_2}{\left(1 + j\frac{2\omega L}{R_1+R_2}\right)(R_1 + R_2)} = K\frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_1}}, \text{ där} \tag{31}$$

$$K = \frac{R_2}{R_1 + R_2}, \omega_1 = \frac{R_1 + R_2}{2L} \tag{32}$$

Vi får diagrammet:

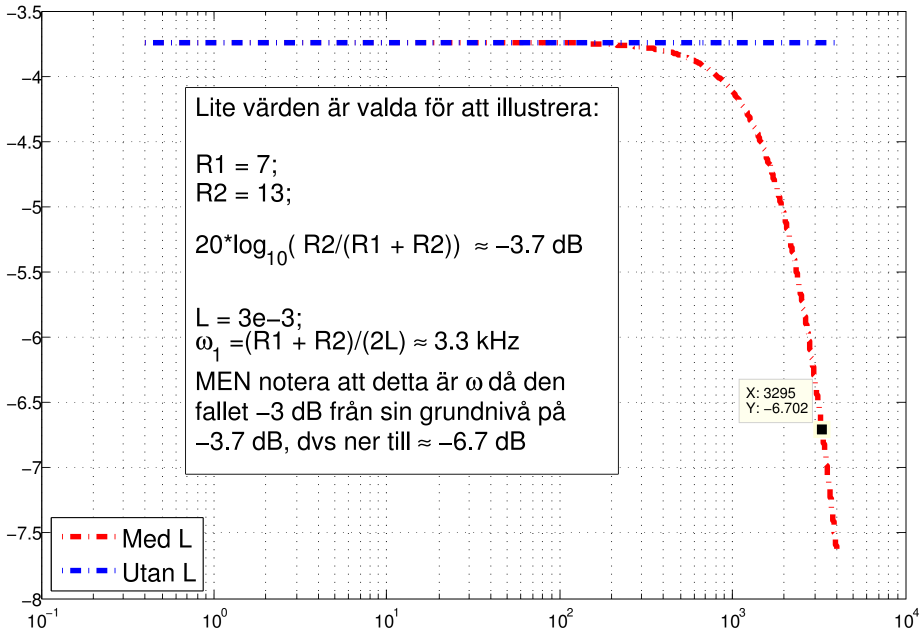


Figure 2: Förstärkningen $|H(\omega)|$ med och utan induktanserna L.

(b)

$$H = K\frac{(1 + j\frac{\omega}{\omega_1})(1 + j\frac{\omega}{\omega_4})}{(1 + j\frac{\omega}{\omega_2})(1 + j\frac{\omega}{\omega_3})}$$

Vi utnyttjar approximationen att $|1 + \frac{j\omega}{\omega_i}| \approx 1$ om $\omega < \omega_i$ och att $|1 + \frac{j\omega}{\omega_i}| \approx \frac{\omega}{\omega_i}$ om $\omega > \omega_i$. Vi gör detta stegvis för de fem frekvensområden som är intressanta och får:

$$|H(\omega < \omega_1)| \approx K\frac{1 * 1}{1 * 1} = K \tag{33}$$

$$|H(\omega_1 < \omega < \omega_2)| \approx K\frac{\frac{\omega}{\omega_1} * 1}{1 * 1} = K\frac{1}{\omega_1}\omega \tag{34}$$

$$|H(\omega_2 < \omega < \omega_3)| \approx K\frac{\frac{\omega}{\omega_1} * 1}{\frac{\omega}{\omega_2} * 1} = K\frac{\omega_2}{\omega_1} \tag{35}$$

$$|H(\omega_3 < \omega < \omega_4)| \approx K\frac{\frac{\omega}{\omega_1} * 1}{\frac{\omega}{\omega_2}\frac{\omega}{\omega_3}} = K\frac{\omega_2\omega_3}{\omega_1}\frac{1}{\omega} \tag{36}$$

$$|H(\omega_4 < \omega| \approx K\frac{\frac{\omega}{\omega_1}\frac{\omega}{\omega_4}}{\frac{\omega}{\omega_2}\frac{\omega}{\omega_3}} = K\frac{\omega_2\omega_3}{\omega_1\omega_4} \tag{37}$$

Som ses är det bara två områden där $|H|$ är explicit beroende av vinkelfrekvensen ω, dvs som inte är konstanta i sitt intervall. Om man tar $20log_{10}(...)$ av nivåerna så får man värden och vi vet att nollställena och polerna ändrar lutningen med +20 respektive -20 dB/dekad. Vi får diagrammet:

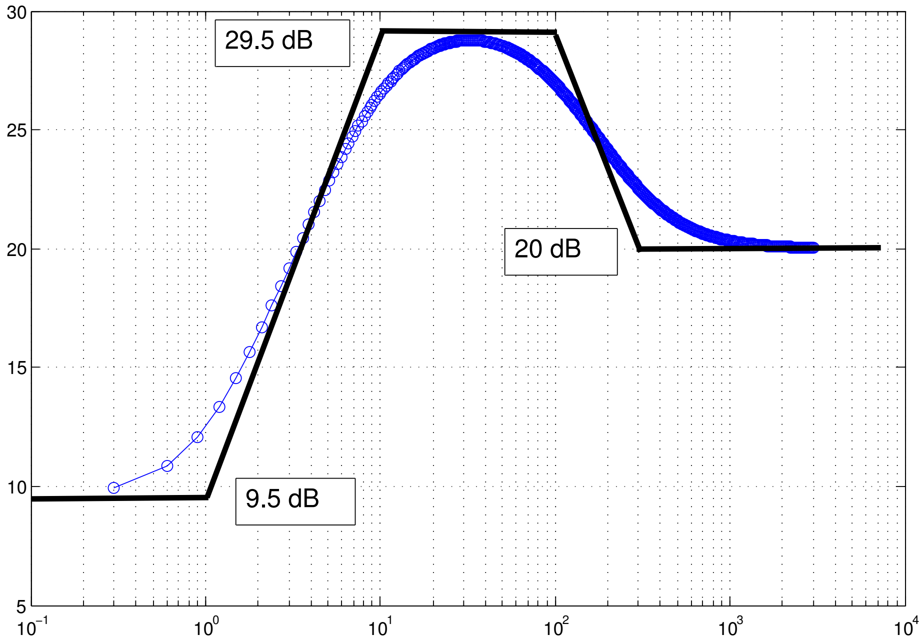
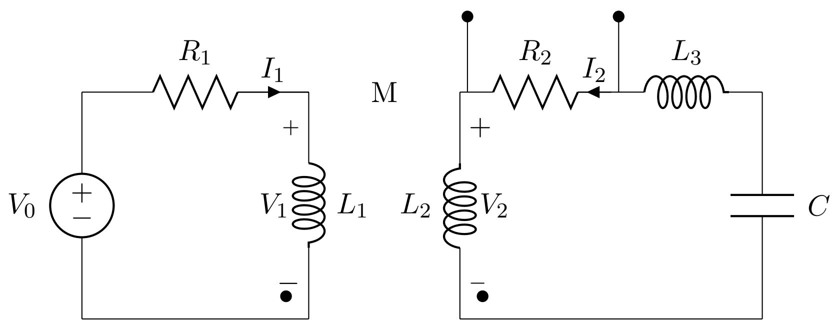


Figure 3: Förstärkningen, $|H(\omega)|$, med värdena i uppgiften.

Uppgift 4 [11 p.]



För att bestämma Z_4 som ger att maximalt med aktiv effekt utvecklas i denna, behöver vi veta hur Thevenin ekvivalenten ser ut när man tittar in i kretsen där R_2 sitter. Detta eftersom vi ska välja så att $Z_4 = Z_{TH}^*$. Därmed behöver vi veta $V_{oc} = V_{R_2}$ och I_{sc} där.
Vi börjar med $V_{oc} = V_{R_2}$ vilket är spänning över R_2 i vår krets. Därmed behöver vi veta strömmen I_2. Vi definierar I_1 och I_2 enligt figur som ger oss för "dot convention"

samverkande flöde då. KVL på båda sidorna ger oss:

$$+V_0 - I_1 R_1 - V_1 = 0 \tag{38}$$

$$+V_2 + I_2\left(R_2 + j\omega L_3 + \frac{1}{j\omega C}\right) = 0 \tag{39}$$

Vi behöver också veta V_1 och V_2 som vi får ifrån (samverkande flöden):

$$V_1 = j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_2 \tag{40}$$

$$V_2 = j\omega L_2 I_2 + j\omega M I_1 \tag{41}$$

Vi kan nu sätta in V_1 och V_2 och lösa ut I_2 (och I_1 om vi vill). Nu har vi $V_{oc} = V_{R_2} I_2$. Nu tar vi oss an I_{sc} som vi får om vi kortsluter R_2 och beräknar strömmen $I_{sc} = I_2'$ då. Vi upprepar vad vi gjort ovan och får nu (notera att R_2 är borta pga kortslutningen och att variablerna nu är annorlunda):

$$+V_0 - I_1' R_1 - V_1' = 0 \tag{42}$$

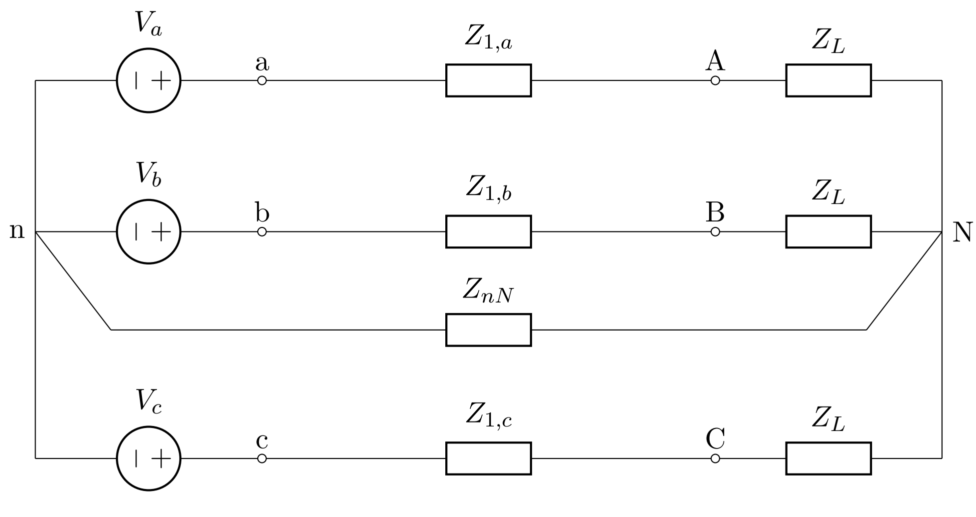
$$+V_2' + I_2'\left(j\omega L_3 + \frac{1}{j\omega C}\right) = 0 \tag{43}$$

$$V_1' = j\omega L_1 I_1' + j\omega M I_2' \tag{44}$$

$$V_2' = j\omega L_2 I_2' + j\omega M I_1' \tag{45}$$

Ur detta kan vi som tidigare lösa ut I_2' och får $I_{sc} = I_2'$.
Nu får vi $Z_4 = Z_{TH}^* = \frac{V_{oc}}{I_{sc}}^*$.

Uppgift 5 [4 p.]



1. [1 p.] Hur stor är den skenbara effekten som utvecklas i återledaren i ett balanserat trefassystem.

   (a) $\cancel{\propto 3\frac{V_a}{Z_{1,a}+Z_L}}$
   (b) $\cancel{\propto \sqrt{3}\sqrt{\sum(P_i)}}$ ~~där~~ $\cancel{i = a, b, c}$
   (c) 0
   (d) $\cancel{\propto \sqrt{3}}$

2. [1 p.] För ett balanserat trefassystem, om den förbrukade aktiva effekten i en av fasernas last (dvs. $|Z_L|$) är P, vad är då den aktiva effekten i trefaslasten?

   (a) $3P$
   (b) $\cancel{\sqrt{3}P}$
   (c) $\cancel{P/\sqrt{3}}$
   (d) $\cancel{0}$

3. [1 p.] Hur ser en balanserad trefaslast ut om den reaktiva effekt här är lika med den skenbara?

   (a) $\cancel{\propto R}$
   (b) $\cancel{\propto 1/(j\omega C)}$
   (c) $\propto j\omega L$
   (d) $\cancel{0}$

   **Denna kräver lite förklaring eftersom det ligger i detaljerna. Vi har från början att $S = P + jQ$ och den skenbara effekten är $|S| = \sqrt{P^2 + Q^2} \geq 0$. Om $Q = |S|$ så är $Q \geq 0$ och $P = 0$. Samtidigt har vi att $Q = |S| \sin\phi$ och $P = |S| \cos\phi$. Därmed måste vi ha $Q = |Q|\angle\pi/2$ vilket ger att fasförskjutnignen i lasten är $\pi/2$ och därmed är det en induktiv last.

4. [1 p.] Vilket alternativ representerar en balanserad trefaskälla (cosinus som referens och abc sekvens):

   (a) $\cancel{V_a = 3,\ V_b = \sqrt{9}\cos(\omega t + 165°),\ V_c = \sqrt{9}\angle - 75°}$
   (b) $\cancel{V_a = 2 - 2j,\ V_b = \sqrt{8}\cos(\omega t - 120°),\ V_c = \sqrt{8}\angle 120°}$
   (c) $V_a = -3j$, $V_b = \sqrt{9}\angle - 210°$, $V_c = \sqrt{9}\cos(\omega t + 30°)$
   (d) ~~inget av ovan~~