KTH ei1110 Elkretsanalys (CELTE), tentamen (TEN2) 2018-06-07 kl 08–13.

Hjälpmedel: Inga extra hjälpmedel är tillåtna.

Alla källor ska antas vara tidsharmoniska växelströmskällor om inget annat explicit anges och beteckningar såsom V_0, I_1 etc. beskriver oftast amplituden hos dessa. Om ingen annan information ges ska komponenter antas vara ideala. Angivna värden hos komponenter (t.ex. R för ett motstånd, V för en spänningskälla) ska antas vara kända storheter och andra markerade storheter (t.ex. strömmen genom, eller spänningen över, ett motstånd) ska antas vara okända storheter. Antag **stationärt tillstånd**, dvs. lång tid efter alla komponenter har kopplats ihop.
Några viktiga saker för att kunna få maximalt antal poäng:

- **Endast ett problem per sida** och text på baksidan kommer inte att beaktas.
- Tänk på att er handstil måste vara tydlig för att lösningen ska kunna bedömas. **Kan vi inte läsa, kan vi inte ge poäng!** Använd **inte rödpenna**.
- Lösningarna bör som oftast uttryckas i de kända storheterna och förenklas **innan** eventuella värden används. Därmed visas förståelse för problemet.
- **Ge alltid din krets** och var tydlig med diagram och definitioner av variabler. Tänk på hur du definierar polariteten och riktningen på de spänningar och strömmar du använder. **Använd passiv teckenkonvention**. Om det fattas figur med definierade variabler utsatta kan det bli **avdrag** vid tvetydighet. Var noga med definitionen av impedanserna, t.ex. en spoles impedans är inte "L", detta kan ge avdrag.
- Därtill, dela tiden mellan talen och kontrollera svarens rimlighet genom t.ex. dimensionsanalys eller alternativ lösningsmetod.

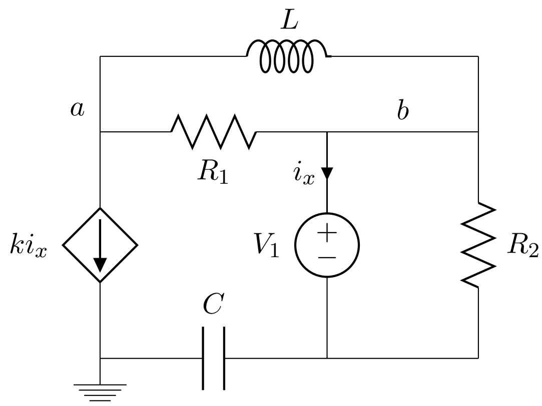
Betygsgränserna är: 50% (E), 60% (D), 70% (C), 80% (B), 90% (A).
Ingen avrundning görs.
För (Fx) krävs $> 45\%$ samt att inte mer än ett tal har poängen x sådan att $0 < x < 50\%$.
(Med detta menas att för att få Fx får endast ett tal dra ner resultatet under godkänt.)

Examinator: Daniel Månsson (08 790 9044)

Lycka till och ta det lugnt!

Uppgift 1 [10 p.]

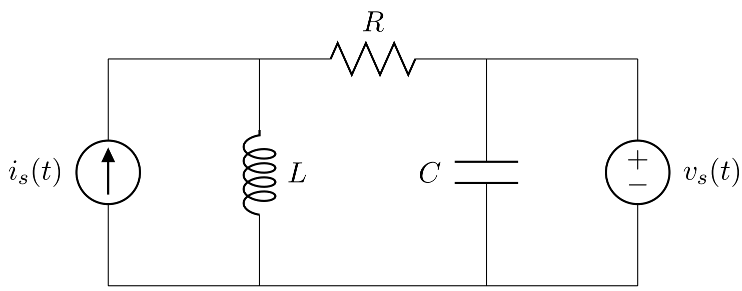
(a) [6 p.] För kretsen nedan, ställ upp nodekvationerna för de markerade noderna uttryckt enbart i de kända storheterna och dessa nodpotentialer. I de slutgiltiga uttrycken ska termerna vara samlade och rimligt förenklade.

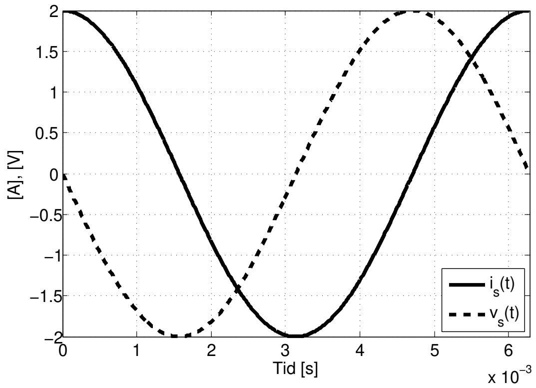


(b) [4 p.] Antag att en ström $i(t) = 2\cos(\omega t)$ flyter genom en impedans Z. Bestäm $Z = a + bj$ så att spänningen $v(t)$ över impedansen, jämfört med $i(t)$, förskjuts $45°$ samt att toppvärdet dubbleras.

Uppgift 2 [10 p.]

För kretsen nedan, beräkna den komplexa effekten numeriskt för varje komponent.
Du måste använda passiv teckenkonvention och vara tydlig med hur dina strömmar och spänningar definieras.
Antag att $R = 1\ \Omega$, $L = 1$ mH och $C = 1$ mF (men sätt in värdena först på slutet). I grafen nedan ges $i_s(t)$ och $v_s(t)$ där $i_s(t) = A\cos(\omega t + \phi_I)$ ($\phi_I = 0$) väljs som referens ($\omega = 1000$ [rad/s]).
(*Tips*, kontrollera genom att visa att $\sum S = 0$ är uppfyllt).

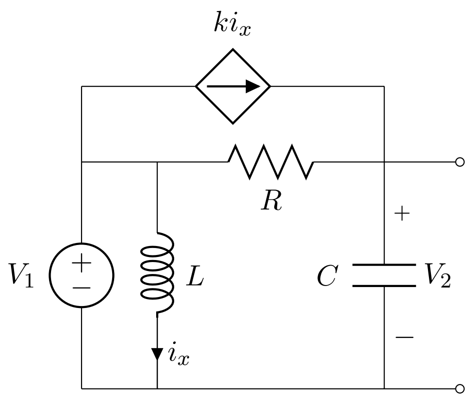




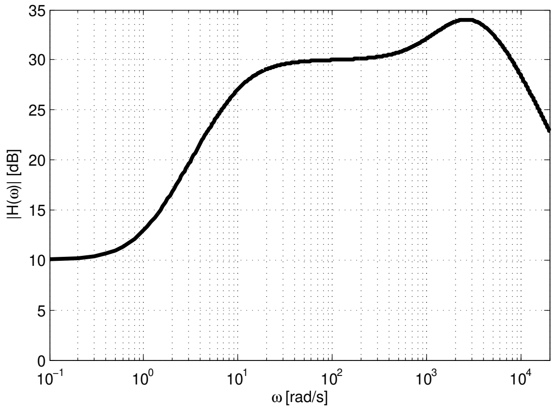
Uppgift 3 [12 p.]

(a) [4 p.] Härled överföringsfunktionen, $H(\omega)$, för kretsen nedan samt bestäm vad förstärkningen blir om värdet på $k = L = C = R = f = 1$.

(b) [2 p.] Identifiera alla poler och nollställen i $H(\omega)$ (utan de ovanstående numeriska antagandena).

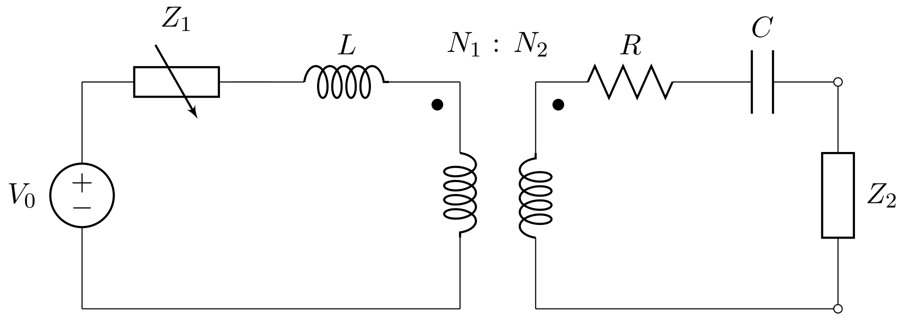


(c) [6 p.] En annan krets ger Bodediagrammet över förstärkningen nedan, ange överföringsfunktionen $H(\omega)$ och visa att den ger rätt värde för $|H(10^2)|$.
Intressanta brytfrekvenser och värden på nivåer ska vara någorlunda korrekt (dvs. de kan avvika lite från det verkliga värdet i figuren).



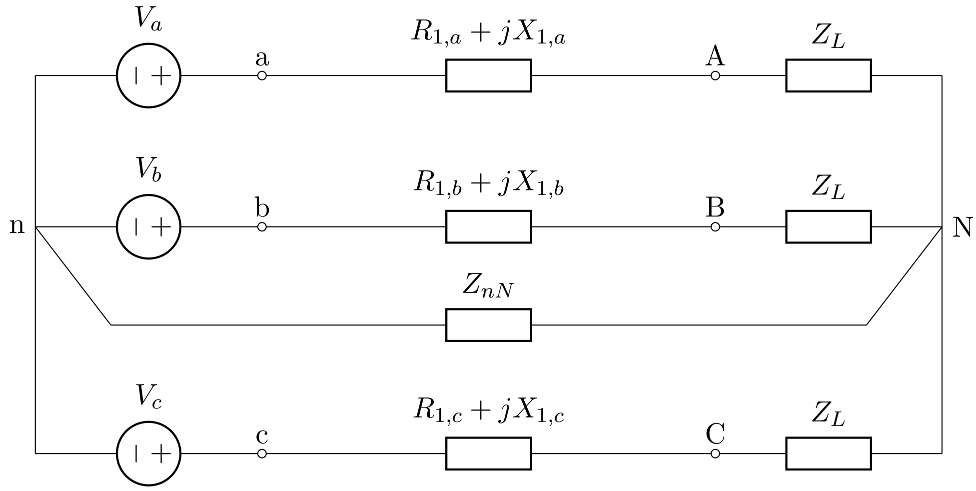
Uppgift 4 [4 p.]

Antag, för kretsen nedan, att den variabla impedansen Z_1 representerar ett känsligt delsystem som inte tål så mycket aktiv effekt innan det går sönder. Vilket Z_1, uttryckt i de andra komponenterna, ska man speciellt undvika för att detta delsystem ska bestå länge?



Uppgift 5 [4 p.]

Ge de korrekta svaren på flervalsfrågorna. Endast ett svar på varje fråga är rätt och ingen motivering behövs.



1. [1 p.] Kvoten mellan den reaktiva och den aktiva effekten som utvecklas i en last kan bestämmas m.h.a. fasskillnaden mellan spänningen över och strömmen genom lasten allena.

   (a) ja
   (b) nej
   (c) kanske!
   (d) öh va?

2. [1 p.] För det balanserade trefassystemet ovan (med komponenter med nollskilda termer), om den förbrukade aktiva effekten i en av fasernas last (dvs. $|Z_L|$) är P, vad gäller då för den aktiva effekten som levereras av trefaskällan ?

   (a) $3P$
   (b) $> 3P$
   (c) $< 3P$
   (d) P

3. [1 p.] Hur stor fasvridningen är det mellan nodpotentialen för nod n och för nod N i ett balanserat trefassystem.

   (a) $\propto arg(V_a + X_{1,a} + Z_L)$
   (b) $\pi/2$
   (c) 0
   (d) $\propto arg(Z_{nN})$

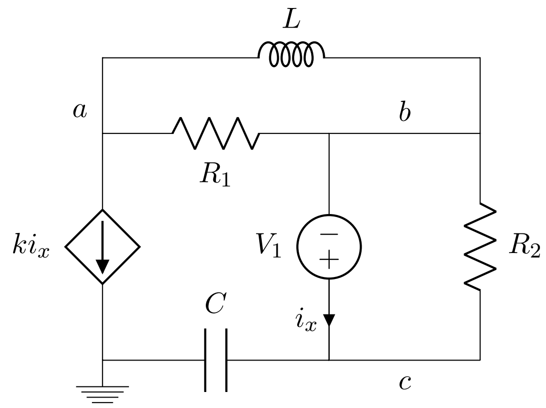
4. [1 p.] Vilket alternativ representerar en balanserad trefaskälla (cosinus som referens och abc sekvens):

   (a) $V_a = 9$, $V_b = \sqrt{9}\cos(\omega t + 120°)$, $V_c = \sqrt{9}\angle - 120°$
   (b) $V_a = 1 - 2j$, $V_b = 3\cos(\omega t - \pi/4)$, $V_c = 3\angle\pi/4$

(c) $V_a = -1\angle 0°$, $V_b = \sqrt{1}\angle -120°$, $V_c = \sqrt{i}\cos(\omega t + 120°)$
(d) inget av ovan

KTH ei1110 Elkretsanalys (CELTE), tentamen (TEN2) 2018-06-07 kl 08–13 - Lösningsförslag.

Uppgift 1 [10 p.]



(a)

Vi lägger till en stödnod c för att hjälpa oss beräkna i_x (alternativt kan vi använda oss av en supernod) och sedan ställer vi upp nodekvationerna och tittar på strömmarna som går ut ur varje nod.

$$KCL_a : ki_x + \frac{V_a - V_b}{R_1} + \frac{V_a - V_b}{j\omega L} = 0 \tag{1}$$

$$KCL_b : \frac{V_b - V_a}{R_1} + i_x + \frac{V_b - V_c}{R_2} + \frac{V_b - V_a}{j\omega L} = 0 \tag{2}$$

$$KCL_c : V_c j\omega C - i_x + \frac{V_c - V_b}{R_2} = 0 \tag{3}$$

En KVL hjälper oss att minska antalet okända variabler genom:

$$0 + V_c + V_1 - V_b = 0 \rightarrow V_c = V_b - V_1 \rightarrow \tag{4}$$

$$i_x = V_c j\omega C + \frac{V_c - V_b}{R_2} = V_b j\omega C - V_1 j\omega C - \frac{V_1}{R_2} \tag{5}$$

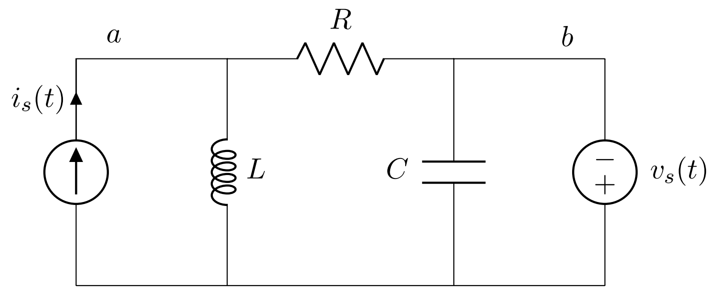
Om vi sätter in detta och samlar termerna får vi:

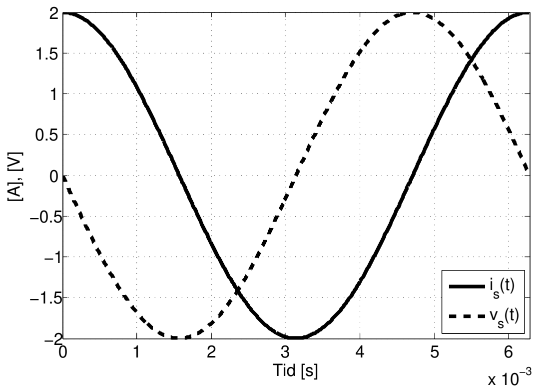
$$KCL_a : V_a\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{j\omega L}\right) + V_b\left(kj\omega C - \frac{1}{R_1} - \frac{1}{j\omega L}\right) = V_1\left(kj\omega C + \frac{k}{R_2}\right) \tag{6}$$

$$KCL_b : -V_a\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{j\omega L}\right) + V_b\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C\right) = V_1 j\omega C \tag{7}$$

(b) Om $i(t) = 2cos(\omega t)$ har vi $v(t) = B\cos(\omega t+\phi)$ och då blir $Z = \frac{V}{I} = |\frac{V}{I}|\angle arg(\frac{V}{I}) = |Z|e^{\pm j\phi} = |\frac{B}{2}|\angle(\phi - 0)$. Enligt texten vill vi ha $\phi - 0 = \pm 45° = \pm\pi/4$ samt $B = 4$ (dvs. dubblerad). Detta ger att $Z = 2\angle \pm \pi/4 = 2e^{\pm j\pi/4} = 2(\cos(\pm\pi/4) + j\sin(\pm\pi/4)) = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \pm j\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}(1 \pm j)$.

Uppgift 2 [10 p.]





Med värdena i texten får vi att $Z_c = \frac{1}{j} = -j$, $Z_L = j$ och att $i_s(t) = 2\cos(\omega t + 0)$ vilket ger att $I_s = 2$.
(Här måste man vara noggrann så man inte använder $i_s(t)$ i sin beräkningar eftersom detta är en storhet som finns i tidsdomänen och när vi räknar så måste vi ha alla våra variabler i frekvensdomänen (vi antar ju tidsharmoniska signaler) och använda oss av $j\omega$-metoden.)
Ur grafen ser vi att $t = 0 \rightarrow v_s(t) = 0$ samt att $v_s(t)$ blir < 0 efter detta vilket ger oss att $v_s(t) = 2\cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$ som ger att $V_s = 2j$ (tänker er att vektorn 2 vrids $+\frac{\pi}{2}$ i det

komplexa talplanet till $2j$). Nu sätter vi upp två nodekvationer m.h.a KCL:

$$\frac{V_a}{j\omega L} + \frac{V_a - V_b}{R} - I_s = 0 \tag{8}$$

$$V_b = V_s \to V_a = \left(I_s + \frac{V_s}{R}\right)\frac{Rj\omega L}{R + j\omega L} \tag{9}$$

$$\frac{V_b - V_a}{R} + V_b j\omega C + i_x = 0 \tag{10}$$

Med värdena så får vi att $V_a = 2j$. Notera att de med dessa intressant nog inte finns något spänningsfall över R :-) Nu ställer vi upp de komplexa effekterna och minns att med passiv teckenkonvention så sätter vi ett minustecken före strömmen om den definierade strömmen går ut ur "+" terminalen på spänningsfallet vi definierat där. I toppvärdesskalan får vi ($S = \frac{1}{2}VI^*$) men först; för att beräkna $S_V = V_s i_x^*$ behöver vi veta i_x som vi får ur KCL ovan.

$$i_x = \frac{V_a - V_b}{R} - V_b j\omega C = 0 - 2j * j = 2 \tag{11}$$

$$S_I = V_a(-I_s)^* = 2j(-2) = -4j \tag{12}$$

$$S_L = V_a I_L^* = |V_a|^2 \frac{1}{Z_L^*} = |2j|^2 \frac{1}{-j} = 4j \text{ } (> 0 \text{ som sig bör!}) \tag{13}$$

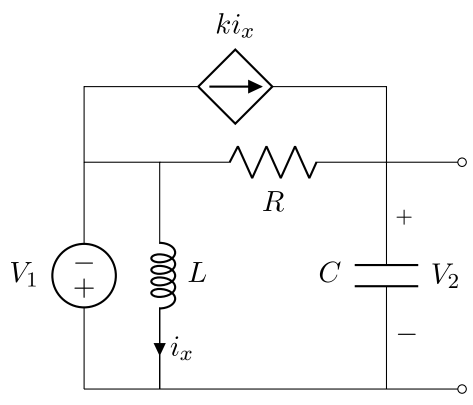
$$S_R = (V_a - V_b)I_R^* = |V_a - V_b|^2 \frac{1}{R^*} = 0\frac{1}{R} = 0 \tag{14}$$

$$S_C = |V_s|^2 \frac{1}{Z_C^*} = |2j|^2 \frac{1}{\frac{1}{-j}} = -4j \text{ } (< 0 \text{ som sig bör!}) \tag{15}$$

$$S_V = V_s i_x^* = 2j(2) = 4j \tag{16}$$

Vi ser att $\sum S = 0$.

Uppgift 3 [12 p.]



(a)
En kort KVL ger oss först att:

$$+V_1 - j\omega L i_x = 0 \rightarrow i_x = \frac{V_1}{j\omega L} \tag{17}$$

sedan får vi med en KCL att:

$$\frac{V_2 - V_1}{R} + V_2 j\omega C - k i_x = 0 \rightarrow \text{ [med } i_x \text{ ovan] } \rightarrow \tag{18}$$

$$V_2\left(\frac{1}{R} + j\omega C\right) - V_1\left(\frac{1}{R} + \frac{k}{j\omega L}\right) = 0 \rightarrow \tag{19}$$

$$H(\omega) = \frac{V_2}{V_1} = \frac{\left(\frac{1}{R} + \frac{k}{j\omega L}\right)}{\left(\frac{1}{R} + j\omega C\right)} \tag{20}$$

Med värdena i texten (glöm inte att $\omega = 2\pi f$) får vi att förstärkningen blir $|H| = \left|\frac{\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2\pi j}\right)}{\left(\frac{1}{1}+2\pi j\right)}\right| = \left|-j\frac{1}{2\pi}\right| = \frac{1}{2\pi}$.

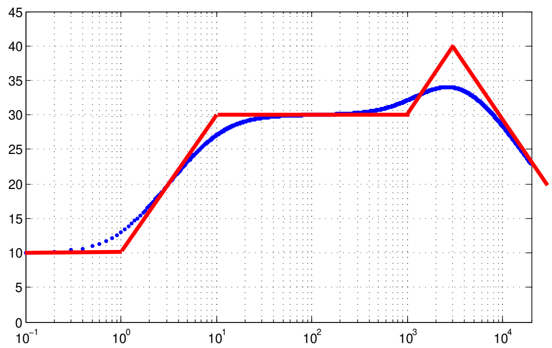
(b) Vi kan skriva om H ovan varpå vi får:

$$H(\omega) = \frac{\left(\frac{1}{R} + \frac{k}{j\omega L}\right)}{\left(\frac{1}{R} + j\omega C\right)} = \frac{\left(1 + \frac{kR}{j\omega L}\right)}{(1 + j\omega RC)} = \frac{\left(1 + \frac{kR}{j\omega L}\right)\left(\frac{j\omega L}{kR}\right)}{(1 + j\omega RC)\left(\frac{j\omega L}{kR}\right)} = \tag{21}$$

$$\frac{\left(\frac{j\omega L}{kR} + 1\right)}{(1 + j\omega RC)\left(\frac{j\omega L}{kR}\right)} = \frac{\left(1 + \frac{j\omega}{\omega_1}\right)}{\left(1 + \frac{j\omega}{\omega_2}\right)\left(\frac{j\omega}{\omega_3}\right)} \tag{22}$$

$$\omega_1 = \frac{kR}{L}, \omega_2 = \frac{1}{RC}, \omega_3 = \frac{kR}{L} \tag{23}$$

(c)



Genom att använda approximationen som beskrivs i föreläsningsanteckningarna och i böcker får man.

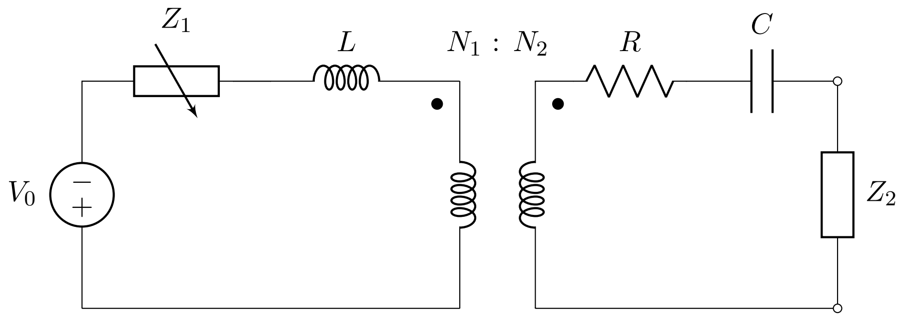
$$H(\omega) = k\frac{(1+j\frac{\omega}{\omega_1})(1+j\frac{\omega}{\omega_3})}{(1+j\frac{\omega}{\omega_2})(1+j\frac{\omega}{\omega_4})^2}, \text{ där:} \tag{24}$$

$$\omega_1 = 1, \omega_1 = 10, \omega_1 = 1000, \omega_1 = 3000[rad/s] \tag{25}$$

$$k = \sqrt{(}10) \rightarrow 20log_{10}(\sqrt{(}10)) = 10 \tag{26}$$

Man fick även rätt för om man istället för $(1+j\frac{\omega}{\omega_4})^2$ hade två väldigt nära varandra frekvenser (poler) där. Man kan testa och se att vid ω_4 har vi $\approx k\frac{\frac{\omega}{\omega_1}\frac{\omega}{\omega_3}}{\frac{\omega}{\omega_2}(\frac{\omega}{\omega_4})^2} = k\frac{\omega_2\omega_4^2}{\omega_1\omega_3 * 3000} \rightarrow$ $20log_{10}(...) \approx 39.5dB$.

Uppgift 4 [4 p.]



Vi ska undvika att $Z_1 = Z_{TH}^*$, där Z_{TH} är impedansen som man ser (här) till höger om Z_1 och eftersom det inte finns några andra beroende källor och att transformatorn är ideal får vi (eftersom impedansen sedd genom en transformator är $Z_{in} = \frac{1}{n^2}Z_L = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 Z_L$):

$$Z_{TH} = j\omega L + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2\left(R + \frac{1}{j\omega C} + Z_2\right) \tag{27}$$

(Hade nu inte transformatorn varit ideal hade vi varit tvungna att ta fram $Z_{TH} = \frac{V_{oc}}{I_{sc}}$ sett in över platsen där Z_1 sitter, men då hade uppgiften gett M, L_1 och L_2 för transformatorn istället.)

Uppgift 5 [4 p.]

Ge de korrekta svaren på flervalsfrågorna. Endast ett svar på varje fråga är rätt och ingen motivering behövs.

1. [1 p.] Kvoten mellan den reaktiva och den aktiva effekten som utvecklas i en last kan bestämmas m.h.a. fasskillnaden mellan spänningen över och strömmen genom lasten allena.

   "(a) - Ja", ty $\frac{Q}{P} = \frac{|S|sin(\phi_V - \phi_I)}{|S|cos(\phi_V - \phi_I)} = tan(\phi_V - \phi_I)$

2. [1 p.] För det balanserade trefassystemet ovan (med komponenter med nollskilda termer), om den förbrukade aktiva effekten i en av fasernas last (dvs. $|Z_L|$) är P, vad gäller då för den aktiva effekten som levereras av trefaskällan ?

   "(b) - $> 3P$, ty källan måste också bidra till att "driva" de resistiva förlusterna i ledningarna.

3. [1 p.] Hur stor fasvridningen är det mellan nodpotentialen för nod n och för nod N i ett balanserat trefassystem.

   "(c)" - 0, ty nodpotentialen i nod n och nod N är samma.

4. [1 p.] Vilket alternativ representerar en balanserad trefaskälla (cosinus som referens och abc sekvens):

   "(d) - inget av ovan, ty i inget av fallet har de samma amplituder och samtidigt $120°$ fasskillnad mellan varje