KTH ei1110 elkretsanalys (utökad kurs) CELTE, TEN1
2018-10-26 kl 08 – 13.

Hjälpmedel: Inga extra hjälpmedel är tillåtna.

Alla källor ska antas vara likströmskällor och beteckningar såsom V_0, I_1 etc. beskriver amplituden hos dessa. Om ingen annan information ges ska komponenter antas vara ideala. Angivna värden hos komponenter (t.ex. R för ett motstånd, V för en spänningskälla) ska antas vara kända storheter och andra markerade storheter (t.ex. strömmen genom, eller spänningen över, ett motstånd) ska antas vara okända storheter. Om inget annat framgår, antag stationärt tillstånd, dvs. lång tid efter att alla komponenter har kopplats ihop.
Några viktiga saker för att kunna få maximalt antal poäng:

- **Endast ett problem per sida** och text på baksidan kommer inte att beaktas.
- Tänk på att er handstil måste vara tydlig för att lösningen ska kunna bedömas. **Kan vi inte läsa, kan vi inte ge poäng!** Använd **inte rödpenna**.
- Lösningarna bör som oftast uttryckas i de kända storheterna och förenklas **innan** eventuella värden används. Därmed visas förståelse för problemet.
- **Ge alltid din krets** och var tydlig med diagram och definitioner av variabler. Tänk på hur du definierar polariteten och riktningen på de spänningar och strömmar du använder. **Använd passiv teckenkonvention**. Om det fattas figur med definierade variabler utsatta kan det bli **avdrag** vid tvetydighet.
- Därtill, dela tiden mellan talen och kontrollera svarens rimlighet genom t.ex. dimensionsanalys eller alternativ lösningsmetod.

Betygsgränserna är: 50% (E), 60% (D), 70% (C), 80% (B), 90% (A).
För (Fx) krävs $> 45\%$ samt att inte mer än ett tal har poängen x sådan att $0 < x < 50\%$.
(Med detta menas att för att få Fx får endast ett tal dra ner resultatet under godkänt.)

Examinator: Daniel Månsson (08 790 9044)

Lycka till och ta det lugnt!

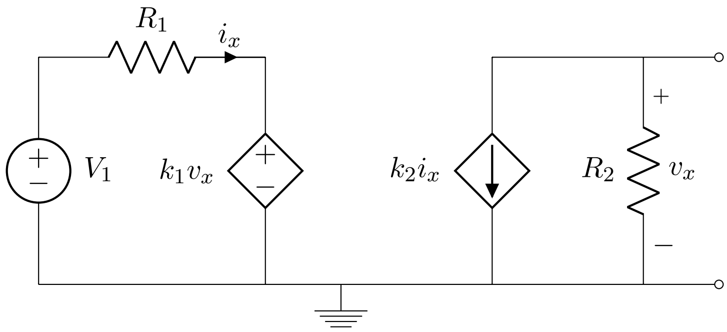
Uppgift 1 [14 p.]

För kretsen nedan, uttryckt i de kända storheterna[1]:

(a) [4 p.] Bestäm i_x och v_x.

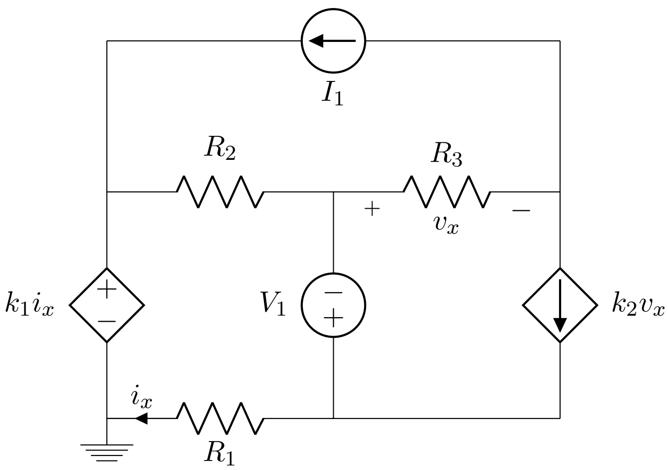
(b) [5 p.] Bestäm vilken effekt som utvecklas i varje enskild komponent. Du måste använda passiv teckenkonvention och vara tydlig med hur dina strömmar och spänningar definieras.

(c) [5 p.] Bestäm samt rita, Theveninekvivalenten, sett in i kretsen vid R_2.



Uppgift 2 [7 p.]

För kretsen nedan, använd nodanalys och ställ upp ekvationssystemet (där termerna är samlade) som skulle kunna lösas för att få nodpotentialerna. Du behöver *inte* lösa ekvationssystemet (men du måste själv välja dina noder) och det ska endast innehålla de kända storheterna samt nodpotentialerna.

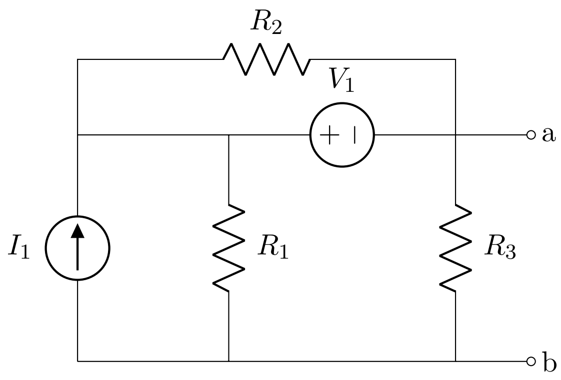


[1] Se framsidan för vilka dessa kan vara.

Uppgift 3 [6 p.]

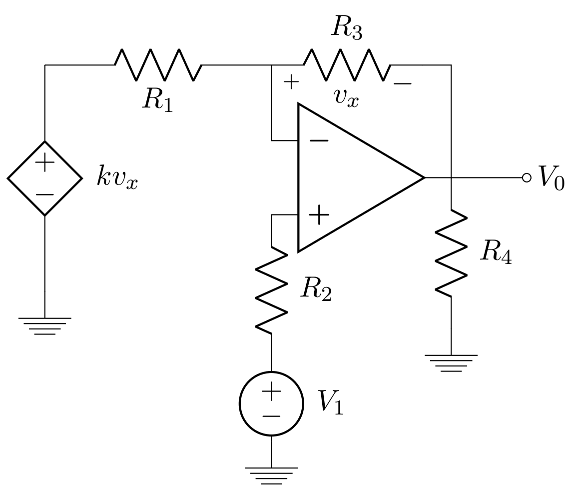
(a) [5 p.] För kretsen nedan, sett in i kretsen vid porten "$a - b$", bestäm **samt** rita, Theveninekvivalenten.

(b) [1 p.] Vilken effekt kan maximalt utvecklas i en resistor kopplad till porten "$a - b$"?



Uppgift 4 [5 p.]

För kretsen nedan, bestäm V_0 som funktion av de kända storheterna och ange vilken typ av krets det blir om k är mycket litet?



Uppgift 5 [12 p.]

Kretsen nedan befinner sig i jämviktstillstånd men vid $t = 0$ nollställs[2] V_1 och V_2 slås på[3]. Bestäm, som funktion av de kända storheterna:

(a) [1 p.] $v_L(0^-)$

(b) [1 p.] $i_c(0^-)$

(c) [1 p.] $v_{R_2}(0^-)$

(d) [1 p.] $v_c(0^-)$

(e) [1 p.] $i_L(0^-)$

(f) [1 p.] $v_{R_1}(0^-)$

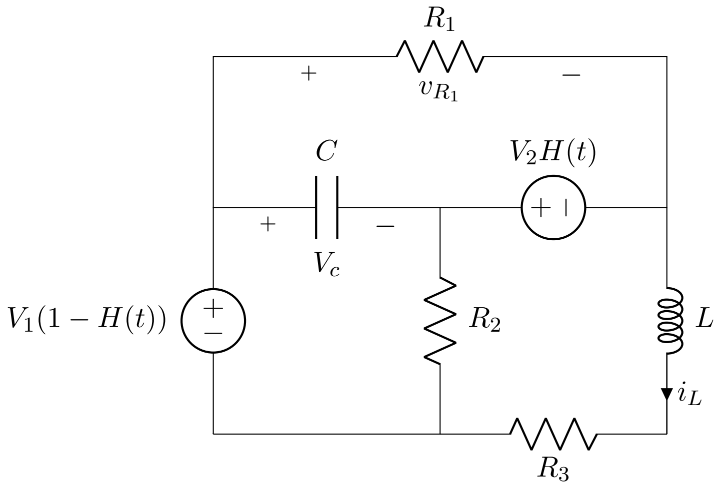
(g) [1 p.] $v_c(0^+)$

(h) [1 p.] $i_L(0^+)$

(i) [1 p.] $v_{R_1}(0^+)$

(j) [2 p.] $P_{V_1}(0^-)$

(k) [1 p.] $P_{V_1}(0^+)$

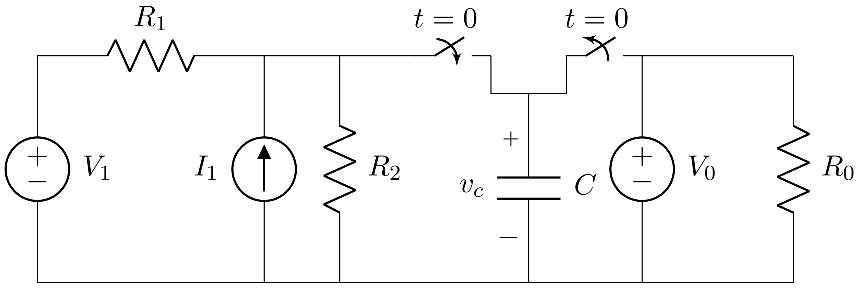


Uppgift 6 [7 p.]

Kretsen nedan befinner sig i jämviktstillstånd men vid $t = 0$ slås brytarna om. Bestäm, som funktion av de kända storheterna, $v_c(t > 0)$.

[2] Dvs. $v_1(t) = V_1(1 - H(t))$, där $H(t)$ är Heavisides stegfunktion vid $t = 0$.

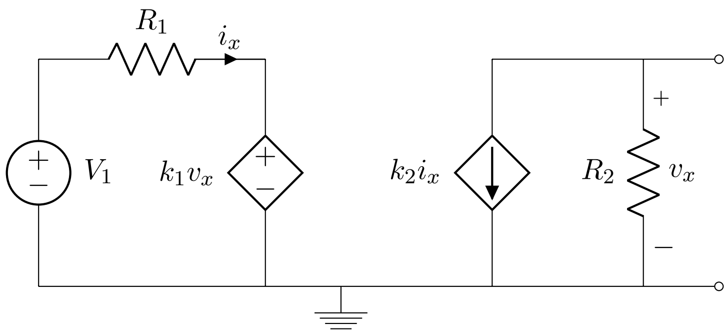
[3] Dvs. $v_2(t) = V_2H(t)$, där $H(t)$ är Heavisides stegfunktion vid $t = 0$.



R_1
$t = 0$
$t = 0$
V_1
I_1
R_2
$+$
v_c
$-$
C
V_0
R_0

KTH ei1110 elkretsanalys (utökad kurs) CELTE, TEN1
2018-10-26 kl 08 – 13 - **lösningsförslag**.

Uppgift 1 [14 p.]



(1a)
M.h.a en KVL och KCL får vi:

$$\text{KVL: } +V_1 - R_1 i_x - k_1 v_x = 0 \tag{1}$$

$$\text{KCL: } +k_2 i_x + \frac{v_x}{R_2} = 0 \rightarrow \tag{2}$$

$$v_x = -R_2 k_2 i_x \rightarrow \tag{3}$$

$$+V_1 - R_1 i_x - k_2 \left(-R_2 k_2 i_x\right) = 0 \rightarrow \tag{4}$$

$$i_x = \frac{V_1}{R_1 - k_1 k_2 R_2} \rightarrow \tag{5}$$

$$v_x = \frac{-R_2 k_2 V_1}{R_1 - k_1 k_2 R_2} \tag{6}$$

$$\tag{7}$$

(1b)
Vi använder passiv teckenkonvention vilket innebär att man får ett minus tecken framför

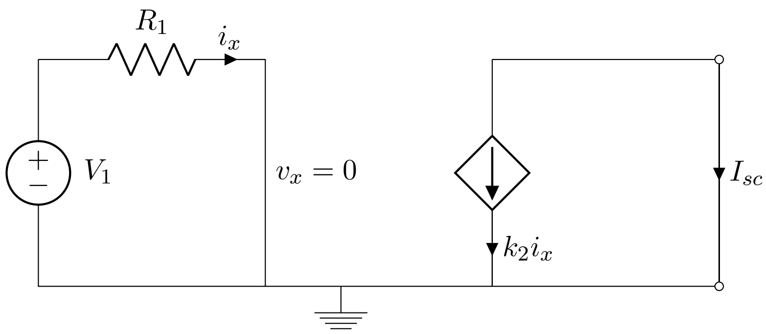
strömmen som man definierat *om* denna lämnar ”plus terminalen” av spänningsfallet (dvs då den levererar effekt (vilket är motsatt vad en resistor alltid gör)):

$$P_{V_1} = V_1(-i_x) \tag{8}$$
$$P_{r_1} = R_1 i_x^2 \tag{9}$$
$$P_{k_1} = k_1 v_x i_x \tag{10}$$
$$P_{k_2} = v_x k_2 i_x \tag{11}$$
$$P_{R_3} = v_x^2 / R_2 \tag{12}$$

(1c)
Eftersom kretsen har beroende källor kan vi inte nollställa dessa för att få R_{TH} men som tur är har vi:

$$V_{TH} = v_x = \frac{-R_2 k_2 V_1}{R_1 - k_1 k_2 R_2} \tag{13}$$

Kortslutningsströmmen, I_{sc}, får vi genom (tänk på att $v_x = 0$ nu så den beroende spänningskällan blir nollställd):



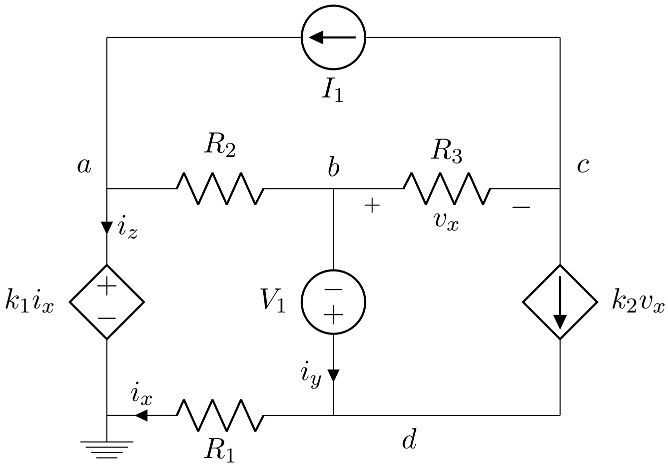
$$\text{KCL: } I_{sc} = -k_2 i_x \tag{14}$$
$$v_x = 0 \rightarrow \tag{15}$$
$$(I_{R_2} = 0) \tag{16}$$
$$\text{ur KVL: } i_x = \frac{V_1}{R_1} \rightarrow \tag{17}$$
$$I_{sc} = -k_2 \frac{V_1}{R_1} \tag{18}$$

− −

$$R_{TH} = V_{TH}/I_{sc} = \frac{\frac{-R_2 k_2 V_1}{R_1 - k_1 k_2 R_2}}{-k_2 \frac{V_1}{R_1}} = \frac{R_2 R_1}{R_1 - k_1 k_2 R_2} \tag{19}$$

Här kan vi notera det roliga/praktiska man kan ha med kretsar som innehåller beroende källor (som oftast måste få effekt utifrån vilket inte visas här). I detta fallet kan vi få $R_{TH} < 0$ om, t.ex., $\frac{R_1}{k_2 R_2} < k_1$.

Uppgift 2 [7 p.]



Vi definierar noderna som visas och några extra strömmar för att hjälpa oss. KCL ger oss:

$$\text{KCL-a:} \quad -I_1 + \frac{v_a - v_b}{R_2} + i_z = 0 \tag{20}$$

$$\text{KCL-b:} \quad \frac{v_b - v_a}{R_2} + i_y + \frac{v_b - v_c}{R_3} = 0 \tag{21}$$

$$\text{KCL-c:} \quad +I_1 + k_2 v_x + \frac{v_c - v_b}{R_3} = 0 \tag{22}$$

$$\text{KCL-d:} \quad -k_2 v_x - i_y + \frac{v_d - 0}{R_1} = 0 \tag{23}$$

Vi har $v_a = k_1 i_x$ (så KCL-a behövs inte), $v_x = v_b - v_c$ samt $i_x = v_d/R_1$. Vi ser nu att vi har en "supernod" för nod $b - d$ och kunde skriva den direkt men vi kan hursomhelst slå ihop KCL-b och KCL-d.

$$\text{KCL-bd:} \quad \frac{v_b - k_1 \frac{v_d}{R_1}}{R_2} - k_2(v_b - v_c) + \frac{v_d}{R_1} + \frac{v_b - v_c}{R_3} = 0 \tag{24}$$

$$\text{KCL-c:} \quad +I_1 + k_2(v_b - v_c) + \frac{v_c - v_b}{R_3} = 0 \tag{25}$$

Det är värt att nämna här att man så klart ha ekvationssystemet uttryckt i de andra noderna istället och det kommer då se lite annorlunda ut men om man skulle lösa det så får nodpotentialerna samma svar (flyttar man jord får man som vi vet andra nodpotentialer men spänningsfallen över komponenterna och strömmarna genom dem blir samma). Hursomhelst, vi samlar termerna:

$$\text{KCL-bd: } v_b\left(\frac{1}{R_2} - k_2 + \frac{1}{R_3}\right) + v_c\left(k_2 - \frac{1}{R_3}\right) + v_d\left(\frac{-k_1}{R_1R_2} + \frac{1}{R_1}\right) = 0 \tag{26}$$

$$\text{KCL-c: } v_b\left(k_2 - \frac{1}{R_3}\right) + v_c\left(-k_2 + \frac{1}{R_3}\right) = -I_1 \tag{27}$$

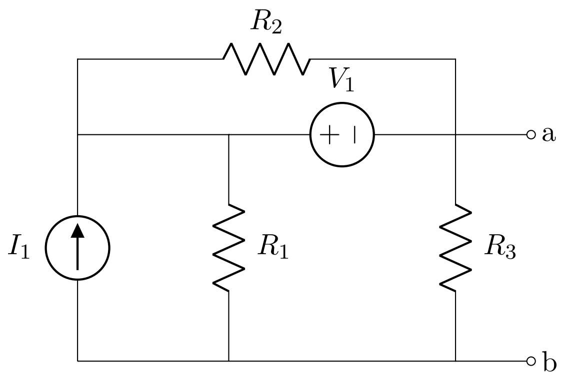
För att kunna lösa detta måste vi reducera det (från tre till två okända (två ekvationer)). Vi kan relatera b och d till varandra mha V_1 och en KVL vilket ger $v_b + V_1 = v_d$. Tillsammans med detta så har vi då två okända (b och c och vi kan forma två ekvationer (sen kan man få v_a och v_d hur resultaten):

$$\text{KCL-bd: } v_b\left(\frac{1}{R_2} - k_2 + \frac{1}{R_3}\right) + v_c\left(k_2 - \frac{1}{R_3}\right) + (v_b + V_1)\left(\frac{-k_1}{R_1R_2} + \frac{1}{R_1}\right) = 0 \rightarrow \tag{28}$$

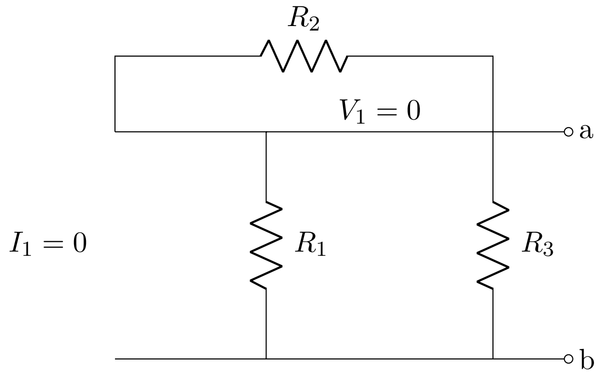
$$v_b\left(\frac{1}{R_2} - k_2 + \frac{1}{R_3} - \frac{k_1}{R_1R_2} + \frac{1}{R_1}\right) + v_c\left(k_2 - \frac{1}{R_3}\right) = -V_1\left(\frac{-k_1}{R_1R_2} + \frac{1}{R_1}\right) \tag{29}$$

$$\text{KCL-c: } v_b\left(k_2 - \frac{1}{R_3}\right) + v_c\left(-k_2 + \frac{1}{R_3}\right) = -I_1 \tag{30}$$

Uppgift 3 [6 p.]



(3a)
För att få R_{TH} här kan vi nollställa våra källor (eftersom vi bara har oberoende källor). Kretsen blir då:



Eftersom R_2 kortsluts så kommer R_{TH} vara resultatet av R_1 parallellkopplad med R_3, dvs.:

$$R_{TH} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} \tag{31}$$

För att få V_{TH} så kan vi här använda superposition och vi börjar med att nollställa V_1. Vi kommer då har R_2 kortsluten som tidigare och vi får (tänk på hur strömmen genom R_3 är riktad jämfört med I_1 för det är detta som ger tecknet på spänningsfallet):

$$V_{TH1} = I_1 \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} \tag{32}$$

Nu så nollställer vi I_1 varpå faktiskt R_2 igen blir obetydlig eftersom den sitter parallellt med V_1. En KVL ger oss:

$$-R_1 I - V_1 - R_3 I = 0 \rightarrow \tag{33}$$

$$V_{TH2} = R_3 \left(\frac{-V_1}{R_1 + R_3} \right) \tag{34}$$

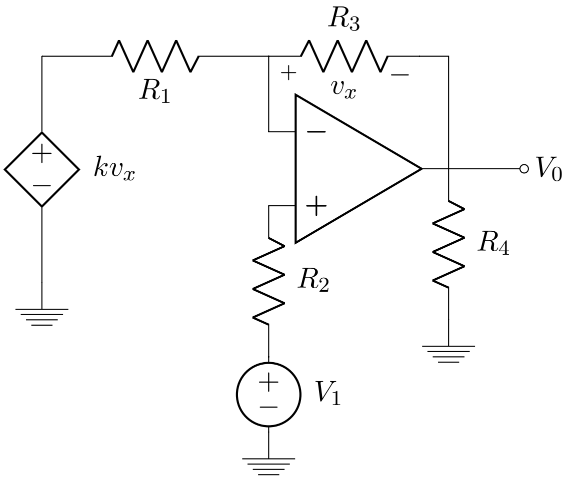
Nu så får vi då tillsist:

$$V_{TH} = V_{TH1} + V_{TH2} = I_1 \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} - R_3 \left(\frac{V_1}{R_1 + R_3} \right) \tag{35}$$

$$= \left(\frac{R_3}{R_1 + R_3} \right) (R_1 I_1 - V_1) \tag{36}$$

(3b)
Den maximala effekten man kan få i en resistor kopplad till $a - b$, får man när man använder sig av en resistans som har värdet R_{TH} och man får då effekten $P = \frac{V_{TH}^2}{4R_{TH}}$.

Uppgift 4 [5 p.]



Eftersom det inte går någon ström in i OP-ampen så blir det inget spänningsfall över R_2 och potentialen vid den icke-inverterande terminalen blir V_1 varpå vi får $v_+ = v_- = V_1$. Nodanalys vid den inverterande terminalen på OP-ampen ger oss nu (tillsammans med att $v_x = v_- - V_0 = V_1 - V_0$):

$$\frac{V_1 - kv_x}{R_1} + \frac{v_x}{R_3} = 0 \tag{37}$$

$$\frac{V_1 - k(V_1 - V_0)}{R_1} + \frac{(V_1 - V_0)}{R_3} = 0 \rightarrow \tag{38}$$

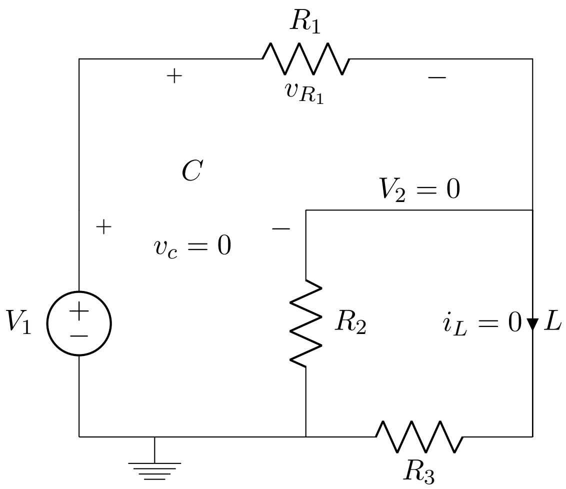
$$V_0 = V_1 \frac{(1-k)R_3 + R_1}{R_1 - kR_3} \tag{39}$$

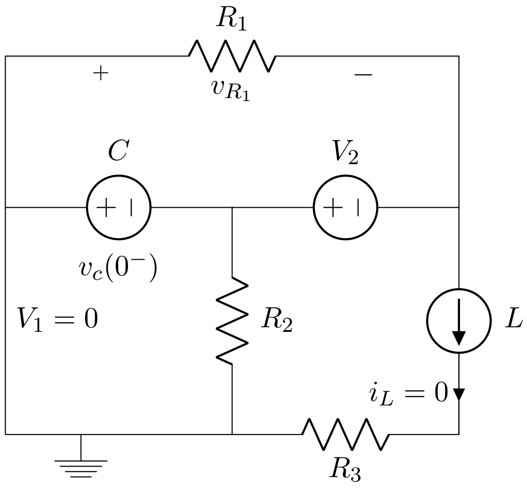
Om k är mycket litet kommer den beroende spänningskällan att ge ett obetydligt bidrag och vi kan se det som att R_1 är kopplad direkt till jord. Denna kretsen är en vanlig *icke-inverterande krets*. Man kan även få ur det ur ekvationen ovan genom att låta $k \approx 0 \rightarrow$

$$\frac{V_0}{V_1} \approx \frac{R_3 + R_1}{R_1} = 1 + \frac{R_3}{R_1} \tag{40}$$

Uppgift 5 [12 p.]

Vi väljer jord och får att vid $t = 0^-$ har vi en krets som befinner sig i jämviktsläge och den ser ut såsom till vänster. Vid $t = 0^+$ får vi en krets som ser ut som till höger.





(a) $v_L(0^-) = 0$ ty spolen beter sig som en kortslutning

(b) $i_c(0^-) = 0$ ty kondensatorn beter sig som en öppen krets

(c) $v_{R_2}(0^-) = v_{R_3}(0^-) = V_1 \frac{R_p}{R_p+R_1}$, ur spänningsdelning och där $R_p = \frac{R_2 R_3}{R_2+R_3}$

(d) $v_c(0^-) = V_1 - v_{R_3}(0^-)$ ur en KVL

(e) $i_L(0^-) = v_{R_3}(0^-)/R_3$

(f) $v_{R_1}(0^-) = v_c(0^-)$ ty de är parrallelkopplade

(g) $v_c(0^+) = v_c(0^-)$ ur spänningströghet

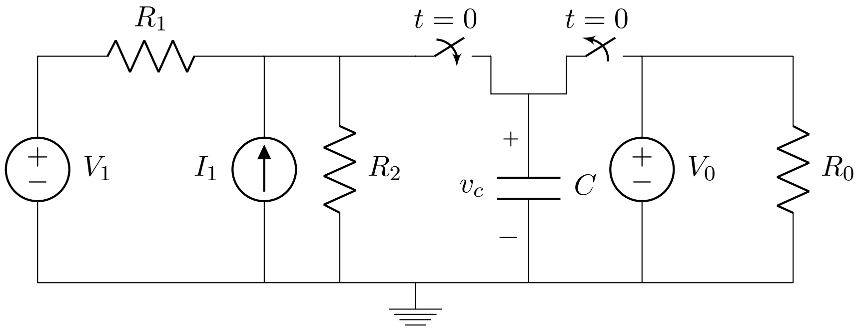
(h) $i_L(0^+) = i_L(0^-)$ ur strömtröghet

(i) $v_{R_1}(0^+) = V_2 + v_c(0^-)$ ur en KVL

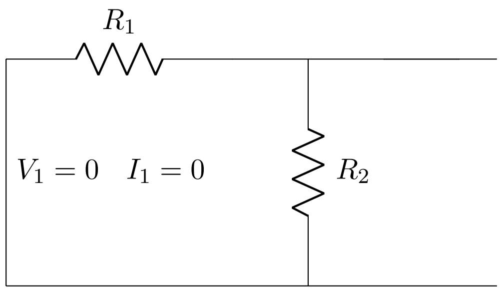
(j) Strömmen som lämnar plus terminalen på V_1 är $I = \frac{v_{R_1}(0^-)}{R_1} = \frac{V_1 - v_{R_3}(0^-)}{R_1}$ och vi får då med passiv teckenkonvention $P_{V_1}(0^-) = V_1(-I)$

(k) $P_{V_1}(0^+) = 0$ ty V_1 är nollställd.

Uppgift 6 [7 p.]



Vid $t = 0^-$ är kondensatorn kopplad till V_0 och har en spänning $v_c(0^-) = V_0$. Vid $t = 0^+$ kopplas kondensatorn till den delan av kretsen som är till vänster. Vi löser problemet genom att bestämma Thevenin ekvivalenten av denna delen av kretsen. Eftersom det bara finns oberoende källor i kretsen så kan vi nollställa dessa och vi får:



$$R_{TH} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \tag{41}$$

V_{TH} kan vi få om vi m.h.a nodanalys och vi får med en KCL:

$$\frac{V_{TH}}{R_2} + \frac{V_{TH} - V_1}{R_1} - I_1 = 0 \rightarrow \tag{42}$$

$$V_{TH}\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1}\right) = I_1 + \frac{V_1}{R_1} \rightarrow \tag{43}$$

$$V_{TH} = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2}\right)(R_1 I_1 + V_1) \tag{44}$$

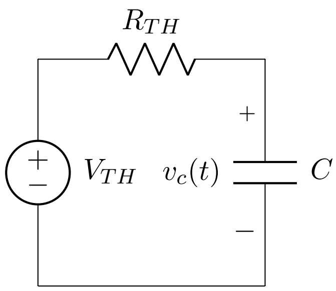
Alternativt:
V_{TH} kan vi få om vi med superposition genom att i tur och ordning nollställa källorna och se vad V_{TH} blir i de två fallen och sen summera resultaten:

$$V_1 = 0 : V_{TH1} = R_2 I_1 \frac{R_1}{R_1 + R_2}, \text{ m.h.a strömdelning för } I_{R_2} \tag{45}$$

$$I_1 = 0 : V_{TH2} = V_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2}, \text{ m.h.a spänningsdelning} \tag{46}$$

$$V_{TH} = V_{TH1} + V_{TH2} = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) (R_1 I_1 + V_1) \tag{47}$$

Nu har vi en krets som ser ut som:



Nu kan vi sätta upp differential ekvationen som kommer av en KVL runt kretsen:

$$+V_{TH} - I_c R_{TH} - v_c(t) = 0 \tag{48}$$

$$+V_{TH} - C \frac{dv_c(t)}{dt} R_{TH} - v_c(t) = 0 \tag{49}$$

$$\frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{v_c(t)}{CR_{TH}} = \frac{V_{TH}}{CR_{TH}} \tag{50}$$

$$\frac{dy}{dt} + ya = b \tag{51}$$

Detta löses av $y(t) = b/a + Ke^{-at}$, där $b/a = \frac{V_{TH}}{CR_{TH}} / \frac{1}{CR_{TH}} = V_{TH}$ och K fås ur initialvillkoren (att $v_c(0^-) = v_c(0^+) = V_0$):

$$v_c(0^-) = V_0 = V_{TH} + Ke^0 \rightarrow K = V_0 - V_{TH} \rightarrow \tag{52}$$

$$v_c(t) = V_{TH} + (V_0 - V_{TH}) e^{\left(-\frac{1}{CR_{TH}} t\right)} \tag{53}$$