KTH ei1110 Elkretsanalys (utökad kurs) CELTE, TEN1 2018-12-17 kl 08–13.

Hjälpmedel: Inga extra hjälpmedel är tillåtna.

Alla källor ska antas vara likströmskällor och beteckningar såsom V_0, I_1 etc. beskriver amplituden hos dessa. Om ingen annan information ges ska komponenter antas vara ideala. Angivna värden hos komponenter (t.ex. R för ett motstånd, V för en spänningskälla) ska antas vara kända storheter och andra markerade storheter (t.ex. strömmen genom, eller spänningen över, ett motstånd) ska antas vara okända storheter. Om inget annat framgår, antag stationärt tillstånd, dvs. lång tid efter att alla komponenter har kopplats ihop.
Några viktiga saker för att kunna få maximalt antal poäng:

- **Endast ett problem per sida** och text på baksidan kommer inte att beaktas.
- Tänk på att er handstil måste vara tydlig för att lösningen ska kunna bedömas. **Kan vi inte läsa, kan vi inte ge poäng!** Använd **inte rödpenna**.
- Lösningarna bör som oftast uttryckas i de kända storheterna och förenklas **innan** eventuella värden används. Därmed visas förståelse för problemet.
- **Ge alltid din krets** och var tydlig med diagram och definitioner av variabler. Tänk på hur du definierar polariteten och riktningen på de spänningar och strömmar du använder. **Använd passiv teckenkonvention**. Om det fattas figur med definierade variabler utsatta kan det bli **avdrag** vid tvetydighet.
- Därtill, dela tiden mellan talen och kontrollera svarens rimlighet genom t.ex. dimensionsanalys eller alternativ lösningsmetod.

Betygsgränserna är: 50% (E), 60% (D), 70% (C), 80% (B), 90% (A).
För (Fx) krävs $> 45\%$ samt att inte mer än ett tal har poängen x sådan att $0 < x < 50\%$.
(Med detta menas att för att få Fx får endast ett tal dra ner resultatet under godkänt.)

Examinator: Daniel Månsson (08 790 9044)

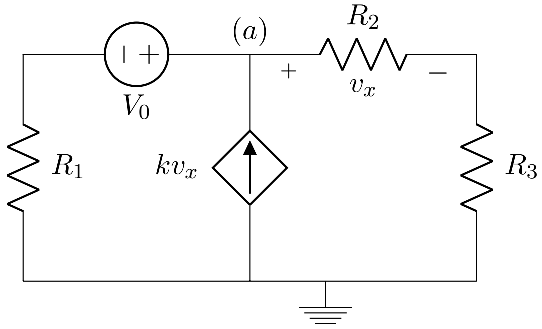
Lycka till och ta det lugnt!

Uppgift 1 [12 p.]

För kretsen nedan, uttryckt i de kända storheterna[1]:

(a) [7 p.] Bestäm v_a. Antag att $k = 1$ samt att alla resistanserna har värdet $R = 1\Omega$. *Lösningen ska uttryckas i de kända storheterna och förenklas* ***innan*** *eventuella värden används. Därmed visas förståelse för problemet.*

(b) [5 p.] Beräkna effekten som utvecklas i varje komponent och visa att summan av dessa är noll (dvs. att $\sum P = 0$). Du *måste* använda passiv teckenkonvention och vara tydlig med hur dina strömmar och spänningar definierades.



——————————lösningsförslag——————————

(a)
Spänningen i noden mellan R_1 och V_0 är $v' = v_a - V_0$. Det är samma ström som går genom R_2 som genom R_3 och denna kan fås ur spänningsfallet över R_2 dvs $i' = v_x/R_2$. (Notera skillnaden i att v_a är en nodpotential och v_x är ett spänningsfall (dvs. skillnaden mellan två nodpotentialer).) Vi använder nu dessa:

$$\text{KCL-a: } \frac{(v_a - V_0) - 0}{R_1} - kv_x + \frac{v_x}{R_2} \tag{1}$$

$$\text{KVL: } 0 + v_a - v_x - R_3\frac{v_x}{R_2} \rightarrow \tag{2}$$

$$v_x = v_a\frac{R_2}{R_2 + R_3} \tag{3}$$

$$\rightarrow$$

$$v_a\left(\frac{1}{R_1} - \frac{kR_2}{R_2 + R_3} + \frac{1}{R_2}\frac{R_2}{R_2 + R_3}\right) = \frac{V_0}{R_1} \tag{4}$$

Nu sätter vi in $R_i = 1\Omega, \forall i$ och $k = 1$:

$$\rightarrow v_a\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = V_0 \rightarrow v_a = V_0 \tag{5}$$

[1] Se framsidan för vilka dessa kan vara.

(b)
Ur ovan kan vi få $v_x = v_a \frac{R_2}{R_2+R_3} = V_0 \frac{1}{2}$ vilket vi använder oss av. Vi använder passiv teckenkonvention, dvs vi sätter ett minustecken framför strömmen om den *lämnar* "+" terminalen av vårt definierade spänningsfall. De olika effekterna blir med värden ovan ($R_i = 1$ och $k = 1$):

$$P_{R_1} = v_{R_1} i_{R_1} = v' \frac{v'}{R_1} = ((v_a - V_0) - 0) \frac{(v_a - V_0) - 0}{R_1} = 0 \tag{6}$$

$$P_{V_0} = V_0 i_{R_1} = V_0 \frac{(v_a - V_0) - 0}{R_1} = 0 \tag{7}$$

$$P_{kv_x} = v_a(-i_{kv_x}) = V_0(-kv_x) = V_0 \left(-k \frac{V_0}{2}\right) = -\frac{V_0^2}{2} \tag{8}$$

$$P_{R_2} = \frac{v_x^2}{R_2} = V_0^2 \frac{1}{4} \tag{9}$$

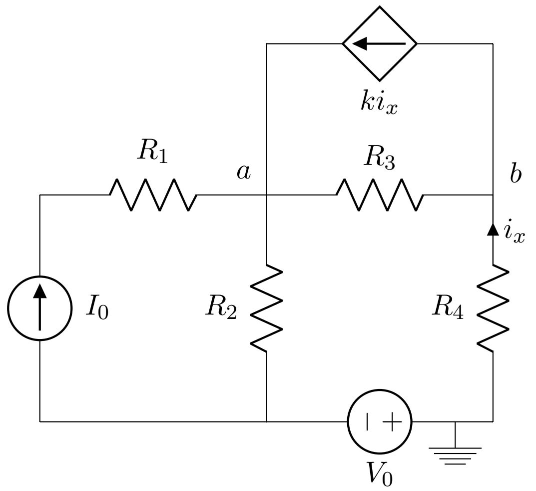
$$P_{R_3} = v_{R_3} i_{R_3} = R_3 i_{R_3}^2 = R_3 \left(\frac{v_x}{R_2}\right)^2 = V_0^2 \frac{1}{4} \tag{10}$$

$$\sum P = P_{R_1} + P_{V_0} + P_{kv_x} + P_{R_2} + P_{R_3} = 0 + 0 - \frac{V_0^2}{2} + V_0^2 \frac{1}{4} + V_0^2 \frac{1}{4} = 0 \tag{11}$$

Q.E.D

Uppgift 2 [6p.]

För kretsen nedan, ställ upp nodekvationerna (där termerna är samlade) för de angivna noderna. Du behöver inte lösa ekvationssystemet men det ska endast innehålla de kända storheterna samt de givna nodpotentialerna.



——————————lösningsförslag——————————

$$\text{KVL: } 0 - i_x R_4 - v_b = 0 \rightarrow i_x = -\frac{v_b}{R_4} \tag{12}$$

$$\text{KVL: } 0 - V_0 + v_{R_2} - v_a = 0 \tag{13}$$

v_{R_2} är spänningen över R_2 då strömmen går ner från v_a till "$-$" terminalen av V_0. Strömmen som lämnar v_a ner genom R_2 blir $i_{R_2} = v_{R_2}/R_2 = \frac{V_0+v_a}{R_2}$. Alternativt, $i_{R_2} = \frac{v_a-(-V_0)}{R_2}$.

$$\text{KCL-a: } \frac{V_0 + v_a}{R_2} + \frac{v_a - v_b}{R_3} - I_0 - k i_x = 0 \tag{14}$$

$$\text{KCL-b: } \frac{v_b - v_a}{R_3} + k i_x - i_x = 0 \tag{15}$$

3 okända och 3 ekvationer. Om vi sätter in $i_x = -v_b/R_4$ och samlar termerna får vi:

$$\text{KCL-a: } v_a\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) + v_b\left(\frac{-1}{R_3} + \frac{k}{R_4}\right) = I_0 - V_0\frac{1}{R_2} \tag{16}$$

$$\text{KCL-b: } v_a\left(\frac{-1}{R_3}\right) + v_b\left(\frac{1}{R_3} - \frac{k}{R_4} + \frac{1}{R_4}\right) = 0 \tag{17}$$

Uppgift 3 [8 p.]

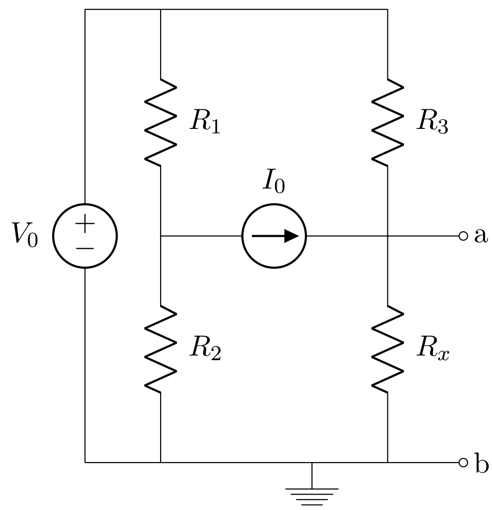
Om, för kretsen nedan, sett in i kretsen vid porten "$a - b$", $R_{TH} = 1$ [Ω], $R_{1,2,3} = 5$ [Ω], $V_0 = 1$ [V] samt $I_0 = 1$ [A] bestäm:

(a) [2 p.] R_x

(b) [5 p.] V_{TH}

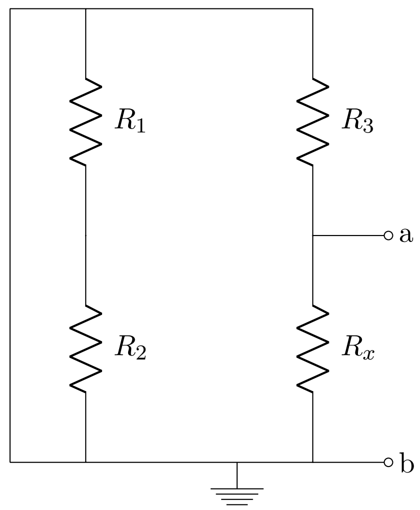
(c) [1 p.] Effekten som utvecklas i R_{TH}, kopplad till porten.

Lösningarna ska uttryckas i de kända storheterna och förenklas ***innan*** *eventuella värden används. Därmed visas förståelse för problemen.*



lösningsförslag

a)



För att bestämma R_{TH} nollställer vi källorna (eftersom de båda är oberoende här) och ser då att R_1 och R_2 kortsluts samt att R_3 blir parrallelkopplad med R_x ty de delar båda sina noder.

$$R_{TH} = \frac{R_3 R_x}{R_3 + R_x} \tag{18}$$

Om $R_{TH} = 1$ och $R_3 = 5 \rightarrow \frac{R_3 R_x}{R_3 + R_x} = 1 \rightarrow R_x = \frac{R_3}{R_3 - 1} = \frac{5}{4}\Omega$.

(b)

c Vi använder oss av superposition och börjar med att nollställa V_0. En KCL i "a" ger oss då:

$$\frac{v_a - 0}{R_x} + \frac{v_a - 0}{R_3} - I_0 = 0 \rightarrow \tag{19}$$

$$v_a = I_0 \frac{R_x R_3}{R_x + R_3} = V_{TH1} \tag{20}$$

Nu nollställer vi I_0. En KVL ger oss:

$$0 + V_0 - IR_3 - IR_x = 0 \rightarrow I = V_0 \frac{1}{R_3 + R_x} \rightarrow \tag{21}$$

$$v_a = IR_x = V_0 \frac{R_x}{R_x + R_3} = V_{TH2} \tag{22}$$

Vi får nu: $V_{TH} = V_{TH1} + V_{TH2} = I_0 \frac{R_x R_3}{R_x + R_3} + V_0 \frac{R_x}{R_x + R_3}$.

Alternativt gör vi en nodanalys direkt i nod a, vilket ger oss:

$$-I_0 + \frac{v_a - V_0}{R_3} + \frac{v_a - 0}{R_x} = 0 \rightarrow \tag{23}$$

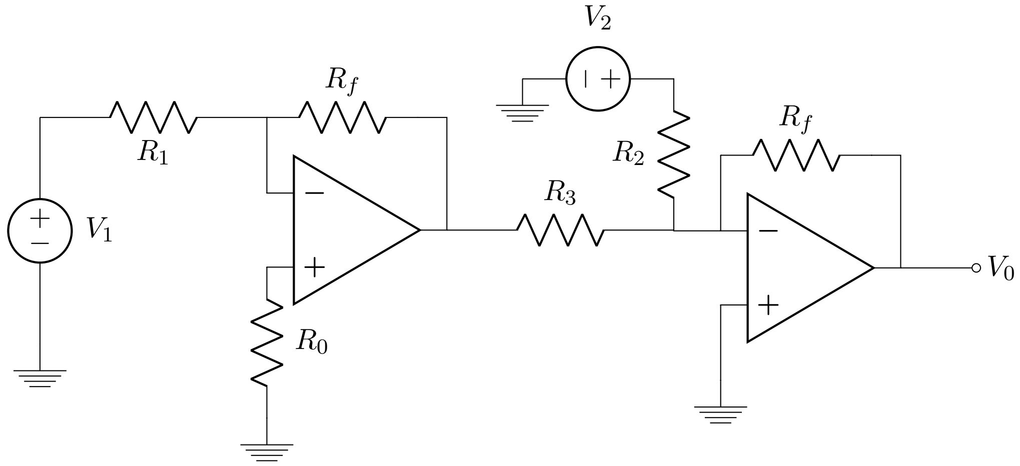
$$v_a \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_x} \right) = I_0 + \frac{V_0}{R_3} \rightarrow \tag{24}$$

$$v_a = V_{TH} = I_0 \frac{R_x R_3}{R_3 + R_x} + V_0 \frac{R_x}{R_3 + R_x} \tag{25}$$

(c)
Om vi kopplar en resistans med värdet R_{TH} till porten så får vi en ström i kretsen såsom $I = \frac{V_{TH}}{2R_{RTH}}$ och effekten i resistansen kopplad till porten blir $P_{TH} = I^2 R_{TH} = \frac{V_{TH}^2}{4R_{TH}}$.

Uppgift 4 [5 p.]

Bestäm, för kretsen nedan, V_0 som funktion av de kända storheterna och visa, genom dimensionsanalys, att uttrycket kan stämma.



——————————lösningsförslag——————————

(a)
Vi börjar med en KCL i noden som tillhör den inverterande ingången på den vänstra operationsförstärkaren samt benämner noden som tillhör utgången på den vänstra operationsförstärkaren såsom ”a”.

$$\frac{0 - v_a}{R_f} + \frac{0 - V_1}{R_1} = 0 \rightarrow \tag{26}$$

$$v_a = -V_1 \frac{R_f}{R_1} \tag{27}$$

En KCL i noden till den högra operationsförstärkarens inverterande ingång blir:

$$\frac{0 - v_a}{R_3} + \frac{0 - V_2}{R_2} + \frac{0 - V_0}{R_f} = 0 \rightarrow \tag{28}$$

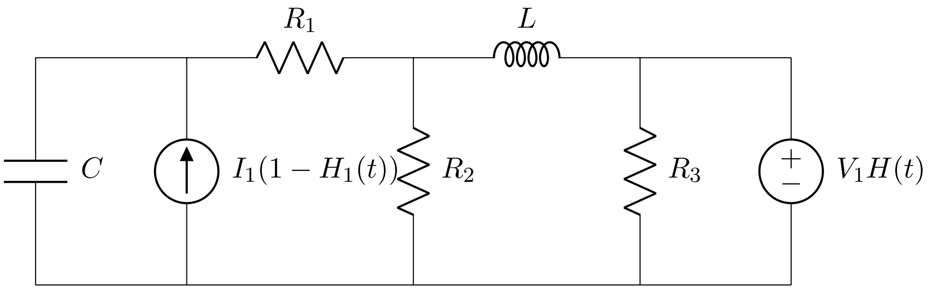
$$V_1 \frac{R_f}{R_1 R_3} - V_2 \frac{1}{R_2} = V_0 \frac{1}{R_f} \rightarrow \tag{29}$$

$$V_0 = V_1 \frac{R_f^2}{R_1 R_3} - V_2 \frac{R_f}{R_2} \tag{30}$$

Dimensionsanalys ger oss:

$$[V] = [V]\frac{[\Omega]^2}{[\Omega][\Omega]} + [V]\frac{[\Omega]}{[\Omega]} = [V] \rightarrow Ok. \tag{31}$$

Uppgift 5 [8 p.]



Kretsen ovan befinner sig i jämviktstillstånd men vid $t = 0$ nollställs[2] I_1 och V_1 slås på[3]. Bestäm, som funktion av de kända storheterna:

(a) [1 p.] $P_L(0^-)$

(b) [1 p.] $P_C(0^-)$

(c) [1 p.] $v_C(0^-)$

(d) [1 p.] $i_L(0^-)$

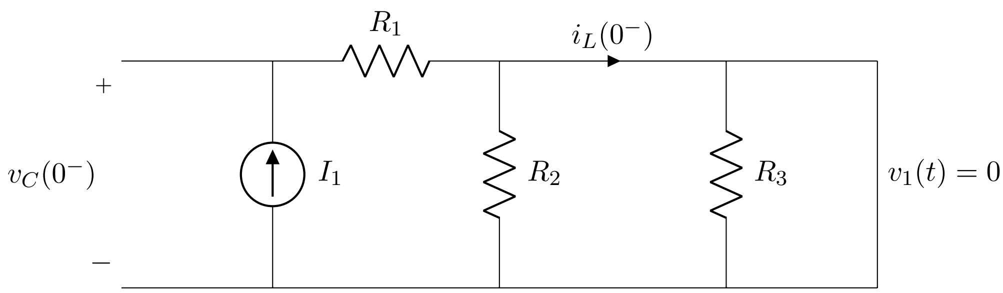
(e) [1 p.] $v_{R_3}(0^-)$

(f) [1 p.] $v_{R_3}(0^+)$

(g) [1 p.] $v_C(0^+)$

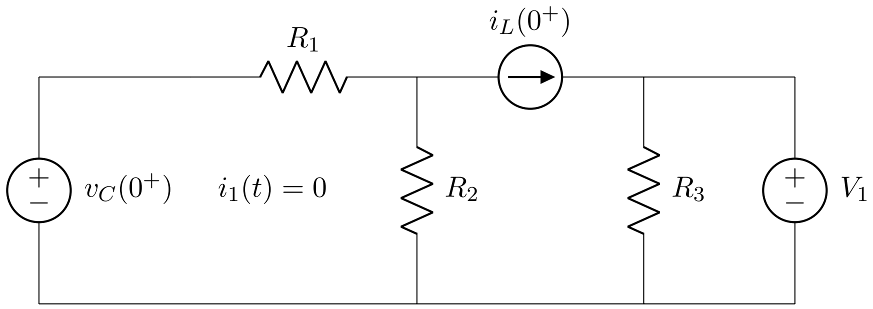
(h) [1 p.] $i_L(0^+)$

——————————lösningsförslag——————————



$t = 0^-$:

[2]Dvs. $i_1(t) = I_1(1 - H(t))$, där $H(t)$ är Heavisides stegfunktion vid $t = 0$.
[3]Dvs. $v_1(t) = V_1H(t)$, där $H(t)$ är Heavisides stegfunktion vid $t = 0$.



$t = 0^+$:

(a) $P_L(0^-) = 0$, ty $v_L(0^-) = 0$

(b) $P_C(0^-) = 0$, ty $i_C(0^-) = 0$

(c) $i_L(0^-) = I_1$, ty R_2 och R_3 är kortslutna (det går ingen ström genom dem) när $v_1(t) = V_1 H(t)$ är nollställd (det är ju inget spänningsfall över dem då).

(d) $v_C(0^-) = I_1 R_1$

(e) $v_{R_3}(0^-) = 0$

(f) $v_{R_3}(0^+) = V_1$

(g) $v_C(0^+) = v_C(0^-) = I_1 R_1$

(h) $i_L(0^+) = i_L(0^-) = I_1$

Uppgift 6 [6 p.]

Troligen april, 2047.
En mulen och blåsig morgon var Ingenjören på färd genom den sorgsna grå betong*djungeln*; resterna av Östermalm. Eller, i alla fall vad som var kvar av den efter att mördartulpanerna[4] hade tagit över och förvandlat det moderna samhället (med Teslas, Raspberry Pis, gymkort med RFID tags, IoT och kvasiintelligenta Nespressobryggare) till skrot, mull och grön-brun grönska. Och allt avspeglat mot en canvas av brusten asfalt och gråtunga skyar. Trots det hade Ingenjören ändå, eller i alla fall försökte ha, ett gladlynt och, om inte optimistiskt sinneslag, i alla fall sobert, trots avsaknaden av livets LED belysta glädjeämne.
Ingenjören tog sig mödosamt, men säkert, fram mellan vraken av elscooters och allestädes slingrande rötter och buskage, när något bland ruinerna i ögonvrån plötsligt drog sig

[4] Ej att förväxla med Triffiderna. Dem klarade vi av.

uppmärksamheten till sig. En skärm. En skärm? En skärm! Som lyste! Utan vidare tanke, satte Ingenjören fart över bråten och växter bara för att stanna med hjärtat i halsgropen framför en väldig hög av plåt dold av ett jätteexemplar av Elefantöra[5]. Skärmen, som satt inbäddad i ett större skal, var i sin tur del av en väldig sektion, som i sin tur inhystes i den enorma torson hos en gigantisk mekaniserad, allterräng, soprobot. Soprobotarna, som precis introducerats efter *Carnivorous Tulipas* uppkomst, kunde låta en förare snabbt och luktfritt tömma sopor från tryggheten av en mysig hytt. En hytt som nu lockade i och med att soproboten var, enligt statusutskriften på skärmen, fullt fungerande.

Det fanns bara ett problem. I sin iver att bygga den mest dåndimpande supersoparen på marknaden hade designern helt enkelt glömt bort att inkludera en nyckel men som en sista åtgärd att rädda innovationen hade företaget inkluderat en öppen elektrisk port i chassit. Dvs., en tvåpol (aktiv och linjär) där den ena terminalen var referens[6]. Hyttdörren lät sig sedan öppnas genom att man mellan portens terminaler kopplade en spole av rätt induktans (L_0) och soprobotens skräpdator[7] undersökte detta genom att mäta om en ström, $i_L(t)$, genom spolen växte, från noll, till ett värde av 1 [A] på 1 [ms]. Ingenjören rotade snabbt igenom sin ryggsäck och fann sin voltmeter, amperemeter (som mäter strömmen genom en ledning) och en stor rulle med koppartråd[8]. Ingenjören tänkte efter lite och uppskattade snabbt och lätt[9] hur mycket tråd som behövde lindas runt en pinne för att få en spole med en given induktansen men tyvärr var L_0 inte känd. *Hjälp Ingenjören att hitta rätt L_0 genom visa hur man kan erhålla $i_L(t)$ (du kan anta att Ingenjören kan lösa ut L_0 ur ett ev. slututtryck).*

——————————lösningsförslag——————————

Vi börjar med att anta att både voltmetern och amperemetern är ideala och mäter korrekt. Genom att först mäta den öppna spänningen i porten med voltmetern får man V_{TH}. Med en ledning kan den sedan kortslutas och I_{sc} erhålles med amperemetern. Då har vi en Theveninekvivalent av systemet $R_{TH} = V_{TH}/I_{sc}$. När vi kopplar in en spole får vi en krets såsom:

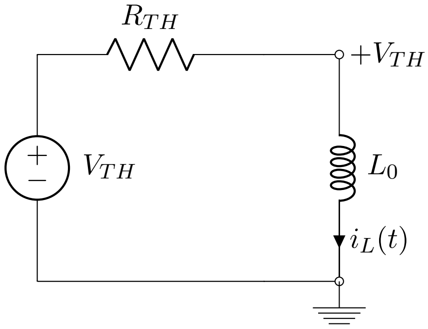
[5] Latin: *Pilea peperomioides*

[6] Dvs. jord.

[7] Ba Dum Tss.

[8] Dvs. en kopparledare.

[9] Med hårt förvärvade kunskaper från TET:en



Vi vet att spänningsfallet över spolen är: $v_L(t) = L_0 \frac{di_L(t)}{dt}$. En KVL ger oss:

$$+V_{TH} - i_L(t)R_{TH} - L_0 \frac{di_L(t)}{dt} = 0 \rightarrow \tag{32}$$

$$\frac{di_L(t)}{dt} + i_L(t)\frac{R_{TH}}{L_0} = \frac{V_{TH}}{L_0} \tag{33}$$

Denna ekvation för stegsvaret löses av (se föreläsningsanteckningar eller boken):

$$i_L(t) = \frac{V_{TH}}{R_{TH}} \left(1 - e^{\left(-t\frac{R_{TH}}{L_0}\right)}\right) \tag{34}$$

Vi antar att slutvärdet som strömmen går emot, dvs $\frac{V_{TH}}{R_{TH}} = I_{sc}$ eftersom spolen till sist kommer agera som en kortslutning, är större än 1 [A]. Om man sedan vet att $i_L(0.001) = 1$ kan man lösa ut L_0 eftersom vi har uppmätta värden på de andra storheterna.