KTH ei1110 Elkretsanalys (CELTE), tentamen (TEN2) 2019-06-07 kl 14–19.

Hjälpmedel: Inga extra hjälpmedel är tillåtna.

Alla källor ska antas vara tidsharmoniska växelströmskällor om inget annat explicit anges och beteckningar såsom V_0, I_1 etc. beskriver oftast amplituden hos dessa. Om ingen annan information ges ska komponenter antas vara ideala. Angivna värden hos komponenter (t.ex. R för ett motstånd, V för en spänningskälla) ska (om inget annat framgår) antas vara kända storheter och andra markerade storheter (t.ex. strömmen genom, eller spänningen över, ett motstånd) ska antas vara okända storheter. Antag **stationärt tillstånd**, dvs. lång tid efter alla komponenter har kopplats ihop.
Några viktiga saker för att kunna få maximalt antal poäng:

- **Endast ett problem per sida** och text på baksidan kommer inte att beaktas.
- Tänk på att er handstil måste vara tydlig för att lösningen ska kunna bedömas. **Kan vi inte läsa, kan vi inte ge poäng!** Använd **inte rödpenna**.
- Lösningarna bör som oftast uttryckas i de kända storheterna och förenklas **innan** eventuella värden används. Därmed visas förståelse för problemet.
- **Ge alltid din krets** och var tydlig med diagram och definitioner av variabler. Tänk på hur du definierar polariteten och riktningen på de spänningar och strömmar du använder. **Använd passiv teckenkonvention**. Om det fattas figur med definierade variabler utsatta kan det bli **avdrag** vid tvetydighet. Var noga med definitionen av impedanserna, t.ex. en spoles impedans är inte ”L”, detta kan ge avdrag.
- Därtill, dela tiden mellan talen och kontrollera svarens rimlighet genom t.ex. dimensionsanalys eller alternativ lösningsmetod.

Betygsgränserna är: 50% (E), 60% (D), 70% (C), 80% (B), 90% (A).
Ingen avrundning görs.
För (Fx) krävs $> 45\%$ samt att inte mer än ett tal har poängen x sådan att $0 < x < 50\%$.
(Med detta menas att för att få Fx får endast ett tal dra ner resultatet under godkänt.)

Examinator: Daniel Månsson (08 790 9044)

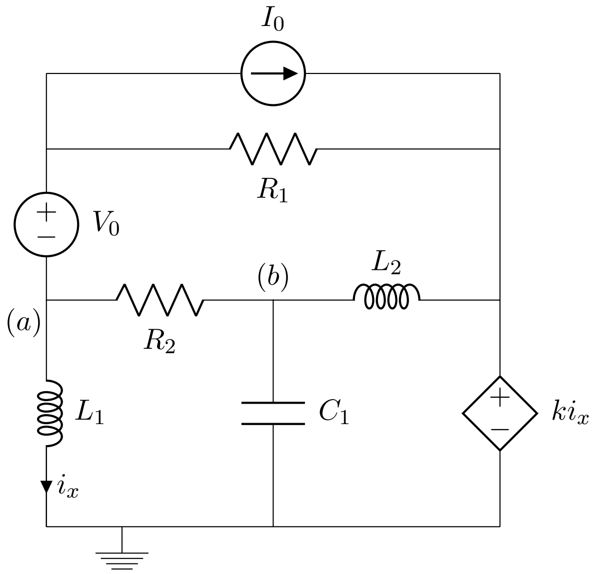
Lycka till och ta det lugnt!

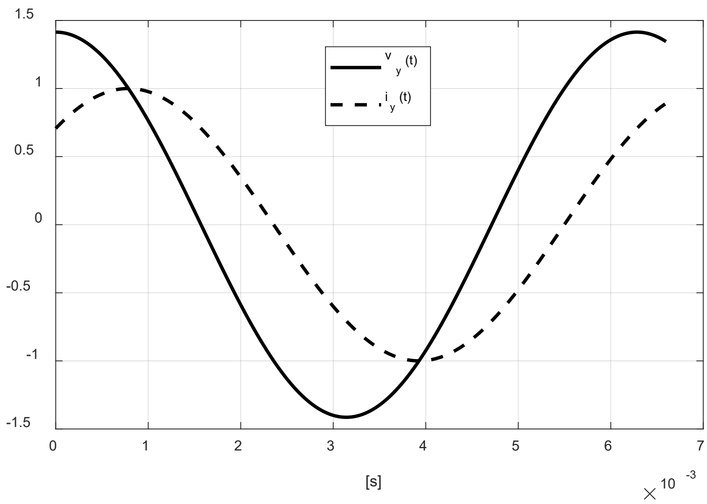
Uppgift 1 [11 p.]

(a) [7 p.] För kretsen här, ställ upp nodekvationerna för de markerade noderna uttryckt enbart i de kända storheterna och dessa nodpotentialer. I de slutgiltiga uttrycken ska termerna vara samlade och rimligt förenklade.

(b) [2 p.] Visa att ditt ekvationssystem är rimligt genom en dimensionsanalys.

(c) [2 p.] Bestäm, på kartesisk form, impedansen som ger följande två kurvor i grafen nedan där $v_y(t) = A_1 \cos(\omega t + \phi_1)$ och $i_y(t) = A_2 \cos(\omega t + \phi_2)$ avbildas.





Uppgift 1, $v_y(t)$ och $i_y(t)$.

Lösningsförslag

(1a)

Först så ser vi att $i_x = \frac{v_a}{j\omega L_1}$. Vi tittar sen först på nod b och gör en KCL där.

$$KCL_b\text{: } \frac{v_b - v_a}{R_2} + \frac{v_b - 0}{1/(j\omega C_1)} + \frac{v_b - k\frac{v_a}{j\omega L_1}}{j\omega L_2} = 0 \tag{1}$$

För nod a har vi en seriespänningskälla så vi kan lösa detta med en supernod men för tydligheten så definierar vi strömmen som går upp genom V_0 separat (vi kallar den i').

$$KCL_a\text{: } +i' + \frac{v_a - 0}{j\omega L_1} + \frac{v_a - v_b}{R_2} = 0 \tag{2}$$

Vi behöver ett utryck för i' nu och tittar på hur strömmarna summeras i noden ovanför V_0 som vi kallar "c":

$$-i' + \frac{v_c - k\frac{v_a}{j\omega L_1}}{R_1} + I_0 = 0 \tag{3}$$

Med en KVL från jord får vi att $0 + v_a + V_0 = v_c$ och om vi för samman allt får vi för nod a:

$$KCL_a\text{: } \frac{(v_a + V_0) - k\frac{v_a}{j\omega L_1}}{R_1} + I_0 + \frac{v_a - 0}{j\omega L_1} + \frac{v_a - v_b}{R_2} = 0 \tag{4}$$

Om vi nu samlar termerna för de två nodekvationerna får vi:

$$KCL_a\text{: } v_a\left(\frac{1}{R_1} - \frac{k}{j\omega L_1 R_1} + \frac{1}{j\omega L_1} + \frac{1}{R_2}\right) + v_b\left(\frac{-1}{R_2}\right) = -I_0 - \frac{V_0}{R_1} \tag{5}$$

$$KCL_b\text{: } v_a\left(-\frac{1}{R_2} - \frac{k}{j\omega L_1 j\omega L_2}\right) + v_b\left(\frac{1}{R_2} + j\omega C_1 + \frac{1}{j\omega L_2}\right) = 0 \tag{6}$$

(1b)
Dimensionsanalys ger oss, med att spänningskällan $ki_x \to k[\Omega]$:

$$KCL_a\text{: } [V]\left(\frac{1}{[\Omega]} + \frac{[\Omega]}{[\Omega][\Omega]} + \frac{1}{[\Omega]} + \frac{1}{[\Omega]}\right) + [V]\left(\frac{1}{[\Omega]}\right) = [A] + \frac{[V]}{[\Omega]} = [A], ok \tag{7}$$

$$KCL_b\text{: } [V]\left(\frac{1}{[\Omega]} + \frac{[\Omega]}{[\Omega][\Omega]}\right) + [V]\left(\frac{1}{[\Omega]} + 1/[\Omega] + \frac{1}{[\Omega]}\right) = [A], ok \tag{8}$$

(1c)
Vi ser att i grafen så når spänningen sitt toppvärde före strömmen så impedansen måste vara induktiv i sin natur (enligt minnesregeln "ELI the ICE man"). Ur grafen kan vi få att:

$$v_y(t) = A_1\cos(\omega t + \phi_1) = \sqrt{2}\cos(\omega t + 0) \tag{9}$$

$$i_y(t) = A_2\cos(\omega t + \phi_2) = 1\cos(\omega t - \pi/4) \tag{10}$$

Faktorn $-\pi/4$ fås enklast genom att dela in v_y i stegen 2π, π, $\pi/2$ och sen $\pi/4$. Därmed får vi att impedansen är:

$$Z_y = \frac{V_y}{I_y} = \frac{\sqrt{2}\angle 0}{1\angle -\pi/4} = \sqrt{2}\angle(0 - (-\pi/4)) = 1 + j \tag{11}$$

Uppgift 2 [9 p.]

För kretsen nedan:

(a) [1 p.] Visa att spänning över R är oberoende av kondensatorn.

(b) [1 p.] Beräkna spänningen över strömkällan.

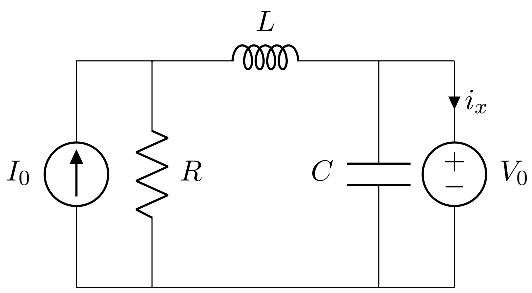
(c) [2 p.] Beräkna strömmen i_x.

(d) [2 p.] Beräkna den komplexa effekten som utvecklas i V_0.

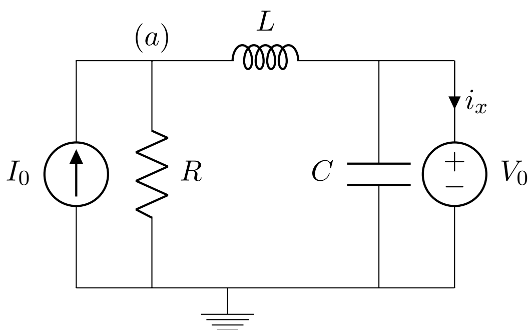
(e) [2 p.] Beräkna den komplexa effekten som utvecklas i I_0.

(f) [1 p.] Kommer källorna att leverera eller förbruka effekt?

Antag att $R = 1\ \Omega$, $\omega L = 1$, $\frac{1}{\omega C} = 1$ samt att $I_0 = 1\angle\pi/2$ och $V_0 = \sqrt{2}\angle\pi/4$ *men* ställ upp uttrycken i de kända storheterna och förenkla **innan** värden används. Därmed visas förståelse för problemet.



Lösningsförslag
(2a)



Spänningen över R, $V_R = v_a - 0$ fås ur (som är oberoende av C): $-I_0 + \frac{v_a - 0}{R} + \frac{v_a - V_0}{j\omega L} = 0$. Det beror på att V_0 är parallellkopplade över C så potentialen i den noden är fix.

(2b)
Vi har $I_0 = j$ och $V_0 = 1 + j$ så vi får:

$$-I_0 + \frac{v_a}{R} + \frac{v_a - V_0}{j\omega L} = 0 \rightarrow -j + \frac{v_a}{1} + \frac{v_a - (1+j)}{j} = 0 \rightarrow v_a = \frac{1}{2}(1+j) \tag{12}$$

(2c)
Strömmen i_x genom V_0 fås ur:

$$\frac{V_0 - v_a}{j\omega L} + \frac{V_0}{1/(j\omega C)} + i_x = 0 \rightarrow \tag{13}$$

$$\frac{(1+j) - \frac{1}{2}(1+j)}{j} + \frac{(1+j)}{-j} + i_x = 0 \rightarrow i_x = \frac{1}{2}(1-j) \tag{14}$$

(2d)
Med *passiv teckenkonvention* får vi, eftersom i_x går in i "+"-terminalen:

$$S_{V_0} = V_0 i_x^* = (1+j)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}j\right) = i \tag{15}$$

(2e)
Med *passiv teckenkonvention* får vi, eftersom I_0 lämnar i "+"-terminalen för v_a eftersom vi definierade v_a som vi gjorde i (2a):

$$S_{I_0} = V_a(-I_0)^* = \frac{1}{2}(1+j)(-(j)^*) = \frac{1}{2}(1+j)(-(-j)) = \frac{1}{2}(-1+j) \tag{16}$$

(2f)
Vi har från ovan:

$$S_{V_0} = P_{V_0} + jQ_{V_0} = j \tag{17}$$

$$\text{(endast absorberar/förbrukar reaktiv effekt)} \tag{18}$$

$$S_{I_0} = P_{I_0} + jQ_{I_0} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}j \tag{19}$$

$$\text{(levererar aktiv effekt och absorberar/förbrukar reaktiv effekt)} \tag{20}$$

Uppgift 3 [6 p.]

Troligen juni, 2047.
Plötsligt var den bara där! Ingenjören rundande gathörnet och hann inte mer än flyktigt uppfatta ett slingrande ormbo av tentakler och luftrötter innan en *Carnivorous*

Tulipas hade sänkt sina gifttaggar i armen. En isande, bitande smärta sköt upp mot axeln och för ett hjärtslag hann Ingenjören tänka *"Nämen, va fan"* innan växten släppte taget igen och drog sig avvaktande bort några meter. Ingenjören kände inget nu men visste att nu var goda råd dyra. Giftet var inte snabbverkande men likt bettet från de nu utöda taipan ormarna[1] var utgången som oftast inte en överraskning om såret inte behandlades. Ingenjören blängde ilsket på den svajande växten som lugnt väntade på att sitt byte snällt skulle kollapsa så att den kunde börja äta utan att bli störd av mat som sprattlade och försökte fly.
Ingenjören drog av sig ryggsäcken, slet fram sitt portabla fältsjukhus och körde hastigt ett finger i hålet för blodprovsanalys. Apparaten surrade och tystnade. *"Trasig?!"* tänkte Ingenjören och kände bröstet knytas ihop och paniken växa. Frenetiskt slog Ingenjören om analysen till att svepa över ett frekvensband för att erhålla giftets karakteristiskt spektrum som ger ledtrådar hur man skulle instruera fältsjukhuset att administrera motgiftet. Ett dovt pling hördes och på den enkla LCD skärmen rullade ett resultat sakta fram...

$$H(\omega) = \sqrt{10}\tfrac{(1+j\omega/20)(1+j\omega/4000)}{(1+j\omega/200)(1+j\omega/2000)}$$

Hjälp Ingenjören att administrera motgiftet genom att rita Bodediagrammet över förstärkningen av $H(\omega)$. Ange brytfrekvenser och värden på nivåer. Dessa ska vara någorlunda korrekta (dvs. de kan avvika lite från det verkliga värdet men det ska tydligt framgå hur de erhålls). Giftet från *Carnivorous Tulipas* är sådant att $|H(\omega)|$ måste vara inom intervallet $[5 : 50]$ dB för att kunna behandlas. Kommer Ingenjören att klara sig?

Lösningsförslag
(3)
Vi har två nollställen (20 samt 4000 rad/s) som ökar lutningen på $|H(\omega)|$ med +20dB/dekad och två poler (200 samt 2000 rad/s) som minskar lutningen på $|H(\omega)|$ med -20dB/dekad.

$$H = \sqrt{10}\frac{(1+j\frac{\omega}{20})(1+j\frac{\omega}{4000})}{(1+j\frac{\omega}{200})(1+j\frac{\omega}{2000})}$$

Vi utnyttjar approximationen:
$|1+\frac{j\omega}{\omega_i}| \approx 1$ om $\omega < \omega_i$
$|1+\frac{j\omega}{\omega_i}| \approx \frac{\omega}{\omega_i}$ om $\omega > \omega_i$.

[1] Oxyuranus scutellatus.

Vi gör detta stegvis för de fem frekvensområden som är intressanta och får:

$$|H(\omega < 20)| \approx \sqrt{10}\frac{1*1}{1*1} = \sqrt{10}, \text{ plan} \rightarrow \quad (21)$$

$$20 * log_{10}(\sqrt{10}) = 10dB \quad (22)$$

$$|H(20 < \omega < 200)| \approx \sqrt{10}\frac{\frac{\omega}{20}*1}{1*1} = \sqrt{10}\frac{1}{20}\omega, \text{ uppåt sluttande} \quad (23)$$

$$|H(200 < \omega < 2000)| \approx \sqrt{10}\frac{\frac{\omega}{20}*1}{\frac{\omega}{200}*1} = \sqrt{10}\frac{200}{20}, \text{ plan} \rightarrow \quad (24)$$

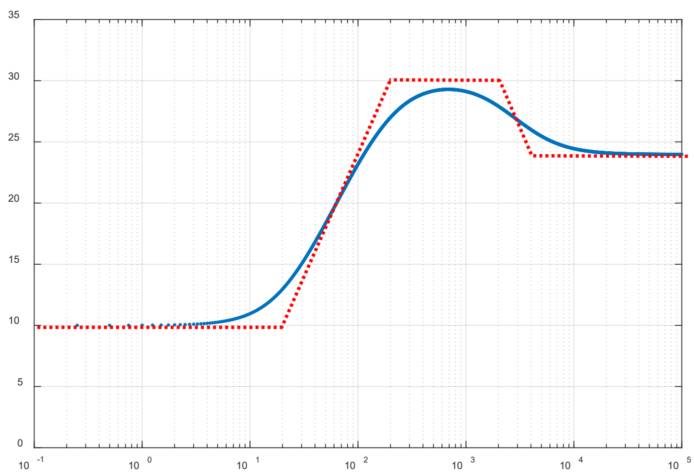
$$20 * log_{10}(\sqrt{10}\frac{200}{20}) = 30dB \quad (25)$$

$$|H(2000 < \omega < 4000)| \approx \sqrt{10}\frac{\frac{\omega}{20}*1}{\frac{\omega}{200}\frac{\omega}{2000}} = \sqrt{10}\frac{200*2000}{20}\frac{1}{\omega}, \text{ nedåt sluttande} \quad (26)$$

$$|H(4000 < \omega| \approx \sqrt{10}\frac{\frac{\omega}{20}\frac{\omega}{4000}}{\frac{\omega}{200}\frac{\omega}{2000}} = \sqrt{10}\frac{200*2000}{20*4000}, \text{ plan} \rightarrow \quad (27)$$

$$20 * log_{10}(\sqrt{10}\frac{200*2000}{20*4000}) = 20 * log_{10}(\sqrt{10}*5) \approx 24dB \quad (28)$$

Det är bara två områden där $|H|$ är explicit beroende av vinkelfrekvensen ω, dvs som inte är konstanta i sitt intervall. Om man tar $20log_{10}(...)$ av nivåerna så får man värden och vi vet att nollställena och polerna ändrar lutningen med +20 respektive -20 dB/dekad. Vi får diagrammet:

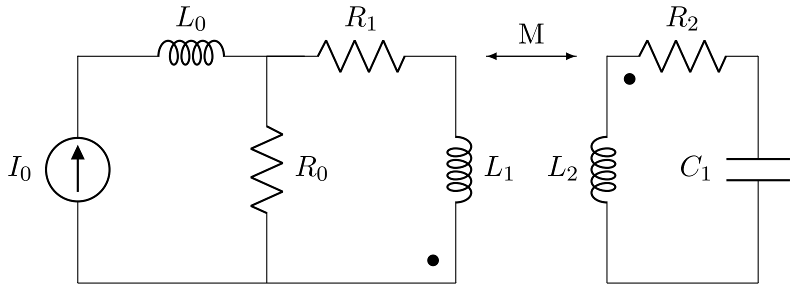


Uppgift 3, $|H(\omega)|$. Som vi ser så är 5 dB $< |H(\omega)| <$ 50 dB. (Den smala heldragna linjen mellan 2 krad/s och 20 krad/s visar -20dB/dekad)

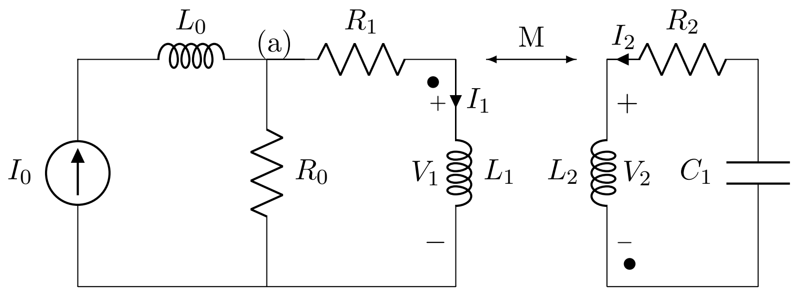
Ingenjören överlever.

Uppgift 4 [8 p.]

Nedan finns en krets i vilken en känd generator (I_0, L_0 och R_0) är kopplad till en känd last (C_1) genom en transformator. Antag en generell transformator (du antas veta R_1, R_2, L_1, L_2 och M).
Ställa upp nödvändiga ekvationssystem/relationer som behövs lösas och visa tydligt hur de ska användas för att beräkna de aktiva effekterna som utvecklas i L_1 och L_2.
Du måste tydligt visa, och i ord beskriva, din plan för hur problemet ska lösas för att få poäng.



Lösningsförslag
(4a)



Vi behöver veta strömmarna som går genom L_1 och L_2.
Vi börjar med att definiera nodspänningen V_a, spänningsfallen V_1 och V_2 samt strömmarna I_1, I_2 i kretsen. Det är viktigt att man får sin polaritet på spänningsfallen rätt jämfört med hur strömmarna är riktade genom lindningarna. Vi börjar med att göra en KCL vid noden a:

$$-I_0 + \frac{V_a}{R_0} + I_1 = 0 \Leftrightarrow V_a = (I_0 - I_1)\, R_0 \tag{29}$$

Vi gör sedan en spänningsvandring (KVL) runt maskan med L_1:

$$+V_a - I_1 R_1 - V_1 = 0 \rightarrow (I_0 - I_1)\, R_0 - I_1 R_1 - V_1 = 0 \tag{30}$$

Vi behöver veta V_1 också.
Eftersom prickarna som indikerar hur lindningarna på transformatorns spolar är gjorda (alternativt hur spolarna är riktade) är placerade som de är så kommer vi att få destruktiv interferens i flödena (och vi får därför minustecknen nedan):

$$V_1 = j\omega L_1 I_1 - j\omega M I_2 \tag{31}$$
$$V_2 = j\omega L_2 I_2 - j\omega M I_1 \tag{32}$$

Vi kan sätta in uttrycket för V_1 i uttrycket från spänningsvandringen och då får vi:

$$-I_1\left(R_0 + R_1\right) + I_0 R_0 = V_1 = j\omega L_1 I_1 - j\omega M I_2 \Leftrightarrow \tag{33}$$
$$-I_1\left(R_0 + R_1 + j\omega L_1\right) + j\omega M I_2 = -I_0 R_0 \tag{34}$$

Nu har vi en ekvation och två okända och lämnar primärsidan av transformatorn ett tag och vi gör en spänningsvandring (KVL) runt maskan med L_2 som ger med V_2 sen insatt:

$$-I_2\frac{1}{j\omega C_1} - I_2 R_2 - V_2 = 0 \rightarrow \tag{35}$$
$$-I_2\frac{1}{j\omega C_1} - I_2 R_2 - \left(j\omega L_2 I_2 - j\omega M I_1\right) = 0 \Leftrightarrow \tag{36}$$
$$I_1 j\omega M - I_2\left(\frac{1}{j\omega C_1} + R_2 + j\omega L_2\right) = 0 \tag{37}$$

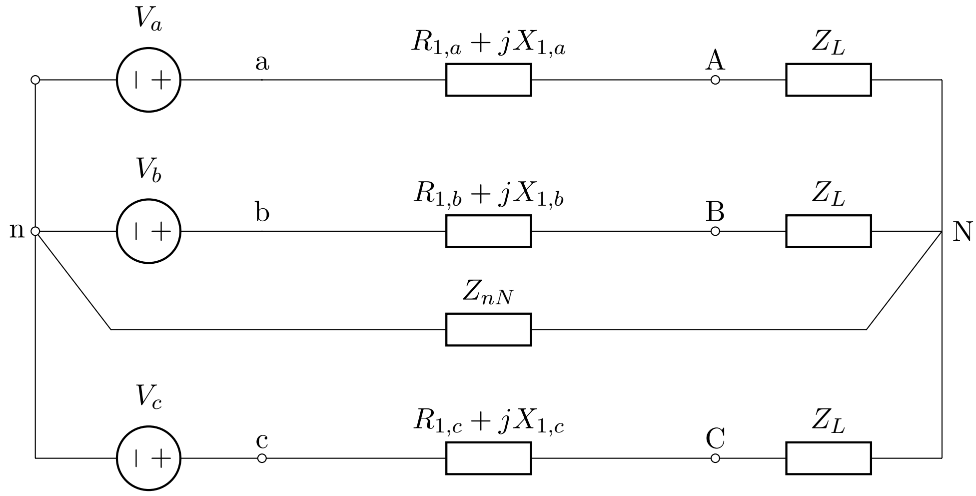
Vi har nu ett ekvationssystem i kända storheter (impedanserna och I_0) och med de okända strömmarna I_1 och I_2 som vi kan lösa. Därmed kan vi få strömmarna genom L_1 och L_2 och de aktiva effekterna, P_i ur $S_i = P_i + jQ_i$, som utvecklas däri:

$$P_{Z_{L_1}} = Re\{V_{L_1} I_1^*\} = Re\{j\omega L_1 I_1 I_1^*\} \tag{38}$$
$$P_{Z_{L_2}} = Re\{V_{L_2} I_2^*\} = Re\{j\omega L_2 I_2 I_2^*\} \tag{39}$$

Notera att det är *passiv teckenkonvention* som används och strömmen går in i ”+”terminalerna av spänningsfallen som vi definierade.

Uppgift 5 [4 p.]

Ge de korrekta svaren på flervalsfrågorna. Endast <u>ett</u> svar på varje fråga är rätt och ingen motivering behövs.



1. [1 p.] Vilket alternativ representerar en balanserad trefaskälla (cosinus som referens och abc sekvens)?

   (a) $V_a = 3$, $V_b = \sqrt{9}\cos(\omega t + 120°)$, $V_c = \sqrt{9}\angle 0°$
   (b) $V_a = 1 + j$, $V_b = \sqrt{2}\cos(\omega t - 75°)$, $V_c = \sqrt{2}\angle 165°$
   (c) $V_a = 2\angle 0°$, $V_b = \sqrt{4}\angle - 120°$, $V_c = \sqrt{2}\cos(\omega t + 120°)$
   (d) inget av ovan

2. [1 p.] I ett balanserat trefassystemet (som ovan) där en aktiv effekt P levereras till trefaslasten, hur mycket förbrukar då varje impedans i lastens faser?

   (a) P
   (b) $P/3$
   (c) $\sqrt{3}P$
   (d) $P/\sqrt{3}$

3. [1 p.] Vad är magnituden på det spänningsfall som Z_{nN} orsakar i ett balanserat trefassystem?

   (a) $\propto arg(R_{1,a} + X_{1,a} + Z_L)$
   (b) $I_{1,a} + I_{1,b} + I_{1,c}$
   (c) $\propto |V_a| = |V_b| = |V_c|$
   (d) $\propto arg(Z_{nN})$

4. [1 p.] Om, i ett balanserat trefassystem, förskjutningen mellan argumenten hos trefaskällans faser är $\pm 2\pi/3$ vad är då förskjutningen mellan argumenten hos strömmarna (dvs. linjeströmmarna) i faserna?

   (a) $\pm 30°$
   (b) $\pm 120°$
   (c) $0°$

(d) ingen av ovan

Lösningsförslag
(5)
b,b,b,b