KTH ei1110 Elkretsanalys (utökad kurs) CELTE, tentamen TEN1 2019-10-25 kl 08–13.

Hjälpmedel: Inga extra hjälpmedel är tillåtna.

Alla källor ska antas vara likströmskällor och beteckningar såsom V_0, I_1 etc. beskriver amplituden hos dessa. Om ingen annan information ges ska komponenter antas vara ideala. Angivna värden hos komponenter (t.ex. R för ett motstånd, V för en spänningskälla) ska antas vara kända storheter och andra markerade storheter (t.ex. strömmen genom, eller spänningen över, ett motstånd) ska antas vara okända storheter. Om inget annat framgår, antag stationärt tillstånd, dvs. lång tid efter att alla komponenter har kopplats ihop.
Några viktiga saker för att kunna få maximalt antal poäng:

- **Endast ett problem per sida** och text på baksidan kommer inte att beaktas.
- Tänk på att er handstil måste vara tydlig för att lösningen ska kunna bedömas. **Kan vi inte läsa, kan vi inte ge poäng!** Använd **inte rödpenna**.
- Lösningarna bör som oftast uttryckas i de kända storheterna och förenklas **innan** eventuella värden används. Därmed visas förståelse för problemet.
- **Ge alltid din krets** och var tydlig med diagram och definitioner av variabler. Tänk på hur du definierar polariteten och riktningen på de spänningar och strömmar du använder. **Använd passiv teckenkonvention**. Om det fattas figur med definierade variabler utsatta kan det bli **avdrag** vid tvetydighet.
- Därtill, dela tiden mellan talen och kontrollera svarens rimlighet genom t.ex. dimensionsanalys eller alternativ lösningsmetod.

Betygsgränserna är: 50% (E), 60% (D), 70% (C), 80% (B), 90% (A).
För (Fx) krävs $> 45\%$ samt att inte mer än ett tal har poängen x sådan att $0 < x < 50\%$. (Med detta menas att för att få Fx får endast ett tal dra ner resultatet under godkänt.)

Examinator: Daniel Månsson (08 790 9044)

Lycka till och ta det lugnt!

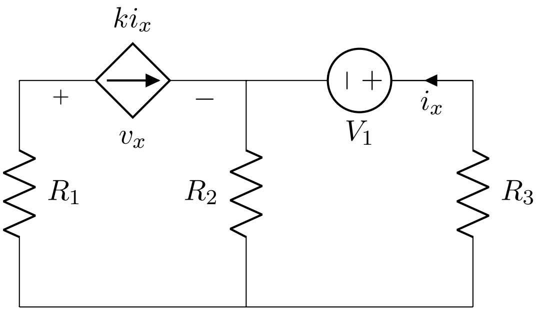
Uppgift 1 [10 p.]

För kretsen nedan:

(a) [3 p.] Bestäm i_x, uttryckt i de kända storheterna[1].

(b) [2 p.] Bestäm v_x, uttryckt i de kända storheterna.

(c) [5 p.] Beräkna effekten som utvecklas i varje komponent och visa att summan av dessa är noll (dvs. att $\sum P = 0$). Du *måste* använda passiv teckenkonvention och vara tydlig med hur dina strömmar och spänningar definieras. Antag här att $k = 1$, $R_1 = R_2 = 1\ \Omega$, $R_3 = 2\ \Omega$, $V_1 = 8$ V samt att $i_x = -2$ A och $v_x = 6$ V. *Lösningen ska uttryckas i de kända storheterna och förenklas* ***innan*** *eventuella värden används. Därmed visas förståelse för problemet.*



Lösningsförslag

(1a)

Med jord längst ner ger oss en KCL i (a):

$$\frac{v_a}{R_2} - i_x - ki_x = 0 \to -i_x(1+k) + \frac{1}{R_2}v_a = 0 \tag{1}$$

T.ex. en KVL ger oss v_a:

$$-i_xR_3 - V_1 - v_a = 0 \to v_a = -i_xR_3 - V_1 \tag{2}$$

Detta kan vi använda i vår KCL:

$$-i_x(1+k) + \frac{1}{R_2}(-i_xR_3 - V_1) = 0 \to i_x = \frac{-V_1}{R_2(1+k)+R_3} \tag{3}$$

(1b)

En KVL ger oss (t.ex):

$$0 = -ki_xR_1 - v_x - v_a = -ki_xR_1 - v_x + i_xR_3 + V_1 = 0 \to \tag{4}$$

$$v_x = V_1 + (R_3 - kR_1)\left(\frac{-V_1}{R_2(1+k)+R_3}\right) \tag{5}$$

[1] Se framsidan för vilka dessa kan vara.

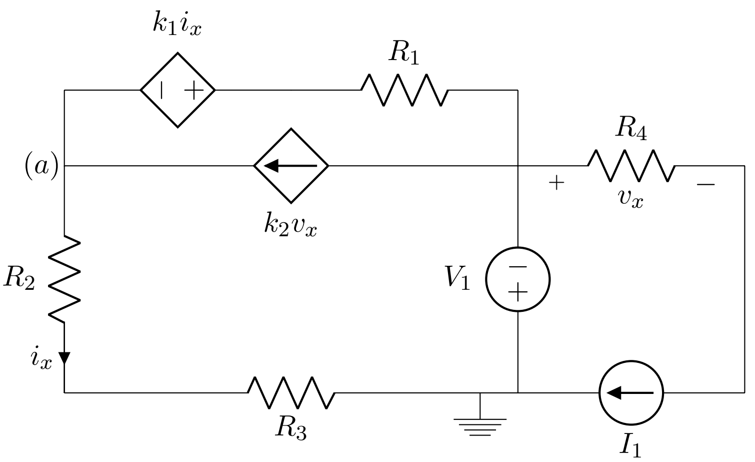
(1c)
Med passiv teckenkonvention ska vi byta tecken på strömmen (lägga till ett minustecken framför) om strömmen som vi definierat den lämnar "+"-terminalen på det späningsfallet som definierats. Vi har generellt $P_y = v_y i_y$ och vi får här för komponenterna i kretsen:

$$P_{R_1} = (R_1 k i_x) k i_x = R_1 (k i_x)^2 = 1(-2)^2 = 4 \tag{6}$$
$$P_{k i_x} = v_x k i_x = 6(-2) = -12 \tag{7}$$
$$P_{R_2} = v_a \left(\frac{v_a}{R_2} \right) = (-4)^2/1 = 16 \tag{8}$$
$$P_{V_1} = V_1 i_x = 8(-2) = -16 \tag{9}$$
$$P_{R_3} = (R_3 i_x) i_x = (2(-2))(-2) = 8 \tag{10}$$
$$\rightarrow \sum P = 4 - 12 + 16 - 16 + 8 = 0 \tag{11}$$

Som synes så behövde vi inte ändra tecken på någon strömmen i uttrycken, det löste sig automatiskt eftersom vi hade råkat definierat strömmarna såsom vi gjort.

Uppgift 2 [5 p.]

För kretsen nedan, bestäm nodpotentialen i (a) uttryckt i de kända storheterna. (Du behöver inte helt lösa ut "$v_a = ...$" men din sista ekvation ska förenklas och endast innehålla v_a och de kända storheterna.)



Lösningsförslag

Vi börjar med att kalla noden som sitter mellan R_1, R_4 och V_1 för b. En KCL vid (a) ger oss:

$$\frac{v_a - 0}{R_2 + R_3} - k_2 v_x + \frac{(v_a + k_1 i_x) - v_b}{R_1} = 0 \tag{12}$$

En kort KVL ger oss att $-V_1 = v_b$, Ohms lag ger oss att $v_x = R_4 I_1$ samt att $i_x = \frac{v_a}{R_2+R_3}$. Nu får vi:

$$\frac{v_a}{R_2 + R_3} - k_2(R_4 I_1) + \frac{(v_a + k_1 \frac{v_a}{R_2+R_3}) - (-V_1)}{R_1} = 0 \rightarrow \tag{13}$$

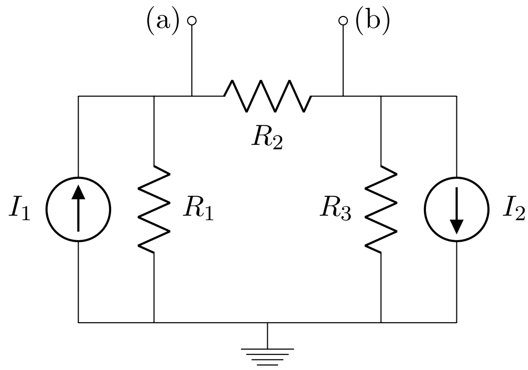
$$v_a \left(\frac{1}{R_2 + R_3} + \frac{1}{R_1} \left(1 + \frac{k_1}{R_2 + R_3} \right) \right) - k_2 R_4 I_1 + \frac{V_1}{R_1} = 0 \tag{14}$$

Ur denna kan vi se lösa ut v_a med enbart de kända storheterna.

Uppgift 3 [6 p.]

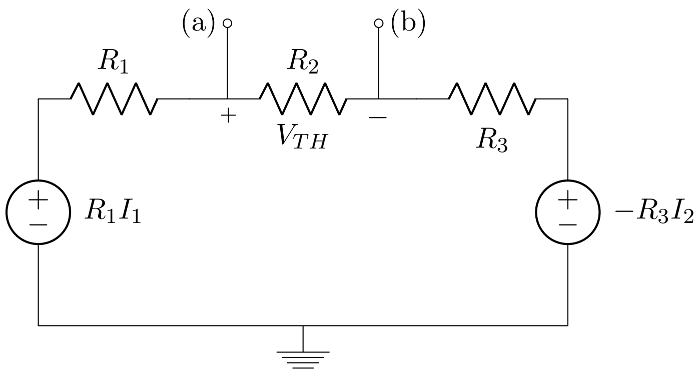
Troligen oktober, 2048.
Ingenjören tittade ner på sina frusna händer. Vintern hade tidigt ersatt en allt för kort höst och på vissa träd satt de gula löven kvar. Fastfrusna minnen av ljumna september dagar. Var det Bok eller kanske Oxel? Ingenjören minns inte. Allt innan samhällets kollaps och dess bombastiska sorti, ackompanjerat av Carnivorous Tulipas hasande oljud, hade fallet i glömska. Oviktigt vetande. Kvar fanns bara sådant som Ingenjören, i sitt innerst, visste kunde hålla en vid liv här ute i ett post-apokalyptiskt Östermalm. Vinden tilltog och nu började Ingenjören oroa sig ordentligt för kylan. Det var för kallt för att stanna kvar ute på Birger Jarlsgatan och även om solen stod högt på himlen kände Ingenjören hur värmen sakta gick förlorad. Men räddningen kom i hörnet vid Frejgatan där porten till en innergård stod olåst och genom den lilla springan mellan dörr och vägg kunde Ingenjören se en underbar och vindskyddad innergård. ”Gött mos!”, tänkte Ingenjören lättat men blev snart besviken när dörren faktiskt inte gick att rubba ens en skäggsekund[2].
Det nedra gångjärnet var delvis inneslutet i en klump av is som Ingenjören uppskattade till att väga cirka 1 kg (och mindes då en rolig sång från studentdagarna där refrängen fokuserade på Champagne, soprobotar och att 334 kJ krävs för att smälta 1 kg is vid 0°). Ingenjören kopplade snabbt sin helautomatiska uppvärmare (se kretsen nedan) till gångjärnet (mellan porten $a - b$). Antag att gångjärnets motstånd är sådant att maximalt med effekt levereras till gångjärnet samt att all energi som levereras till gångjärnet sen övergår som värme till isen. Kommer isen att smälta om uppvärmaren bara har batteritid för ynka två sekunder? Använda att $R_1 = R_2 = R_3 = 1\ \Omega$, $I_1 = 2$ kA, $I_2 = 1$ kA.

[2] Sträckan ett genomsnittligt skägg växer på en sekund; ca. 10 nm.



(*Lösningarna ska uttryckas i de kända storheterna och förenklas* ***innan*** *eventuella värden används. Därmed visas förståelse för problemet.*)

Lösningsförslag
Vi måste veta vad effekten är som abserberas av gångjärnet för att se vad energin blir för två sekunder. Vi får veta att gångjärnets motstånd är sådant att maximalt med effekt absorberas av detta, vilket betyder att om uppvärmaren beskrivs med en Thevenin ekvivalent så kommer gångjärnets motstånd vara R_{TH}. Det finns olika sätt att få V_{TH} men enklast är nog att göra två stycken källtransformationer där vi får vara noga med hur polariteten på spänningskällan blir pga hur strömkällan är riktad. Vi får då:



Ur detta får vi mha en KVL, $+R_1I_1 - I_{R_2}(R_1 + R_2 + R_3) - (-R_3I_2)$, att $V_{TH} = R_2 I_{R_2} = R_2 \left(\frac{R_1 I_1 + R_3 I_2}{R_1 + R_2 + R_3} \right)$. Vi nollställer källorna och får att:

$$R_{TH} = R_2 // (R_1 + R_3) = \frac{R_2(R_1 + R_3)}{R_2 + R_1 + R_3} = 2/3 \tag{15}$$

Lasten (dvs. gångjärnet) kopplas in och maximalt med effekt häri ges av:

$$P_{max} = \frac{V_{TH}^2}{4R_{TH}} = \tag{16}$$

$$\frac{1}{4R_{TH}}\left(\frac{R_1I_1 + R_3I_2}{R_1 + R_2 + R_3}R_2\right)^2 = \frac{3}{4*2}1000^2 = 375kW \rightarrow \tag{17}$$

$$\text{Energin} = 375000 * 2 = 750kJ \tag{18}$$

Isen smälter, Ingenjören överlever ännu en gång.

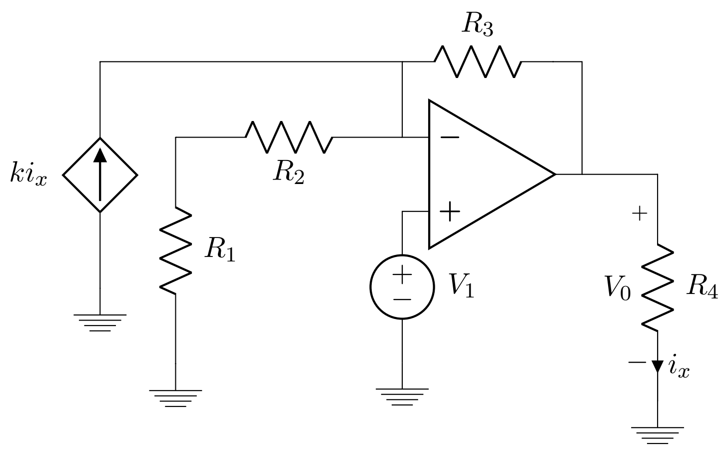
Uppgift 4 [6 p.]

För kretsen nedan:

(a) [4 p.] Bestäm V_0 som funktion av de kända storheterna och visa, genom dimensionsanalys, att uttrycket kan stämma.

(b) [1 p.] Antag att $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R$, vilken sorts krets är det då om $k < -1$?

(c) [1 p.] Antag att $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R$, vilken sorts krets är det då om $k = \frac{1}{2}$?



Lösningsförslag
(4a)
Vi börjar med att göra en KCL på den inverterande ingången. Vi får, mha Ohms lag,

$i_x = \frac{V_0}{R_4}$. Vi vet att Operationsförstärkarens ingångar har samma potential.

$$-k\frac{V_0}{R_4} + \frac{V_1 - 0}{R1 + R2} + \frac{V_1 - V_0}{R_3} = 0 \rightarrow \tag{19}$$

$$V_1\left(\frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{R_3}\right) = V_0\left(\frac{k}{R_4} + \frac{1}{R_3}\right) \tag{20}$$

$$[R_1 + R_2 = R_{12}] \rightarrow \tag{21}$$

$$V_0 = V_1\frac{(R_{12} + R_3)R_4}{R_{12}(kR_3 + R_4)} \tag{22}$$

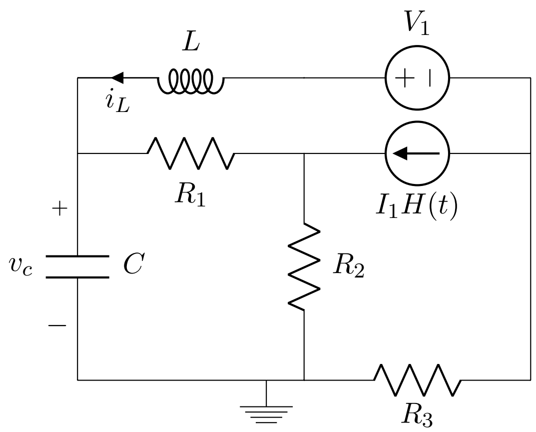
(4b)
Med $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R$ och $k < -1$ får vi:

$$V_0 = V_1\frac{3R^2}{2R(kR + R)} = V_1\frac{3}{2k + 2} < 0 \rightarrow \text{ inverterande operationsförstärkare.} \tag{23}$$

(4c)
Med $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R$ och $k = \frac{1}{2}$ får vi:

$$V_0 = V_1\frac{3R^2}{2R(kR + R)} = V_1\frac{3}{1 + 2} = V_1 \rightarrow \text{ "Buffert" / spännigsföljare.} \tag{24}$$

Uppgift 5 [9 p.]



Kretsen ovan befinner sig i jämviktstillstånd men vid $t = 0$ slås I_1 på[3]. Bestäm, som funktion av de kända storheterna:

---

[3]Dvs. $i_1(t) = I_1H(t)$, där $H(t)$ är Heavisides stegfunktion vid $t = 0$.

(a) [1 p.] $i_L(0^-)$

(b) [1 p.] $v_c(0^-)$

(c) [1 p.] $v_{R_1}(0^-)$

(d) [1 p.] $P_{V_1}(0^-)$

(e) [1 p.] $i_L(0^+)$

(f) [1 p.] $v_C(0^+)$

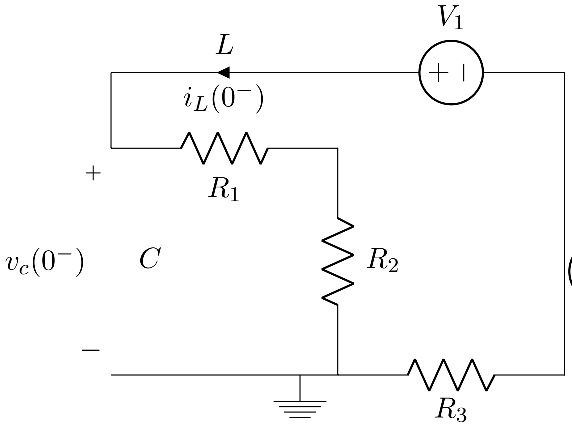
(g) [2 p.] $v_{R_1}(0^+)$

(h) [1 p.] $P_{V_1}(0^+)$

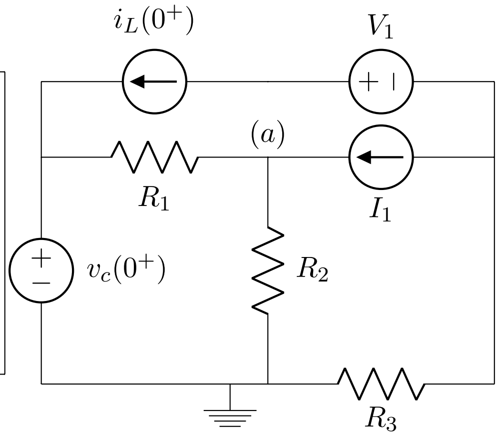
Antag att $R_1 = R_2 = R_3 = R$. (*Lösningarna ska uttryckas i de kända storheterna och förenklas* ***innan*** *eventuella värden används. Därmed visas förståelse för problemet.*)

Lösningsförslag

$(t = 0^-)$



$(t = 0^+)$



(a) $i_L(0^-) = V_1/(R_1 + R_2 + R_3) = V_1/(3R)$

(b) $v_c(0^-) = (R_1 + R_2)i_L(0^-) = V_1(R_1 + R_2)/(R_1 + R_2 + R_3) = V_1(2/3)$

(c) $v_{R_1}(0^-) = R_1 i_L(0^-) = V_1 R_1/(R_1 + R_2 + R_3) = V_1/3$, notera att spänningsfallet är definierat att följa strömriktningen.

(d) $P_{V_1}(0^-) = V_1(-i_L(0^-)) = -V_1^2/(R_1 + R_2 + R_3) = -V_1^2/(3R)$

(e) $i_L(0^+) = i_L(0^-)$

(f) $v_C(0^+) = v_c(0^-)$

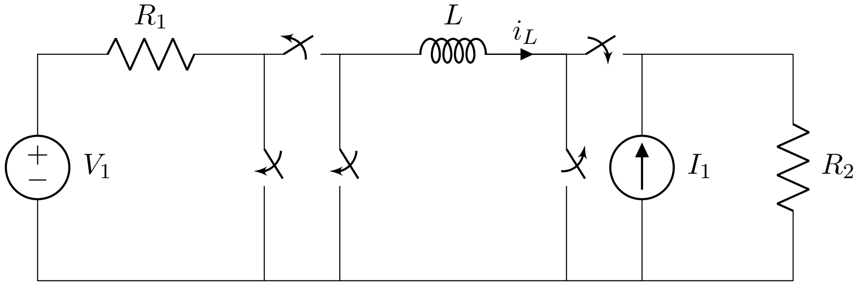
(g) $v_{R_1}(0^+)$ fås t.ex. ur KCL i noden (a): $\frac{v_a - v_c(0^+)}{R_1} + \frac{v_a}{R_2} - I_1 = 0 \rightarrow v_a = \left(I_1 + \frac{v_c(0^+)}{R_1}\right)\left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}\right) = (I_1 + V_1\frac{2}{3R})(R/2) = (I_1 R/2 + V_1/3)$. Nu får vi genom $v_{R_1}(0^+) = v_c(0^+) - v_a = V_1(2/3) - (I_1 R/2 + V_1/3) = V_1/3 - I_1 R/2 \neq v_{R_1}(0^-)$. *Alternativt* får vi detta genom att använda superposition och i tur och ordning nollställa alla källor utom en och se vad bidraget till $v_{R_1}(0^+)$ från V_1, $i_L(0^+)$, $v_c(0^+)$ och I_1 blir. I denna ordning får vi att bidragen från källorna blir (när de andra är nollställda) $V_{R_1}(0^+) = 0 + 0 + V_1/3 + (-I_1 R/2)$.

(h) $P_{V_1}(0^+) = P_{V_1}(0^-)$ pga strömmen genom V_1, dvs. $i_L(0^-)$ inte ändras momentant.

Uppgift 6 [6 p.]

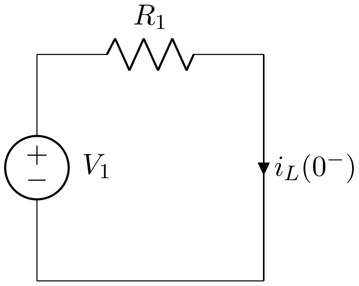
(a) [5 p.] Kretsen nedan befinner sig i jämviktstillstånd men vid $t = 0$ slås brytarna om. Bestäm, som funktion av tiden, och de kända storheterna, $i_L(t > 0)$.

(b) [1 p.] Visa att din lösning är rimlig genom att kontrollera storhet och riktning på $i_L(0^+)$ samt $i_L(t \to \infty)$.

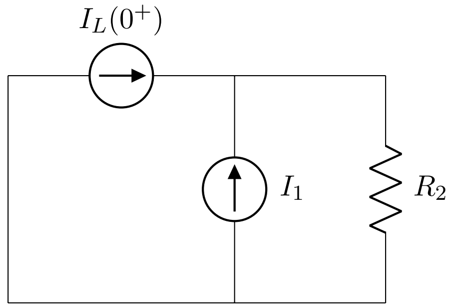


Lösningsförslag
(6a)

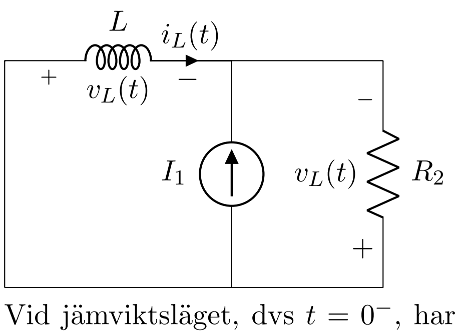
$(t = 0^-)$



$(t = 0^+)$



$(t > 0)$



Vid jämviktsläget, dvs $t = 0^-$, har vi att strömmen genom spolen är $i_L(0^-) = V_1/R_1$ vilket bevaras efter att brytarna slaget om, dvs. $i_L(0^-) = i_L(0^+)$ vilket blir vårt initial vilkor för vår ODE som behöver lösas. Efter brytarna ändrats så gör vi en KCL i övre noden:

$$-I_1 - i_L(t) - \frac{v_L(t)}{R_2} = 0 \rightarrow -I_1 - i_L(t) - \frac{L\frac{di_L(t)}{dt}}{R_2} = 0 \tag{25}$$

$$\frac{di_L(t)}{dt} + \frac{R_2}{L} i_L(t) = -\frac{R_2}{L} I_1 \tag{26}$$

Detta är på samma form såsom $\dot{y} + ay = b$ vilket vi vet löses av $y(t) = \frac{b}{a} + Ke^{-at}$ där i vårt fall $a = \frac{R_2}{L}$, $b = -I_1 \frac{R_2}{L}$ och K går att finna mha initialvilkoret $i_L(0^+) = i_L(0^-) = \frac{V_1}{R_1}$. Vi får då:

$$i_L(0) = \frac{V_1}{R_1} = \left(-I_1 \frac{R_2}{L}\right) / \left(\frac{R_2}{L}\right) + Ke^0 \rightarrow \tag{27}$$

$$K = \frac{V_1}{R_1} + I_1 \rightarrow \tag{28}$$

$$i_L(t) = -I_1 + \left(\frac{V_1}{R_1} + I_1\right) e^{-\frac{R_2}{L}t} \tag{29}$$

(6b)

- $i_L(0^+) \rightarrow -I_1 + \left(\frac{V_1}{R_1} + I_1\right) \cdot 1 = \frac{V_1}{R_1}$, dvs vår lösning visar verkligen vad strömmen är precis efter brytarnas omslag.
- $i_L(t \rightarrow \infty) \rightarrow -I_1 + \left(\frac{V_1}{R_1} + I_1\right) \cdot 0 \rightarrow -I_1$, som vi kan ana så kommer strömmen i spolen till sist att endast beror på strömkällan som kommer rikta strömmen tvärtemot vad vi från början definierade.