KTH ei1110 Elkretsanalys (utökad kurs) CELTE, omtentamen TEN1 2019-12-16 kl 08–13.

Hjälpmedel: Inga extra hjälpmedel är tillåtna.

Alla källor ska antas vara likströmskällor och beteckningar såsom V_0, I_1 etc. beskriver amplituden hos dessa. Om ingen annan information ges ska komponenter antas vara ideala. Angivna värden hos komponenter (t.ex. R för ett motstånd, V för en spänningskälla) ska antas vara kända storheter och andra markerade storheter (t.ex. strömmen genom, eller spänningen över, ett motstånd) ska antas vara okända storheter. Om inget annat framgår, antag stationärt tillstånd, dvs. lång tid efter att alla komponenter har kopplats ihop.

Några viktiga saker för att kunna få maximalt antal poäng:

- **Endast ett problem per sida** och text på baksidan kommer inte att beaktas.
- Tänk på att er handstil måste vara tydlig för att lösningen ska kunna bedömas. **Kan vi inte läsa, kan vi inte ge poäng!** Använd **inte rödpenna**.
- Lösningarna bör som oftast uttryckas i de kända storheterna och förenklas **innan** eventuella värden används. Därmed visas förståelse för problemet.
- **Ge alltid din krets** och var tydlig med diagram och definitioner av variabler. Tänk på hur du definierar polariteten och riktningen på de spänningar och strömmar du använder. **Använd passiv teckenkonvention**. Om det fattas figur med definierade variabler utsatta kan det bli **avdrag** vid tvetydighet.
- Därtill, dela tiden mellan talen och kontrollera svarens rimlighet genom t.ex. dimensionsanalys eller alternativ lösningsmetod.

Betygsgränserna är: 50% (E), 60% (D), 70% (C), 80% (B), 90% (A).
För (Fx) krävs $> 45\%$ samt att inte mer än ett tal har poängen x sådan att $0 < x < 50\%$.
(Med detta menas att för att få Fx får endast ett tal dra ner resultatet under godkänt.)

Examinator: Daniel Månsson (08 790 9044)

Lycka till och ta det lugnt!

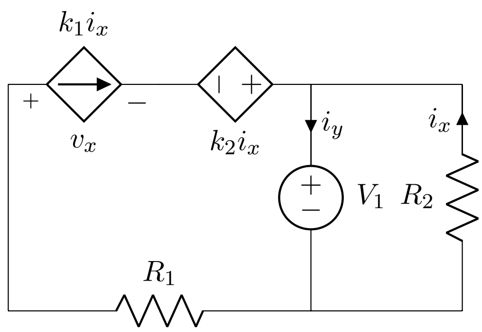
Uppgift 1 [10 p.]

För kretsen nedan:

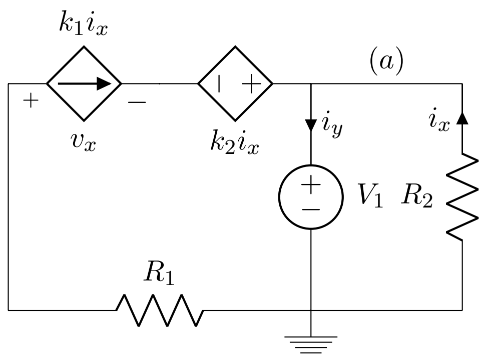
(a) [3 p.] Bestäm i_y, uttryckt i de kända storheterna[1].

(b) [2 p.] Bestäm v_x, uttryckt i de kända storheterna.

(c) [5 p.] Beräkna effekten som utvecklas i varje komponent. Du *måste* använda passiv teckenkonvention och vara tydlig med hur dina strömmar och spänningar definieras. Antag här att $k_1 = 1$, $k_2 = 2\ \Omega$, $R_1 = 1\ \Omega$, $R_2 = 2\ \Omega$,$V_1 = 4$ V samt att $i_x = -2$ A, $i_y = -4$ A och $v_x = -6$ V. Lösningen **ska** uttryckas i de kända storheterna och förenklas **innan** eventuella värden används. Därmed visas förståelse för problemet. (Kontrollera att din lösning stämmer genom att kontrollera att $\sum P = 0$.)



Lösningsförslag



(1a)

[1] Se framsidan för vilka dessa kan vara.

$$KVL: \quad +V_1 + i_x R_2 = 0 \to i_x = \frac{-V_1}{R_2} \tag{1}$$

$$KCL_a: \quad -k_1 i_x + i_y - i_x = 0 \to k_1 \frac{V_1}{R_2} + i_y + \frac{V_1}{R_2} = 0 \to \tag{2}$$

$$i_y = -\frac{V_1}{R_2}(k_1 + 1) \tag{3}$$

(1b)

$$KVL: \quad -R_1 k_1 i_x - v_x + k_2 i_x - V_1 = 0 \to R_1 \frac{V_1 k_1}{R_2} - v_x - k_2 \frac{V_1}{R_2} - V_1 = 0 \to \tag{4}$$

$$v_x = V_1 \left(\frac{k_1 R_1}{R_2} - \frac{k_2}{R_2} - 1 \right) \tag{5}$$

(1c)
Med passiv teckenkonvention ska vi byta tecken på strömmen (lägga till ett minustecken framför) om strömmen som vi definierat den lämnar "+"-terminalen på det späningsfallet som definierats. Vi har generellt $P_z = v_z(\pm i_z)$ och vi får här för komponenterna i kretsen:

$$P_{k_1 i_x} = v_x(k_1 i_x) = -6(-2) = 12 \tag{6}$$

$$P_{k_2 i_x} = k_2 i_x(-k_1 ix) = -4(2) = -8 \tag{7}$$

$$P_{V_1} = V_1(i_y) = 4(-4) = -16 \tag{8}$$

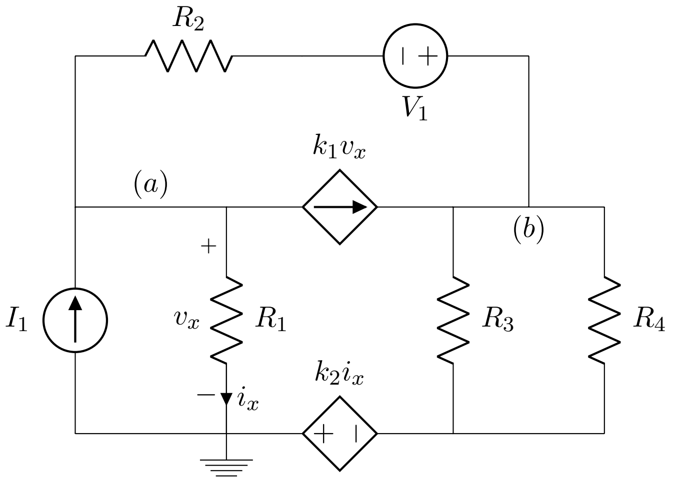
$$P_{R_1} = R_1(k_1 i_x)^2 = 1(-2)^2 = 4 \tag{9}$$

$$P_{R_2} = R_2(i_x)^2 = 2(-2)^2 = 8 \tag{10}$$

$$\to \sum P = 12 + (-8) + (-16) + 4 + 8 = 24 - 24 = 0 \tag{11}$$

Uppgift 2 [7 p.]

För kretsen här nedan, använd nodanalys och sätt upp ekvationssystemet (där termerna är samlade) för de angivna noderna a och b. Ekvationssystemet ska endast innehålla kända storheter samt nodpotentialerna men behöver inte lösas ut för att erhålla nodpotentialerna.



lösningsförslag

Vi börjar med att introducera noden (c) som sitter efter k_2i_x.

$$KCL_a: \; -I_1 + \frac{v_a}{R_1} + \frac{v_a + V_1 - v_b}{R_2} + k_1 v_x = 0 \tag{12}$$

$$KCL_b: \; \frac{v_b - V_1 - v_a}{R_2} - k_1 v_x + (v_b - v_c)\left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right) = 0 \tag{13}$$

$$KVL: \; 0 - k_2 i_x - v_c = 0 \tag{14}$$

Vi ser att $v_x = v_a - 0$ samt $i_x = \frac{v_a}{R_1}$, och vi får:

$$KVL: \; 0 - k_2 i_x - v_c = 0 \rightarrow v_c = -k_2 i_x = -k_2 \frac{v_a}{R_1} \tag{15}$$

$$KCL_a: \; v_a\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + k_1\right) + v_b\left(\frac{-1}{R_2}\right) = I_1 - \frac{V_1}{R_2} \tag{16}$$

$$KCL_b: \; v_a\left(\frac{-1}{R_2} - k_1 + \frac{k_2}{R_1}\left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right)\right) + v_b\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right) = \frac{V_1}{R_2} \tag{17}$$

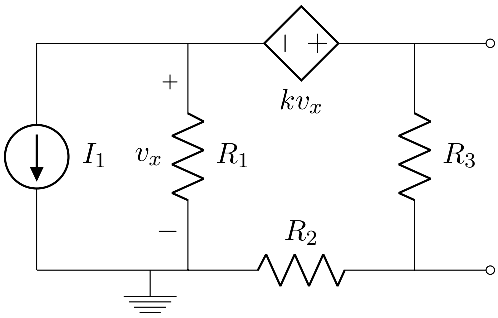
Uppgift 3 [7 p.]

För kretsen här nedan:

(a) [6 p.] Bestäm Thevenin resistansen uttryckt i de kända storheterna.

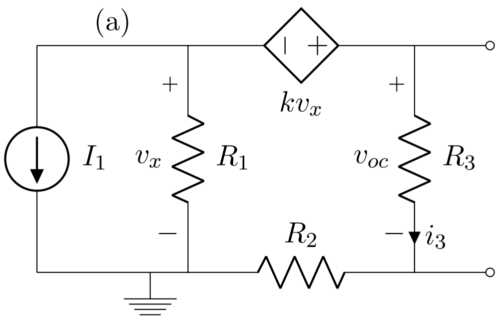
(b) [1 p.] Visa att ditt uttryck är rimligt genom att sätta $k = 0$ i det och jämför med den resistans du får med den beroende källan nollställd.

Antag att $R_1 = R_2 = R_3 = R$. (Lösningarna **ska** uttryckas i de kända storheterna och förenklas **innan** eventuella värden används. Därmed visas förståelse för problemet.)



——————————————lösningsförslag——————————————

(1a)



Vi börjar med $v_{oc} = V_{TH} = i_3 R_3$ och ser först att $v_x = v_a - 0$.

$$KCL_a: \ I_1 + \frac{v_a}{R_1} + \frac{v_a + kv_x - 0}{R_2 + R_3} = 0 \rightarrow \tag{18}$$

$$I_1 + v_a \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1+k}{R_2 + R_3} \right) \rightarrow (R_i = R) \rightarrow \tag{19}$$

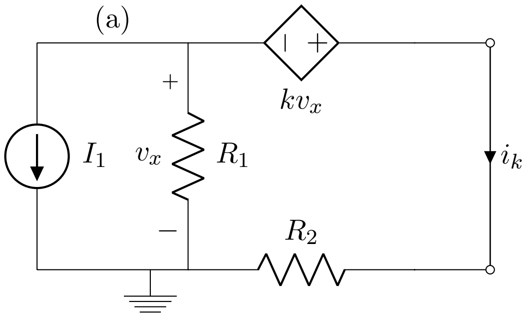
$$v_a = \frac{-2I_1 R}{3+k} \tag{20}$$

$$KVL: \quad + v_x + kv_x - i_3(R_3 + R_2) = 0 \rightarrow i_3 = v_x \frac{1+k}{R_2 + R_3} \rightarrow \tag{21}$$

$$(v_a = v_x) \rightarrow i_3 = \left(\frac{-2I_1 R}{3+k} \right) \frac{1+k}{2R} = \frac{-I_1(1+k)}{3+k} \rightarrow \tag{22}$$

$$v_{oc} = R_3 i_3 = -R \frac{I_1(1+k)}{3+k} \tag{23}$$

Nu kortsluter vi porten och undersöker kortslutningsströmmen, i_k. Nu kommer inte bara nodpotentialerna men även spänningsfallen och strömmarna att ändras:



$$KCL_a: \; I_1 + \frac{v_a}{R_1} + \frac{v_a + kv_x - 0}{R_2} = 0 \rightarrow \tag{24}$$

$$I_1 + v_a\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1+k}{R_2}\right) \rightarrow (R_i = R) \rightarrow \tag{25}$$

$$v_a = \frac{-I_1 R}{2+k} \tag{26}$$

$$KCL_a: \; I_1 + \frac{v_a}{R_1} + i_k = 0 \rightarrow i_k = -I_1 - \frac{1}{R}\left(\frac{-I_1 R}{2+k}\right) \rightarrow \tag{27}$$

$$i_k = \frac{-I_1(1+k)}{2+k} \rightarrow \tag{28}$$

$$R_{TH} = \frac{v_{oc}}{i_k} = \left(-R\frac{I_1(1+k)}{3+k}\right)\left(\frac{2+k}{-I_1(1+k)}\right) = R\frac{2+k}{3+k} \tag{29}$$

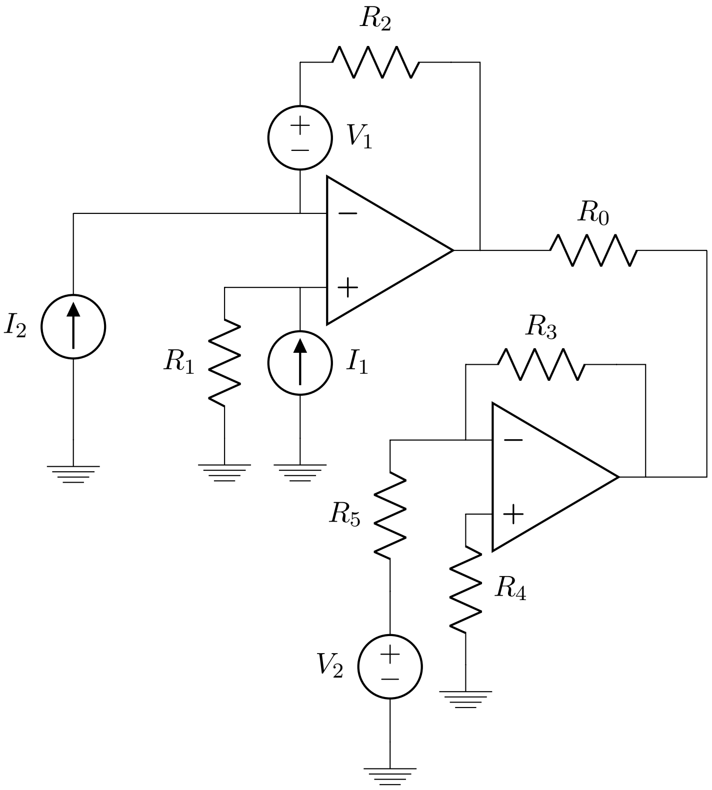
(1b)
Om vi har $k = 0$ betyder det att den beroende spänningskällan är nollställd (dvs kortsluten) (och det är som om den inte fanns alls) och vi kan då nollställa den oberoende strömkällan (som blir ett avbrott). Vi får då:

$$R_{TH} = R_3//(R_1 + R_2) = (R_i = R) = \frac{2R^2}{3R} = \frac{2}{3}R \tag{30}$$

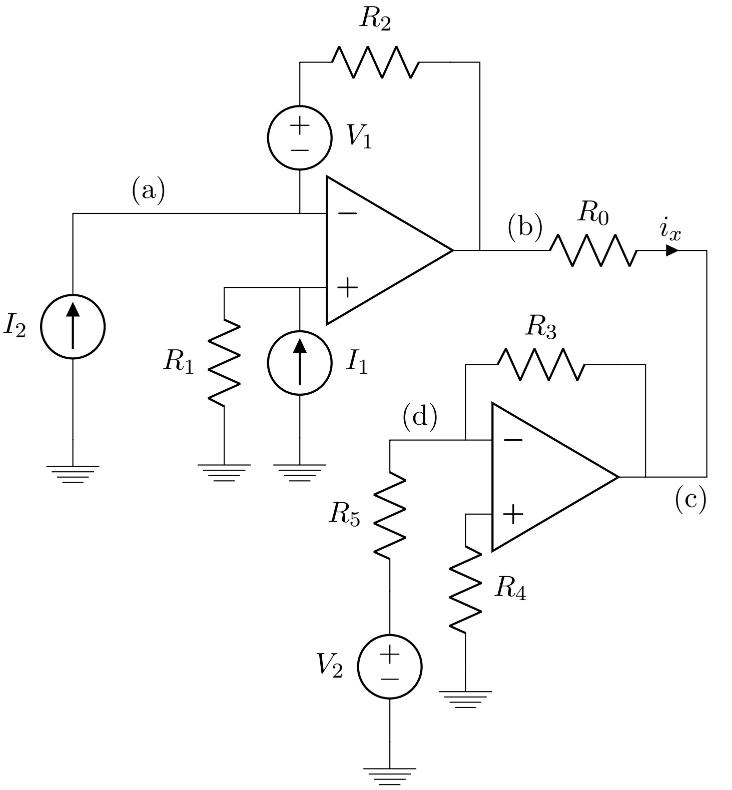
Detta är samma som vi får i vårt uttryck ovan med $k = 0$ så det är rimligt.

Uppgift 4 [5 p.]

För kretsen nedan, bestäm huruvida strömmen genom R_0 flyter till den nedre eller övre operationsförstärkaren. Antag att $R_i = 1\ \Omega$, $I_1 = 1$ A, $I_2 = 2$ A, $V_1 = 1$ V och $V_2 = 2$ V. (Lösningarna **ska** uttryckas i de kända storheterna och förenklas **innan** eventuella värden används. Därmed visas förståelse för problemet.)



lösningsförslag



Det vi använder oss av är att ingångarna på en operationsförstärkare har samma potential och att ingen ström går in i ingångarna.

$$v_a = I_1 R_1 \tag{31}$$

$$KCL_a: \quad -I_2 + \frac{v_a + V_1 - v_b}{R_2} = 0 \rightarrow v_b = I_1 R_1 - I_2 R_2 + V_1 \tag{32}$$

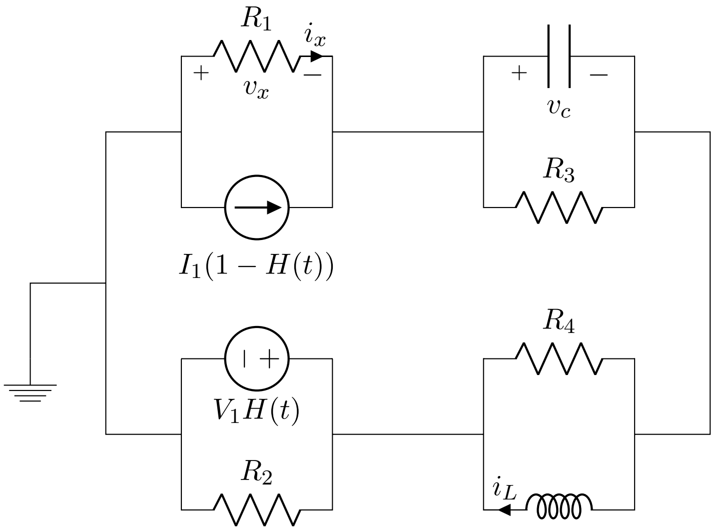
$$KCL_d: \quad \frac{v_d - v_c}{R_3} + \frac{v_d - V_2 - 0}{R_5} = 0 \tag{33}$$

$$v_d = 0 \rightarrow \frac{-v_c}{R_3} + \frac{-V_2}{R_5} = 0 \rightarrow v_c = -V_2 \frac{R_3}{R_5} \tag{34}$$

$$i_x = \frac{v_b - v_c}{R_0} = \frac{1}{R_0}\left(I_1 R_1 - I_2 R_2 + V_1 - \left(-V_2 \frac{R_3}{R_5}\right)\right) = 2 \text{ A} \tag{35}$$

Det vill säga, eftersom vår definierade $i_x > 0$ så flödar den verkligen som vi definierade den, dvs till den nedre operationsförstärkaren.

Uppgift 5 [8 p.]



Kretsen ovan befinner sig i jämviktstillstånd men vid $t = 0$ nollställs I_1 och V_1 slås på[2]. Bestäm, som funktion av de kända storheterna:

(a) [1 p.] $i_L(0^-)$

(b) [1 p.] $v_c(0^-)$

(c) [1 p.] $v_x(0^-)$

(d) [1 p.] $v_c(0^+)$

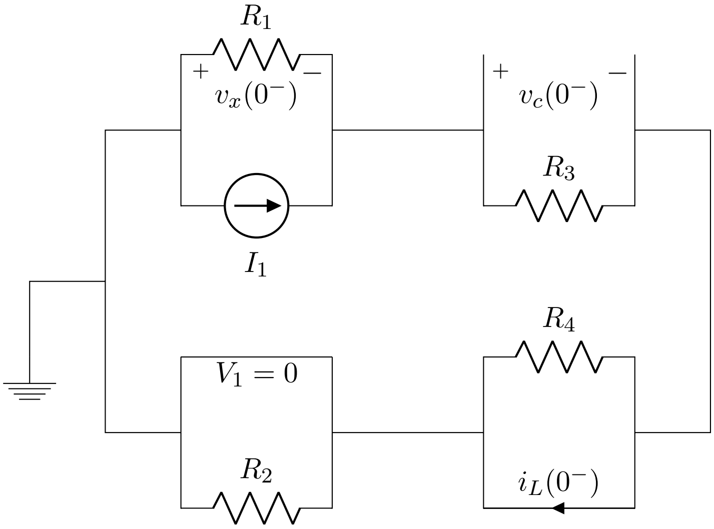
(e) [1 p.] $i_L(0^+)$

(f) [3 p.] $i_x(0^+)$, antag att $R_1 = 1\ \Omega$, $R_2 = 2\ \Omega$, $R_3 = 3\ \Omega$ och $R_4 = 4\ \Omega$.

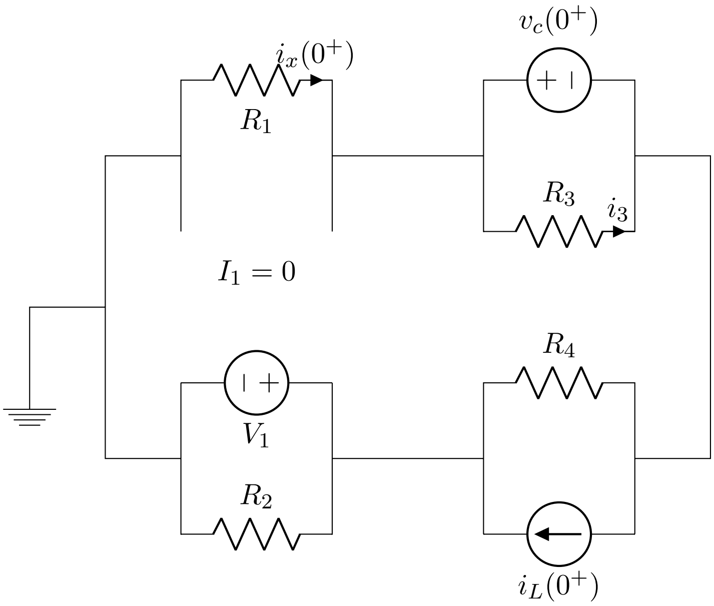
———————————lösningsförslag———————————

$(t = 0^-)$

[2] $H(t)$ är Heavisides stegfunktion vid $t = 0$.



$(t = 0^+)$



(a) $i_L(0^-) = I_1 \frac{R_1}{R_1+R_3}$, ur en strömdelning

(b) $v_c(0^-) = i_L(0^-)R_3 = I_1 \frac{R_1}{R_1+R_3} R_3$

(c) $v_x(0^-) = -I_1 \frac{R_3}{R_1+R_3} R_1$, ur en strömdelningen. Spänningsfallet har motsatt riktning jämfört med definierade v_x.

(d) $v_c(0^+) = v_c(0^-)$, pga att kondensatorn är spänningströg

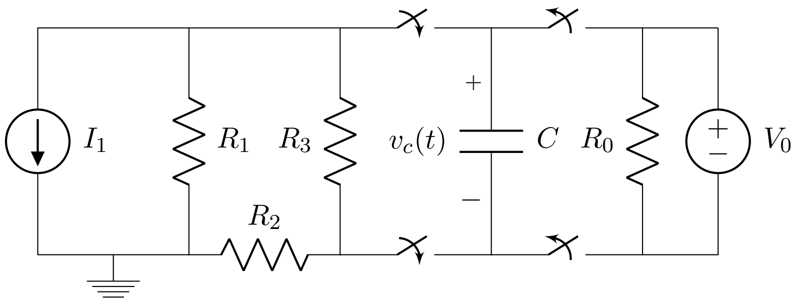
(e) $i_L(0^+) = i_L(0^-)$, pga att spolen är strömtrög

(f)

$$KVL: \quad -i_xR_1 - v_c - i_4R_4 - V_1 = 0 \tag{36}$$
$$KCL: \quad +i_4 + i_L(0^+) - i_x = 0 \rightarrow i_4 = i_x - i_L(0^+) \tag{37}$$
$$-i_xR_1 - v_c - (i_x - i_L(0^+))R_4 - V_1 = 0 \rightarrow \tag{38}$$
$$-i_xR_1 - I_1\frac{R_1R_3}{R_1+R_3} - \left(i_x - I_1\frac{R_1}{R_1+R_3}\right)R_4 - V_1 = 0 \rightarrow \tag{39}$$
$$-i_x(R_1+R_4) = I_1\frac{1}{R_1+R_3}\left(R_1R_3 - R_1R_4\right) + V_1 \tag{40}$$
$$\rightarrow i_x = \frac{1}{5}\left(I_1\frac{1}{4} - V_1\right) \tag{41}$$

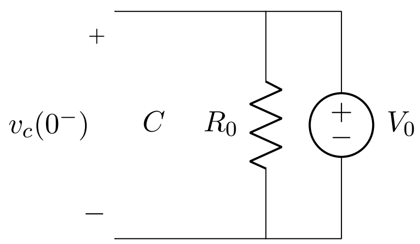
Uppgift 6 [7 p.]

Kretsen nedan befinner sig i jämviktstillstånd men vid $t = 0$ slås brytarna om. Bestäm, som funktion av tiden, och de kända storheterna, $v_c(t > 0)$. Antag att $R_1 = R_2 = R_3 = R$. (Lösningarna **ska** uttryckas i de kända storheterna och förenklas **innan** eventuella värden används. Därmed visas förståelse för problemet.)

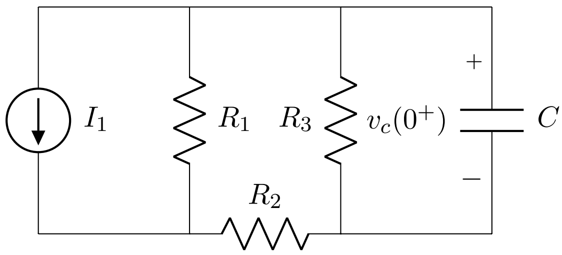


Uppgiften löses lättast genom att dela upp kretsen i de två delarna, studera vad spänningen är över kondensatorn innan brytarna slår om (som blir vårt begynnelsevilkor), beräknar Thevenin ekvivalenten av den vänstra delen av kretsen och använder detta för att lösa den ODE som uppkommer.

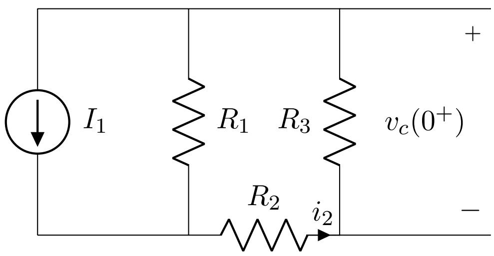
$(t = 0^-)$

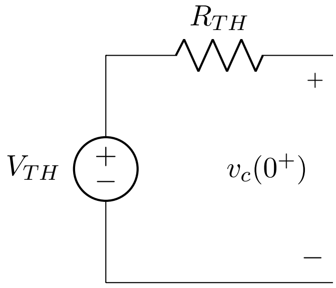


$v_c(0^-) = V_0 = v_c(0^+)$
$(t = 0^+)$



$(t > 0)$





V_{TH} fås, t.ex. genom att beräkna v_{oc} där C sitter i den vänstra delen av kretsen. Vi får v_{oc} lättaste genom en strömdelning:

$$I_2 = I_1 \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3} \to v_{oc} = V_{TH} = R_3(-i_2) = (R_i = R) = -I_1 R \frac{1}{3} \tag{42}$$

Notera minustecknet som uppkommer pga hur spänningsfallet från strömmen i_2 blir jämfört med hur v_{oc} (och $v_c(t)$) är definierat. R_{TH} blir enkelt genom att nollställa I_1:

$$R_{TH} = R_3//(R_1 + R_2) = \frac{2}{3} R \tag{43}$$

$$\tag{44}$$

Nu kan vi enklare studera hur $v_c(t)$ utvecklas med tiden. Vi gör en KVL och får:

$$+V_{TH} - i_c(t)R_{TH} - v_c(t) = \to V_{TH} - C\frac{dv_c(t)}{dt} R_{TH} - v_c(t) = 0 \to \tag{45}$$

$$\frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t)\frac{1}{CR_{TH}} = V_{TH}\frac{1}{CR_{TH}} \tag{46}$$

Detta är på samma form såsom $\dot{y} + ay = b$ vilket vi vet löses av $y(t) = \frac{b}{a} + Ke^{-at}$ där i vårt fall $a = \frac{1}{CR_{TH}}$, $b = V_{TH}\frac{1}{CR_{TH}}$ och K går att finna mha initialvilkoret $v_c(0^+) = v_c(0^-) = V_0$. Vi får då:

$$v_c(0) = V_0 = V_{TH} + Ke^0 \to K = V_0 - \left(-I_1 R \frac{1}{3}\right) \to \tag{47}$$

$$v_c(t) = -I_1 R \frac{1}{3} + \left(V_0 + I_1 R \frac{1}{3}\right) e^{-\frac{1}{CR_{TH}} t} \tag{48}$$

(Vi kanske minns också att man kan skriva lösnigen på ODE'n som uppkommer på formen:

$$x(t) = x(\infty) + (x(0) - x(\infty))e^{-at} \tag{49}$$

vilket stämmer med vår lösning.) Notera att vår spänning, som vi definierade den utifrån V_0, blir negativ pga hur I_1 och spänningsfallet som uppkommer över C är riktat.