KTH ei1110 Elkretsanalys (CELTE), tentamen (TEN2) 2020-03-10 kl 08–13.

Hjälpmedel: Inga extra hjälpmedel är tillåtna.

Alla källor ska antas vara tidsharmoniska växelströmskällor om inget annat explicit anges och beteckningar såsom V_0, I_1 etc. beskriver oftast amplituden hos dessa. Om ingen annan information ges ska komponenter antas vara ideala. Angivna värden hos komponenter (t.ex. R för ett motstånd, V för en spänningskälla) ska (om inget annat framgår) antas vara kända storheter och andra markerade storheter (t.ex. strömmen genom, eller spänningen över, ett motstånd) ska antas vara okända storheter. Antag **stationärt tillstånd**, dvs. lång tid efter alla komponenter har kopplats ihop.
Några viktiga saker för att kunna få maximalt antal poäng:

- **Endast ett problem per sida** och text på baksidan kommer inte att beaktas.
- Tänk på att er handstil måste vara tydlig för att lösningen ska kunna bedömas. **Kan vi inte läsa, kan vi inte ge poäng!** Använd **inte rödpenna**.
- Lösningarna bör som oftast uttryckas i de kända storheterna och förenklas **innan** eventuella värden används. Därmed visas förståelse för problemet.
- **Ge alltid din krets** och var tydlig med diagram och definitioner av variabler. Tänk på hur du definierar polariteten och riktningen på de spänningar och strömmar du använder. **Använd passiv teckenkonvention**. Om det fattas figur med definierade variabler utsatta kan det bli **avdrag** vid tvetydighet. Var noga med definitionen av impedanserna, t.ex. en spoles impedans är inte "L", detta kan ge avdrag.
- Därtill, dela tiden mellan talen och kontrollera svarens rimlighet genom t.ex. dimensionsanalys eller alternativ lösningsmetod.

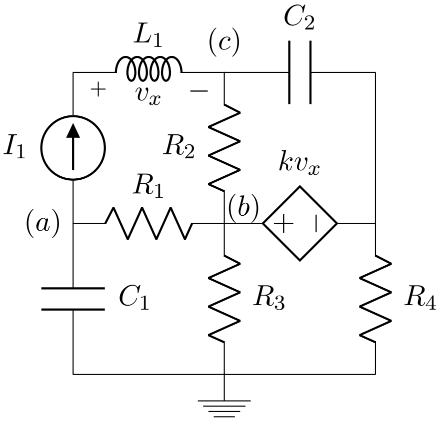
Betygsgränserna är: 50% (E), 60% (D), 70% (C), 80% (B), 90% (A).
Ingen avrundning görs.
För (Fx) krävs $> 45\%$ samt att inte mer än ett tal har poängen x sådan att $0 < x < 50\%$.
(Med detta menas att för att få Fx får endast ett tal dra ner resultatet under godkänt.)

Examinator: Daniel Månsson (08 790 9044)

Lycka till och ta det lugnt!

Uppgift 1 [9 p.]

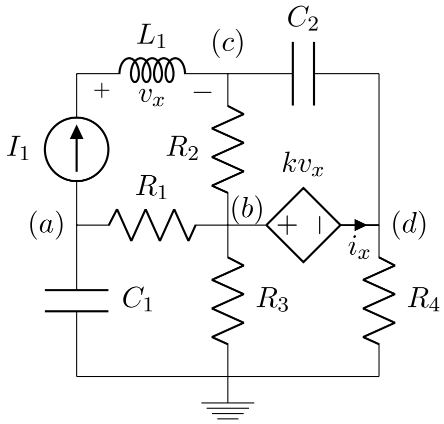
(a) [7 p.] För kretsen här, ställ upp nodekvationerna för de markerade noderna uttryckt enbart i de kända storheterna och dessa nodpotentialer. I de slutgiltiga uttrycken ska termerna vara samlade och rimligt förenklade.



(b) [2 p.] Visa att ditt ekvationssystem är rimligt genom en dimensionsanalys.

Lösningsförslag

(1a)



$$KCL_a\colon\ I_1 + \frac{v_a}{Z_{C_1}} + \frac{v_a - v_b}{R_1} = 0 \tag{1}$$

$$KCL_b\colon\ \frac{v_b - v_a}{R_1} + \frac{v_b}{R_3} + \frac{v_b - v_c}{R_2} + i_x = 0 \tag{2}$$

$$KCL_c\colon\ -I_1 + \frac{v_c - v_b}{R_2} + \frac{v_c - v_d}{Z_{C_2}} = 0 \tag{3}$$

$$KCL_d\colon\ -i_x + \frac{v_d}{R_4} + \frac{v_d - v_c}{Z_{C_2}} = 0 \tag{4}$$

$$v_x = j\omega L_1 I_1 \tag{5}$$

$$KVL\colon\ +v_b - kv_x - v_d = 0 \to v_d = v_b - kj\omega L_1 I_1 \tag{6}$$

Vi skulle också kunna satt en supernod vid $b-d$. Samlar vi ihop allt detta får vi:

$$KCL_a\colon\ v_a\left(j\omega C_1+\frac{1}{R_1}\right)+v_b\left(\frac{-1}{R_1}\right)=-I_1 \tag{7}$$

$$\begin{aligned}KCL_b\colon\ v_a\left(\frac{-1}{R_1}\right)+v_b\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}+j\omega C_2\right)+v_c\left(\frac{-1}{R_2}-j\omega C_2\right)\\ =kj\omega L_1 I_1\left(\frac{1}{R_4}+j\omega C_2\right)\end{aligned} \tag{8}$$

$$KCL_c\colon\ v_b\left(\frac{-1}{R_2}-j\omega C_2\right)+v_c\left(\frac{1}{R_2}+j\omega C_2\right)=I_1-kj\omega L_1 I_1 j\omega C_2 \tag{9}$$

(1b)
Dimensionsanalys ger oss, med att spänningskällan $kv_x \to k[...]$:

$$KCL_a\colon\ [V]\left(\frac{1}{[\Omega]}+\frac{1}{[\Omega]}\right)+[V]\left(\frac{1}{[\Omega]}\right)=[A]=[A], ok \tag{10}$$

$$\begin{aligned}KCL_b\colon\ [V]\left(\frac{1}{[\Omega]}\right)+[V]\left(\frac{1}{[\Omega]}+\frac{1}{[\Omega]}+\frac{1}{[\Omega]}+\frac{1}{[\Omega]}+\frac{1}{[\Omega]}\right)+\\ [V]\left(\frac{1}{[\Omega]}+\frac{1}{[\Omega]}\right)=[A]=[...][\Omega][A]\left(\frac{1}{[\Omega]}+\frac{1}{[\Omega]}\right), ok\end{aligned} \tag{11}$$

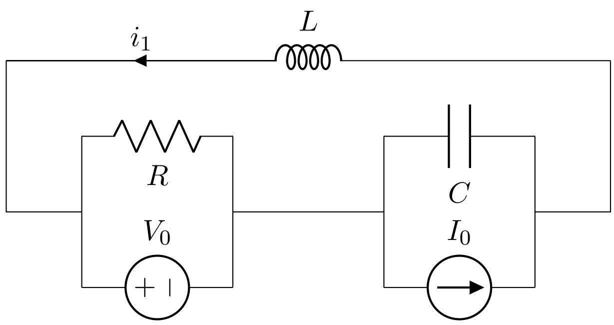
$$KCL_c\colon\ [V]\left(\frac{1}{[\Omega]}+\frac{1}{[\Omega]}\right)+[V]\left(\frac{1}{[\Omega]}+\frac{1}{[\Omega]}\right)=[A]=[A]+[...][\Omega][A]\frac{1}{[\Omega]}, ok \tag{12}$$

Uppgift 2 [12 p.]

För kretsen nedan:

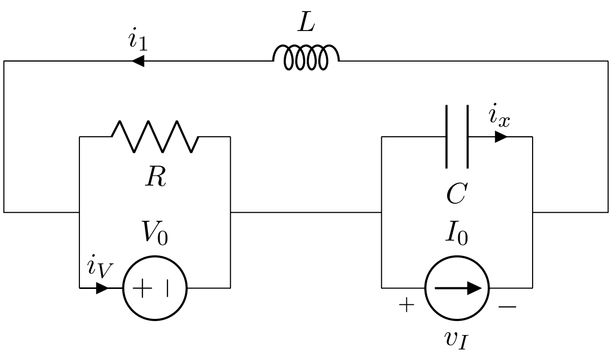
(a) [3 p.] Uttryck strömmen i_1 i de kända storheterna.

(b) [7 p.] Beräkna den komplexa effekten för varje komponent **och** ange huruvida komponenten absorberar, eller levererar, aktiv och/eller reaktiv effekt. Antag här att $R = 1$ [Ω], $Z_c = -j$ [Ω], $Z_L = 2j$ [Ω], $V_0 = 1+j$ [V], $I_0 = j$ [A] och $i_1 = -1$ [A]. (Ställ upp uttrycken i de kända storheterna och förenkla **innan** värden används. Därmed visas förståelse för problemet.)



(c) [2 p.] I en annan situation så utvecklar en källa den komplexa effekten $S = -j$. Plotta den momentana effekten som utvecklas i en, till källan kopplad, komponent och bestäm energin i denna komponent.

Lösningsförslag
(2a)



$$KVL:\ -V_0 - Z_c i_x - Z_L i_1 = 0 \tag{13}$$

$$KCL:\ -I_0 - i_x + i_1 = 0 \rightarrow \tag{14}$$

$$-V_0 - Z_c(i_1 - I_0) - Z_L i_1 = 0 \rightarrow i_1 = \frac{Z_c I_0 - V_0}{Z_c + Z_L} = \frac{\frac{1}{j\omega C} I_0 - V_0}{\frac{1}{j\omega C} + j\omega L} \tag{15}$$

(2b)

$$i_x = i_1 - I_0 = -1 - j \tag{16}$$

$$\text{KCL:}\ -i_1 + \frac{V_0}{R} + i_V = 0 \rightarrow i_V = -2 - j \tag{17}$$

$$v_I = Z_c i_x = -j(-1 - j) = -1 + j \tag{18}$$

$$S_R = |V_0|^2/R = \sqrt{1^2+1^2}^2/1 = 2 \tag{19}$$

$$S_L = Z_L|i_1|^2 = 2j\sqrt{1^2}^2 = 2j \tag{20}$$

$$S_C = Z_c|i_x|^2 = -j\sqrt{1^2+1^2}^2 = -2j \tag{21}$$

$$S_{V_0} = V_0 i_v^* = (1+j)(-2-j)^* = -3-j \tag{22}$$

$$S_{I_0} = v_I I_0^* = (-1+j)(j)^* = 1+j \tag{23}$$

$$\text{test:} \tag{24}$$

$$\sum P = 2-3+1 = 0, ok \tag{25}$$

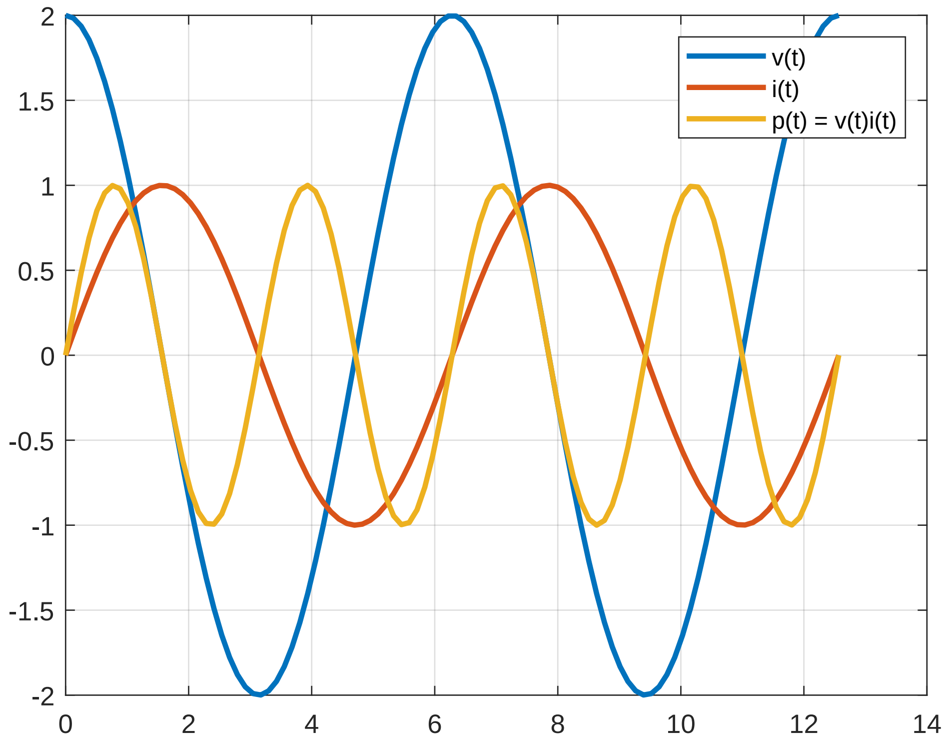
$$\sum Q = 2-2-1+1 = 0, ok \tag{26}$$

(2c)
Komponenten måste absorbera $S = j$ om källan utvecklar $S = -j$, enligt $\sum S = 0$. Det betyder att spänningen över och strömmen komponenten är fasförskjutna $\pi/2$. Det gör att $p(t) = v(t)i(t)$ blir symmetrisk runt x-axlen och över en period kommer lika mycket energi att levereras som absorberas så netto blir noll. Detta kunde man förvänta sig av en helt reaktiv effekt. T.ex. får vi:

$$S = j = \frac{1}{2}VI^* = \frac{1}{2}2e^{j0}\left(1e^{-j\pi/2}\right)^* = 1e^{j*\pi/2} = j \rightarrow \tag{27}$$

$$v(t) = 2cos(\omega t) \tag{28}$$

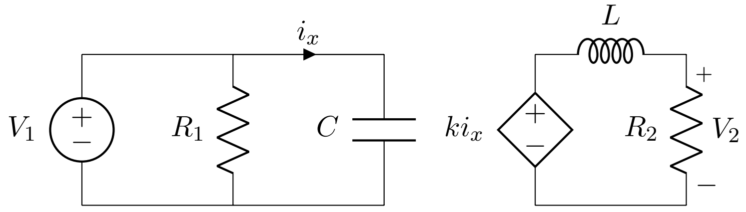
$$i(t) = 1cos(\omega t - \pi/2) \tag{29}$$



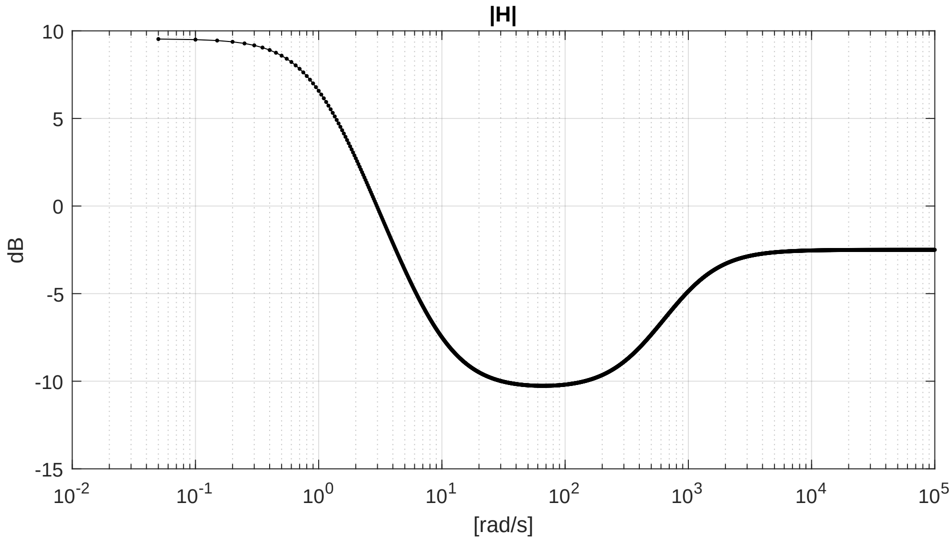
Uppgift 3 [9 p.]

(a) [3 p.] Visa att överföringsfunktionen för kretsen nedan kan skriva såsom $H(\omega) = \left(j\frac{\omega}{\omega_1}\right)\left(\frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_2}}\right)$.

(b) [3 p.] Antag nu att $R_1 = R_2 = 1$ [kΩ], $C = 0.1$ [F], $L = 10$ [H], $k = 1$ [Ω] och plotta förstärkningen. Det är viktigt att intressanta frekvenser och nivåer blir korrekta.



(c) [3 p.] Ange överföringsfunktionen $H(\omega)$ för förstärkning som ges nedan.



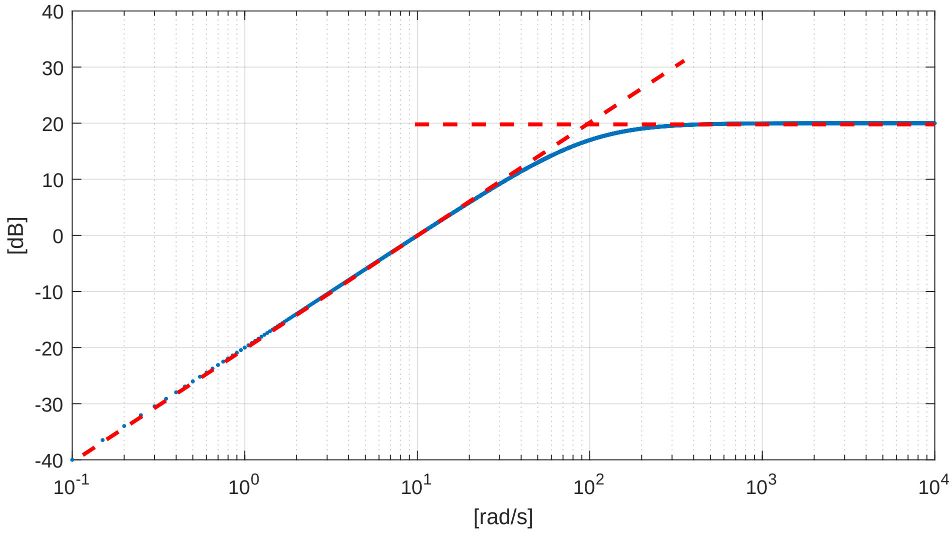
Lösningsförslag
(3a)

$$i_x = V_1/Z_c = V_1 j\omega C \tag{30}$$

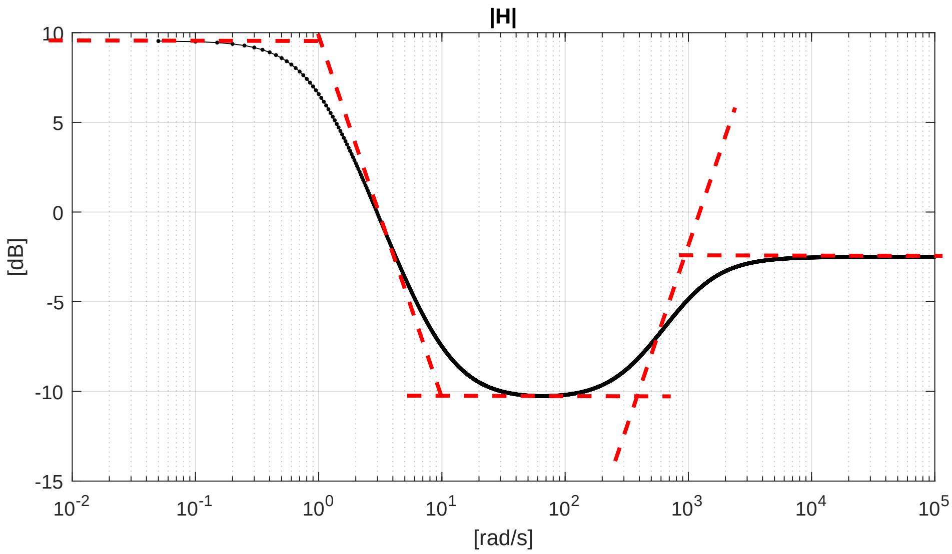
$$V_2 = k i_x \frac{R_2}{R_2 + j\omega L} = V_1 j\omega C k \frac{R_2}{R_2 + j\omega L} = V_1 j\omega C k \frac{1}{1 + j\omega L \frac{1}{R_2}} \rightarrow \tag{31}$$

$$H = \frac{V_2}{V_1} = \frac{j\frac{\omega}{\frac{1}{Ck}}}{1 + j\frac{\omega}{R_2/L}} \tag{32}$$

(3b)
Med de givna värdena får vi $\omega_1 = 10$ och $\omega_2 = 100$. Förstärkningen, $|H|$ ser ut som nedan. Den stigande kurvan (20dB/dekad) skär x-axeln ($|H| = 0$) vid ω_1 och vid ω_2 vrids kurvan ner pga polen här.



(3c)
Genom att titta på kurvan vid låga frekvenser får vi att $K \approx 10^{10/20} \approx 3$ (pga. $20log_{10}(3) \approx 10$). Nu undersöker vi var kurvan ändrar riktning, dvs där den böjer upp (nollställe, +20dB/dekad) eller ned (poler, -20dB/dekad). Vår approximativa kurva ser ut såsom nedan:



$$H = K \frac{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_2}\right)\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_3}\right)}{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_1}\right)\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_4}\right)} \tag{33}$$

$$k = 3, \omega_1 = 1; \omega_2 = 10; \omega_3 = 400; \omega_4 = 1000 \tag{34}$$

$$\tag{35}$$

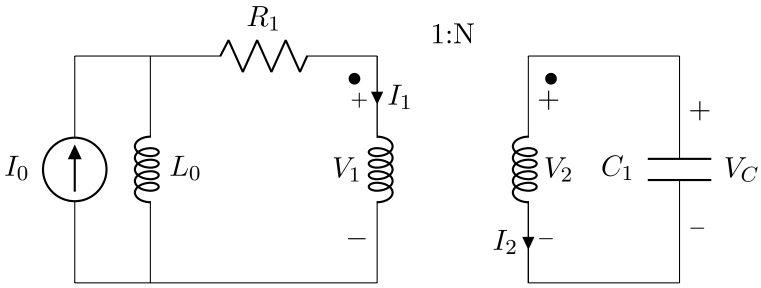
Uppgift 4 [6 p.]

Troligen mars, 2043.
Ingenjören stötte ibland fortfarande på andra människor runt omkring det som förrut vara centrala Stockholm men det gick allt längre emellan tillfällena. De få gånger det faktiskt skedde vara människorna antingen galna eller apatiska på grund av allt kaos (apokalypsen är känd för att ha den biverkningen på folk) eller små rövarband som låg i bakhåll, redo att avlasta stackars förbipasserande på sina sista vattenflaskor, matbitar eller andetag. Ingenjören tittade sig omkring och började försiktigt röra sig nerför gatan. Det var besvärligt att ta sig fram, speciellt med risken att råka störa Carnivorous Tulipas fröpuppor som stod och svajade i förmiddagsbrisen, men även för att inte råka skada sig själv eller sin packning. Det fanns inga nyleveranser den här sidan om domedagen och de som bröt ett ben var det inte mycket mer med. Ingenjören svängde upp på resterna av Danderydsgatan och in i det kvarter som för ungefär 160 år sedan döpts till Näktergalen. Mellan ruinerna kunde man härifrån svagt ana den enorma krater som var det enda som fanns kvar av det som en gång hade varit Tekniska högskolan, sedan de förgiftade och förvirrade forskarnas experiment löpt amok. Två omkullvräkta bilvrak fick tjäna som tillfälligt bo, beslutade Ingenjören, och kröp in i utrymmet mellan bilar. Det var trångt, men i alla fall torrt och varmt, och härifrån kunde Ingenjören använda en radiosändare ostört för att försöka nå andra överlevare.
Ingenjören tog fram sin radiosändare, det var en gammal modell; en (rent) induktiv Norton-ekvivalent källa som vara kopplad till en ideal transformator på primärsidan, genom en serieresistans, och på sekundärsidan fanns det en (rent) kapacitiv last i formen av en antenn. Den ideala transformatorn hade ett justerbart lindningsförhållande på 1:N och samverkande flöden mellan primär- och sekundärsidan.

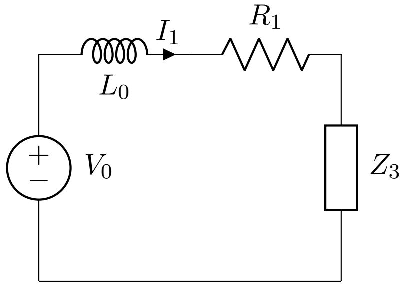
(a) [3 p.] Antag att du känner till kretsens komponentvärden, hjälp då Ingenjören att få så stark sändning som möjligt genom att uttrycka N för detta i de kända storheterna. Du måste använda dig av en ideal transformator.

(b) [3 p.] Uttryck, i de kända storheterna, den komplexa effekten som utvecklas i antennen.

Lösningsförslag
(4a)
Detta kan vara ett konceptuellt svårt problem som testar studenters förmåga att ta in och återge information samt modelera kretsar men även att fundera över resultatet.
Ingenjörens krets som vi ska analysera ser ut såsom nedan, notera riktningen på strömkällan i Norton-ekvivalenten (enligt definitionen), serieresistansen och placeringen av prickarna och definitionen av strömmarnas riktningar pga det samverkande flödet:



Det finns, i stort sett, två olika sätt att tolka frågan kring ”utsändningen” (det underlättar att transformatorn är ideal): Ett sätt är att man ska ha så stor spänning över lasten/antennen, dvs V_C som möjligt. Vi gör en källtranformation så att Norton-ekvivalenten blir en Thevenin-ekvivalent med $V_0 = I_0 j\omega L_0$ och $j\omega L_0$ i serie med R_1. Impedansen sedd genom transformatorn är $Z_3 = \left(\frac{1}{N}\right)^2 Z_C$. Situationen kan ses som:



Ur detta får vi nu:

$$V_2 = V_C = -I_2 \frac{1}{j\omega C_1} \tag{36}$$

$$I_2 = -I_1 \frac{1}{N} \tag{37}$$

$$I_1 = I_0 j\omega L_0 \frac{1}{j\omega L_0 + R_1 + \left(\frac{1}{N}\right)^2 \frac{1}{j\omega C_1}} \rightarrow \tag{38}$$

$$V_C = \frac{I_0 j\omega L_0}{j\omega C_1 N \left(j\omega L_0 + R_1\right) + \frac{1}{N}} \tag{39}$$

Här har vi ett utryck som vi kan maximera genom att minimera nämnaren (som har formen ”$a * x + 1/x$”). Det man måste tänka på är att N måste vara ett heltal.

Det andra sättet man kan tänka sig att tolka uppgiften är att man ska ha, maximal effektöverföring, och använda sig av konjugatanpassning. Thevenin-impedansen för den delen av kretsen till vänster om transformator blir (med nollställd strömgenerator) $Z_{TH} = R_1 + j\omega L_1$. Impedansen som ses genom transformatorn blir som tidigare $Z_3 = \frac{Z_C}{N^2}$ och vi ska uppfylla $Z_3 = Z_{TH}^*$. Vi får:

$$Z_C \left(\frac{1}{N}\right)^2 = R_1 - j\omega L_0 \rightarrow N = \sqrt{\frac{Z_C}{R_1 - j\omega L_0}} = \sqrt{\frac{1}{j\omega C \left(R_1 - j\omega L_0\right)}} \tag{40}$$

Men, häri finns ett problem eftersom konjugatanpassning maximerar den aktiva effekten i lasten och eftersom lasten (C) är rent kapacitiv så kommer ingen aktiv effekt utvecklas här oavsett värde vi väljer på N. Därtill, en annan underlig sak man får här är att N är komplext vilket inte kan realiseras. "Problemet" ligger i att vi hade "1:N" och när vi beräknar lasten som vi ser genom transformatorn använder vi ju egentligen $Z_3 = \frac{1}{n^2} Z_C$, där $n = N_2/N_1$ så det är förhållandet mellan lindningsvarven som används men eftersom $N_1 = 1$ går inte N_2 att realisera.

———————————————-

(4b)
Den komplexa effekten som utvecklas i Z_C fås återigen genom att beräkna strömmen genom C såsom:

$$I_2 = -I_1 \frac{1}{N} \tag{41}$$

$$I_1 = I_0 j\omega L_0 \frac{1}{j\omega L_0 + R_1 + \left(\frac{1}{N}\right)^2 \frac{1}{j\omega C_1}} \tag{42}$$

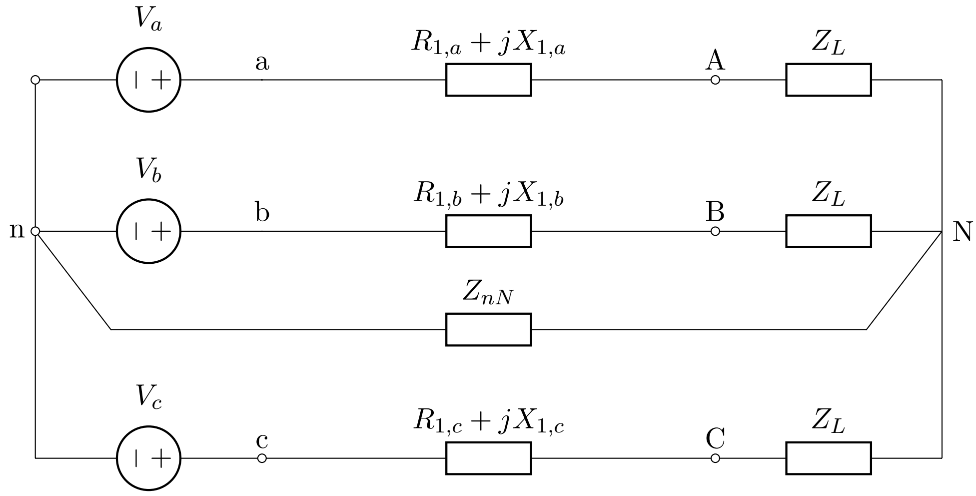
$$I_2 = \frac{-I_0 j\omega L_0}{N(j\omega L_0 + R_1) + \frac{1}{N}\frac{1}{j\omega C_1}} \rightarrow \tag{43}$$

$$S_c = Z_c \left|I_2\right|^2 = \frac{-j}{\omega C_1} \left| \frac{-I_0 j\omega L_0}{N(j\omega L_0 + R_1) + \frac{1}{N}\frac{1}{j\omega C_1}} \right|^2 \tag{44}$$

$$\tag{45}$$

Uppgift 5 [4 p.]

Ge de korrekta svaren på flervalsfrågorna. Endast <u>ett</u> svar på varje fråga är rätt och ingen motivering behövs.



1. [1 p.] Vilket alternativ representerar en balanserad trefaskälla (cosinus som referens och abc sekvens)?

   (a) $V_a = 2\angle 90°$, $V_b = \sqrt{4}\cos(\omega t - 30°)$, $V_c = -2j$
   (b) $V_a = 2 - 2j$, $V_b = \sqrt{8}\cos(\omega t - 120°)$, $V_c = \sqrt{8}\angle 120°$
   (c) $V_a = \sqrt{9}e^{j\cdot 0}$, $V_b = 3\angle - 120°$, $V_c = \sqrt{3}\cos(\omega t + 120°)$
   (d) inget av ovan

2. [1 p.] I ett balanserat trefassystem (som ovan) där en reaktiv effekt Q absorberas av trefaskällan, hur mycket utvecklar då impedanserna i en enskild fas?

   (a) Q
   (b) $Q/3$
   (c) $-Q/3$
   (d) $-Q$

3. [1 p.] Vad är den momentana effekten som utvecklas i Z_{nN} för ett balanserat trefassystem?

   (a) $\propto |R_{1,a} + R_{1,b} + R_{1,c}|$
   (b) $\cos(\pi/2)$
   (c) $3 * |V_a|^2 \frac{1}{Z_{nN}}$
   (d) $\propto |Z_{nN}|$

4. [1 p.] Om effektfaktorn för en last är 0.5, vad kan vi då säga om lasten?

   (a) inget av nedan
   (b) den är induktiv
   (c) den är kapacitiv
   (d) den är resistiv

Lösningsförslag
(5)
d,c,b,a
Kommentar till 5.4):
Med $pf = 0.5$ vet vi inte om den är induktiv eller kapacitiv eftersom $cos(\pm 60°) = 0.5$. Därtill, även om vu ser att det måste finnas en resistans i lasten så kan man inte säga att den är dominerande vid denna effektfaktor.