KTH ei1110 Elkretsanalys (utökad kurs) CELTE, tentamen TEN1 2020-10-22 kl 08–13.

Hjälpmedel: Inga extra hjälpmedel är tillåtna.

Alla källor ska antas vara likströmskällor och beteckningar såsom V_0, I_1 etc. beskriver amplituden hos dessa. Om ingen annan information ges ska komponenter antas vara ideala. Angivna värden hos komponenter (t.ex. R för ett motstånd, V för en spänningskälla) ska antas vara kända storheter och andra markerade storheter (t.ex. strömmen genom, eller spänningen över, ett motstånd) ska antas vara okända storheter. Om inget annat framgår, antag stationärt tillstånd, dvs. lång tid efter att alla komponenter har kopplats ihop.
Några viktiga saker för att kunna få maximalt antal poäng:

- **Endast ett problem per sida** och text på baksidan kommer inte att beaktas.
- Tänk på att er handstil måste vara tydlig för att lösningen ska kunna bedömas. **Kan vi inte läsa, kan vi inte ge poäng!** Använd **inte rödpenna**.
- Lösningarna bör som oftast uttryckas i de kända storheterna och förenklas **innan** eventuella värden används. Därmed visas förståelse för problemet.
- **Ge alltid din krets** och var tydlig med diagram och definitioner av variabler. Tänk på hur du definierar polariteten och riktningen på de spänningar och strömmar du använder. **Använd passiv teckenkonvention**. Om det fattas figur med definierade variabler utsatta kan det bli **avdrag** vid tvetydighet.
- Därtill, dela tiden mellan talen och kontrollera svarens rimlighet genom t.ex. dimensionsanalys eller alternativ lösningsmetod.

Betygsgränserna är: 50% (E), 60% (D), 70% (C), 80% (B), 90% (A).
För (Fx) krävs $> 45\%$ samt att inte mer än ett tal har poängen x sådan att $0 < x < 50\%$. (Med detta menas att för att få Fx får endast ett tal dra ner resultatet under godkänt.)

Examinator: Daniel Månsson (08 790 9044)

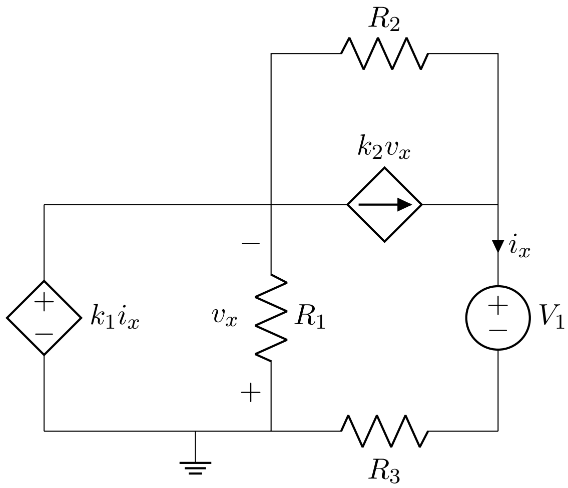
Lycka till och ta det lugnt!

Uppgift 1 [10 p.]

För kretsen nedan:

(a) [4 p.] Bestäm i_x, uttryckt i de kända storheterna[1].

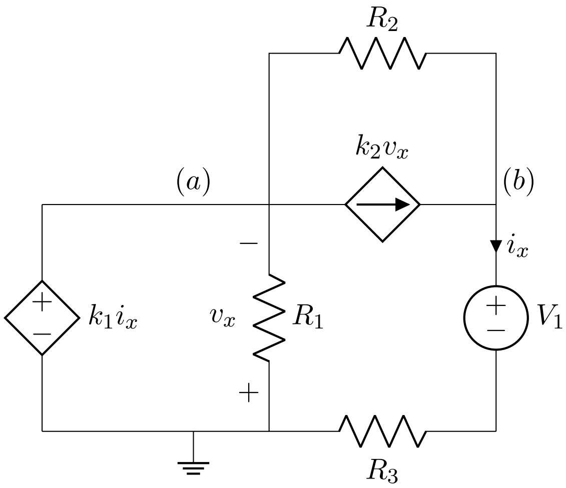
(b) [6 p.] Beräkna effekten som utvecklas i varje komponent. Du *måste* använda passiv teckenkonvention och vara tydlig med hur dina strömmar och spänningar definieras. Antag här att $k_1 = 1\ \Omega$, $k_2 = -2\ \frac{1}{\Omega}$, $R_1 = 1\ \Omega$, $R_2 = R_3 = 2\ \Omega$, $V_1 = 1$ V samt att $i_x = 1$ A. Lösningen **ska** uttryckas i de kända storheterna och förenklas **innan** eventuella värden används. Därmed visas förståelse för problemet. (Kontrollera att din lösning stämmer genom att kontrollera att $\sum P = 0$.)



Lösningsförslag

(1a)

[1] Se framsidan för vilka dessa kan vara.



Vi har att:

$$v_a = k_1 i_x \tag{1}$$

$$v_x = -v_a = -k_1 i_x \tag{2}$$

$$i_x = \frac{v_b - V_1 - 0}{R_3} \rightarrow v_b = i_x R_3 + V_1 \tag{3}$$

Vi gör en KCL vid (b):

$$-k_2 v_x + \frac{v_b - v_a}{R_2} + i_x = 0 \rightarrow \tag{4}$$

$$-k_2(-k_1 ix) + \frac{1}{R_2}((i_x R_3 + V_1) - k_1 i_x) + i_x = 0 \leftrightarrow \tag{5}$$

$$i_x = \frac{V_1}{k_1 - R_2 - R_3 - k_1 k_2 R_2} \tag{6}$$

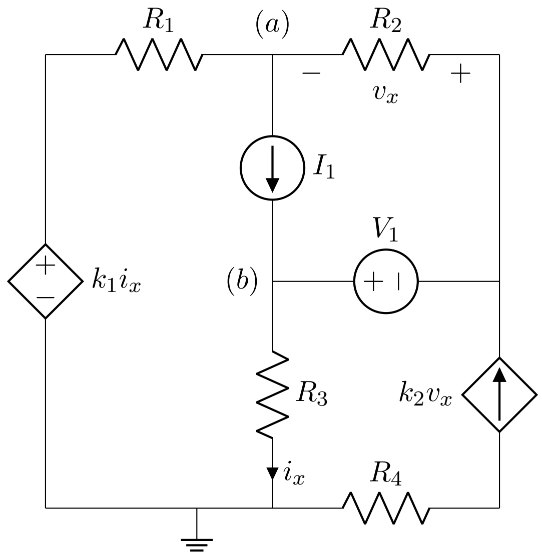
(1b)
Med de värdena får vi att $v_a = 1$, $v_b = 3$ och $v_x = -1$. Därtill, i_y är strömmen som går ner (från "+" till "-") genom $k_1 i_x$ och fås ur en KCL vid (a):

$$i_y + \frac{k_1 i_x}{R_1} + k_2 v_x + \frac{k_1 i_x - (i_x R_3 + V_1)}{R_2} = 0 \rightarrow i_y = -2 \tag{7}$$

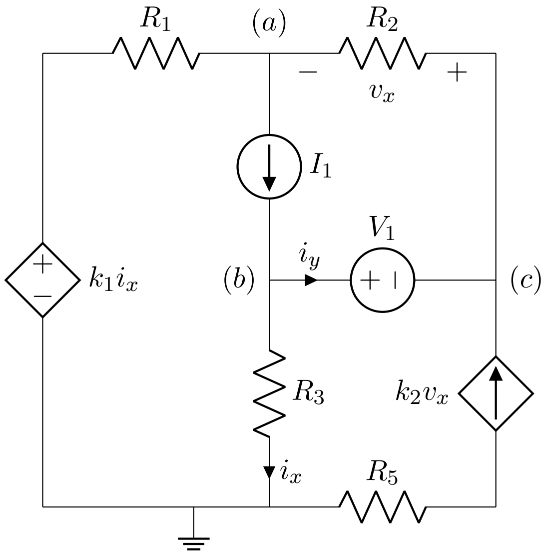
$$P_{V_1} = V_1 i_x = 1 \tag{8}$$
$$P_{R_3} = i_x^2 R_3 = 2 \tag{9}$$
$$P_{R_1} = v_x^2 \frac{1}{R_2} = 1 \tag{10}$$
$$P_{R_2} = (v_a - v_b)^2 \frac{1}{R_2} = 2 \tag{11}$$
$$P_{k_2} = (v_a - v_b) k_2 v_x = -4 \tag{12}$$
$$P_{k_1} = k_1 i_x i_y = -2 \rightarrow \tag{13}$$
$$\sum P = 0 \tag{14}$$

Uppgift 2 [7 p.]

För kretsen här nedan, använd nodanalys och sätt upp ekvationssystemet (där termerna är samlade) för de angivna noderna a och b. Ekvationssystemet ska endast innehålla kända storheter samt nodpotentialerna men behöver inte lösas för nodpotentialerna.



Lösningsförslag
(2)
Vi definierar noden (c) och strömmen i_y.



$$KCL_a\colon \ \frac{v_a - k_1 i_x - 0}{R_1} + I_1 + \frac{v_a - v_c}{R_2} = 0 \tag{15}$$

$$KCL_b\colon \ - I_1 + \frac{v_b - 0}{R_3} + i_y = 0 \tag{16}$$

$$KCL_c\colon \ - i_y + \frac{v_c - v_a}{R_2} - k_2 v_x = 0 \tag{17}$$

$$\tag{18}$$

Därtill har vi att $i_x = \frac{v_b}{R_3}$, $v_x = v_c - v_a$ och $v_b - V_1 = v_c$, vilket ger oss:

$$KCL_a\colon \ \frac{v_a - k_1 \frac{v_b}{R_3}}{R_1} + I_1 + \frac{v_a - (v_b - V_1)}{R_2} = 0 \tag{19}$$

$$KCL_b\colon \ - I_1 + \frac{v_b}{R_3} + \frac{(v_b - V_1) - v_a}{R_2} - k_2((v_b - V_1) - v_a) = 0 \rightarrow \tag{20}$$

$$KCL_a\colon \ v_a \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + v_b \left(\frac{-k_1}{R_1 R_3} - \frac{1}{R_2} \right) = -I_1 - \frac{V_1}{R_2} \tag{21}$$

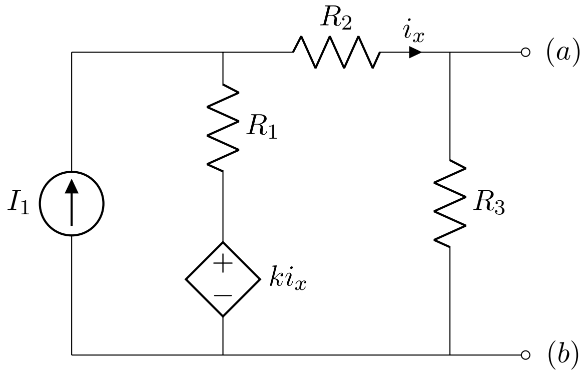
$$KCL_b\colon \ v_a \left(\frac{-1}{R_2} + k_2 \right) + v_b \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_2} - k_2 \right) = I_1 + \frac{V_1}{R_2} - k_2 V_1 \tag{22}$$

Uppgift 3 [10 p.]

För kretsen här nedan:

(a) [8 p.] Bestäm Thevenin- och Norton- ekvivalenten, uttryckt i de kända storheterna, sett in i porten (a-b). Antag här att $k = 1\ \Omega$, $R_1 = R_2 = R_3 = 1\ \Omega$ samt att $I_1 = 1$ A. Dellösningarna **ska** uttryckas i de kända storheterna och förenklas **innan** eventuella värden används. Därmed visas förståelse för problemet.

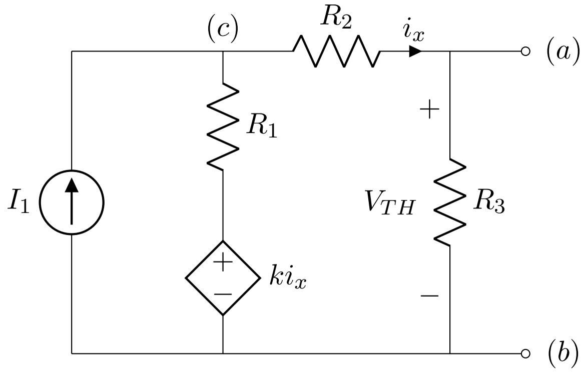
(b) [2 p.] Antag att du experimenterar med en högtalare (som här kan representeras av en enda variabel resistans, R_L) kopplat till porten (a-b) i kretsen. Plötsligt, finner du att vid R' så låter det som mest. Förklara med ord, krets och ekvationer hur du kan erhålla värdet på R' och P' (då $R_L = R'$) utifrån vad du nu vet om ekvivalenten.



Lösningsförslag

(3a)

Eftersom vi har en beroende källa så måste vi beräkna V_{TH} och I_N var för sig. $V_{TH} = v_a - v_b = v_a - 0$ om vi sätter v_b som vår referens. Enligt Ohms lag har vi att $V_{TH} = i_x R_3 = v_a$ så vi söker efter i_x med en KCL och benämner noden vid I_1, R_1 som (c):



$$KCL_c\colon\ -I_1 + \frac{v_c - ki_x}{R_1} + \frac{v_c - v_a}{R_2} = 0 \qquad (23)$$

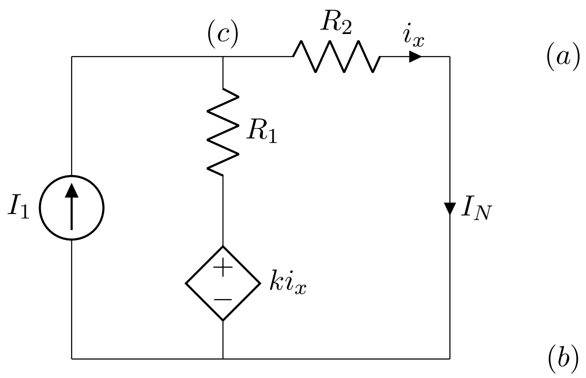
$$KCL_a \text{ (eller spänningsdelning):}\ \rightarrow v_c = v_a \left(\frac{R_3 + R_2}{R_3}\right) \qquad (24)$$

$$KCL_c\colon\ -I_1 + v_a \left(\frac{R_3 + R_2}{R_3}\right)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) + \frac{v_a}{R_2} - \frac{ki_x}{R_2} = 0 \rightarrow \qquad (25)$$

$$KCL_c\colon\ -I_1 + (R_3 i_x) \left(\frac{R_3 + R_2}{R_3}\right)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) + \frac{(R_3 i_x)}{R_2} - \frac{ki_x}{R_2} = 0 \rightarrow \qquad (26)$$

$$i_x = \frac{1}{2} \rightarrow v_a = V_{TH} = R_3 i_x = \frac{1}{2}[V] \qquad (27)$$

För I_N så kortsluter vi porten och vi får:



$$KCL_C:\ -I_1 + \frac{v_c - ki_x}{R_1} + i_x = 0 \qquad (28)$$

$$\text{Ohms lag: } v_c = R_2 i_x \rightarrow \qquad (29)$$

$$KCL_C:\ -I_1 + \frac{R_2 i_x - ki_x}{R_1} + i_x = 0 \rightarrow \qquad (30)$$

$$i_x = I_N = 1 \qquad (31)$$

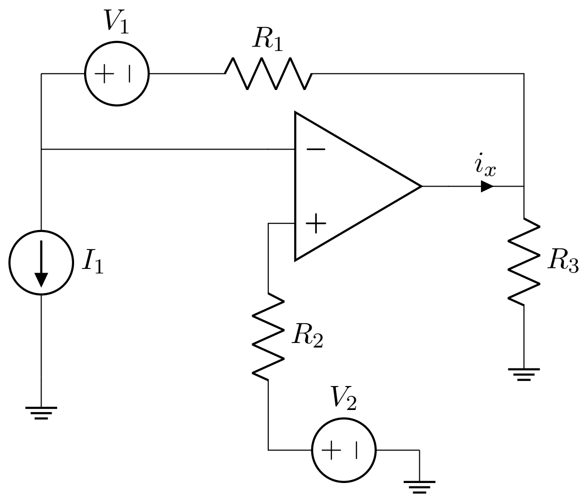
Med $R_{TH} = V_{TH}/I_N = \frac{1}{2}$ kan vi skapa våra ekvivalenter.

(3b)
Vi vet att om högtalare låter som mest kan vi anta att maximalt med effekt utvecklas i den och då gäller att lasten uppfyller $R_{last} = R_{TH}$ och får vi med ekvivalenten:

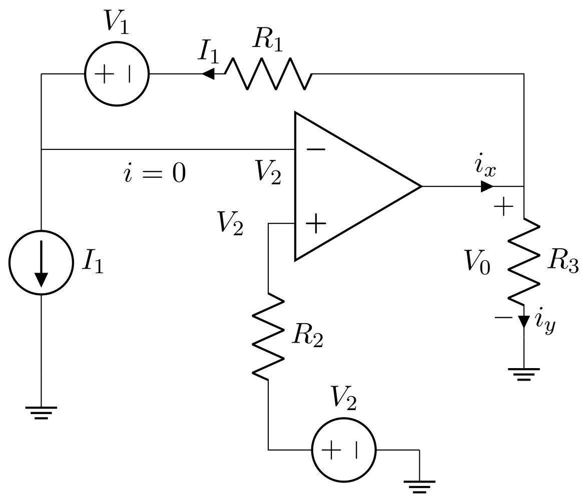
$$P' = P_{max} = \frac{V_{TH}^2}{4R_{TH}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{4\frac{1}{2}} = \frac{1}{8} \qquad (32)$$

Uppgift 4 [4 p.]

Bestäm, uttryckt i de kända storheterna, i_x i kretsen nedan.



Lösningsförslag
(4a)



Vi vet att ingen ström flyter in i operationsförstärkaren och att ingångarna har samma potential vilket ger att $v_+ = v_- = V_2$. Vi definierar en ström som flyter ner genom R_3

såsom i_y och vi får då att $V_0 = R_3 i_y$. En KVL från V_2 ger oss:

$$\text{KVL: } +V_2 - V_1 + I_1 R_1 - R_3 i_y \tag{33}$$
$$\text{KCL: } -i_x + I_1 + i_y = 0 \rightarrow \tag{34}$$
$$i_x = I_1 + \frac{V_2 - V_1 + I_1 R_1}{R_3} \tag{35}$$

Uppgift 5 [6 p.]

Kretsen nedan befinner sig i jämviktstillstånd men vid $t = 0$ nollställs[2] I_1 och brytaren stängs. Bestäm, som funktion av de kända storheterna:

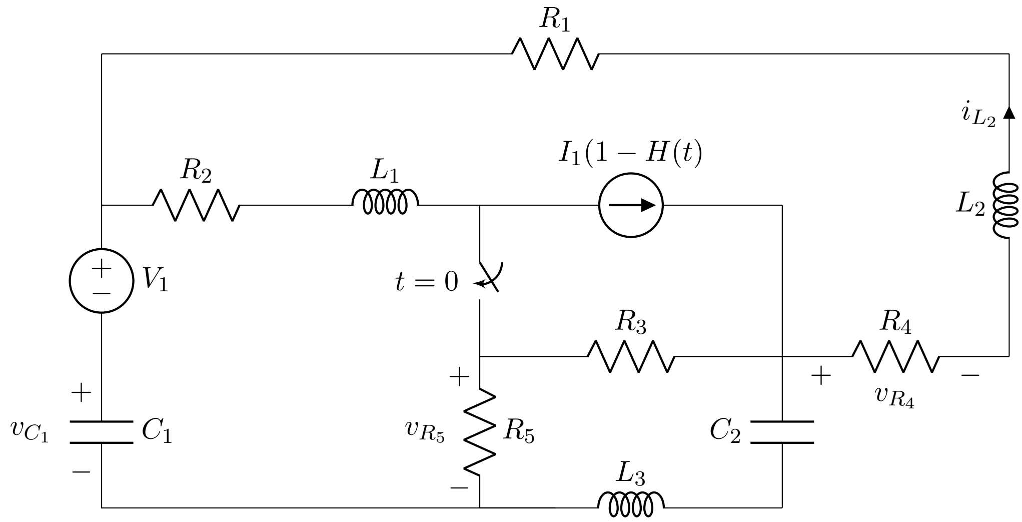
(a) [1 p.] $i_{L_2}(0^-)$

(b) [1 p.] $v_{R_5}(0^-)$

(c) [2 p.] $v_{C_1}(0^-)$

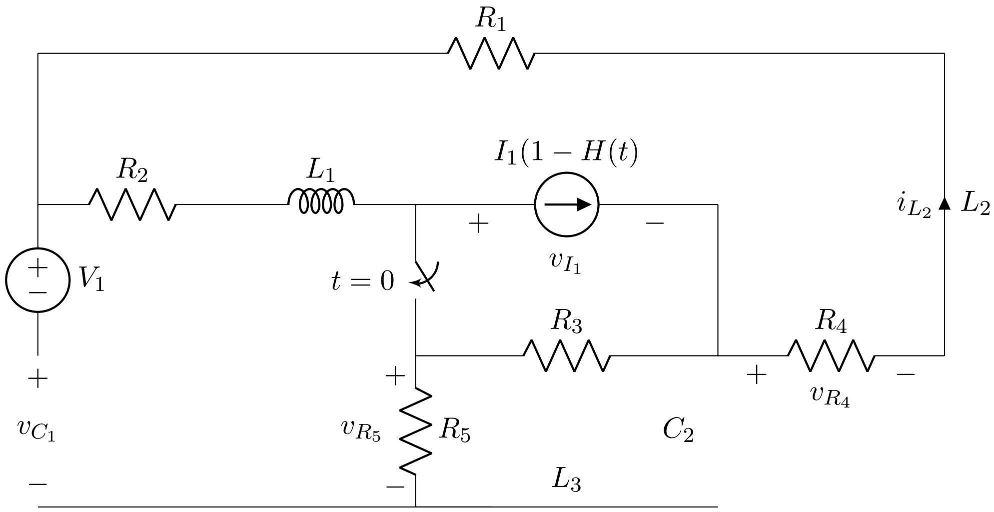
(d) [1 p.] $i_{L_2}(0^+)$

(e) [1 p.] $v_{R_4}(t \rightarrow \infty)$



Lösningsförslag
$t = 0^-$

[2] $H(t)$ är Heavisides stegfunktion vid $t = 0$



(a) $i_{L_2}(0^-) = I_1$

(b) $v_{R_5}(0^-) = 0$, ty ingen ström flyter i denna grenen.

(c) $v_{C_1}(0^-)$; en KVL ger oss att $v_{I_1} = -I_1(R_1 + R_2 + R_4)$ och sen en till KVL ger oss $v_{C_1} + V_1 - I_1 R_2 - v_{I_1} - 0 * (R_3 + R_5) = 0 \rightarrow v_{c_1} = -V_1 - I_1(R_1 + R_4)$.

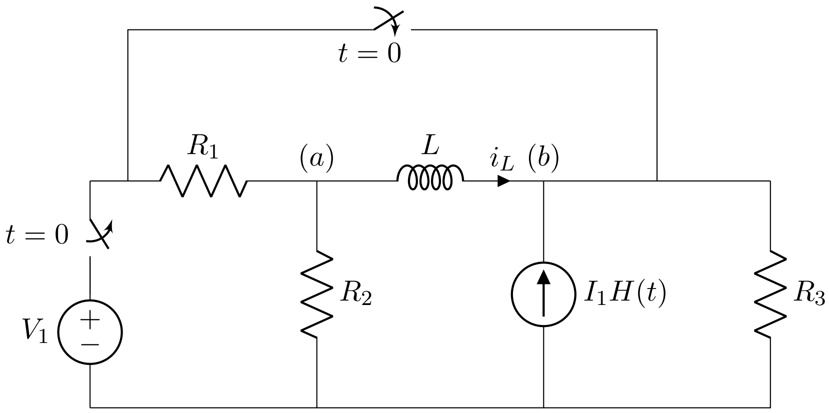
Alternativt, och enklare, gör man en KVL över stora slingan och får direkt: $+v_{C_1} + V_1 + I_1 R_1 + I_1 R_4 = 0 \rightarrow v_{c_1} = -V_1 - I_1(R_1 + R_4)$.

(d) $i_{L_2}(0^+) = i_{L_2}(0^-) = I_1$ pga strömtrögheten i induktansen.

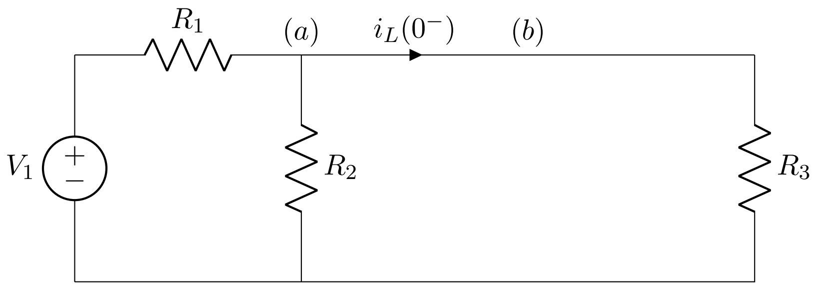
(e) $v_{R_4}(t \rightarrow \infty) = 0$, när $t \rightarrow \infty$ är I_1 nollställd (dvs. öppen) och brytaren sluten men annars ser kretsen ut på samma sätt som för $t = 0^-$ (pga att situationen är återigen stationär) och ingen källan är in kopplad så ingen ström flyter i kretsen.

Uppgift 6 [8 p.]

Kretsen nedan befinner sig i jämviktstillstånd men vid $t = 0$ slås brytarna om och I_1 sätts på. Bestäm, som funktion av tiden, och de kända storheterna, $i_L(t > 0)$. Antag att $R_1 = R_2 = R_3 = R\ \Omega$. Lösningarna **ska** uttryckas i de kända storheterna och förenklas **innan** eventuella värden används. Därmed visas förståelse för problemet.



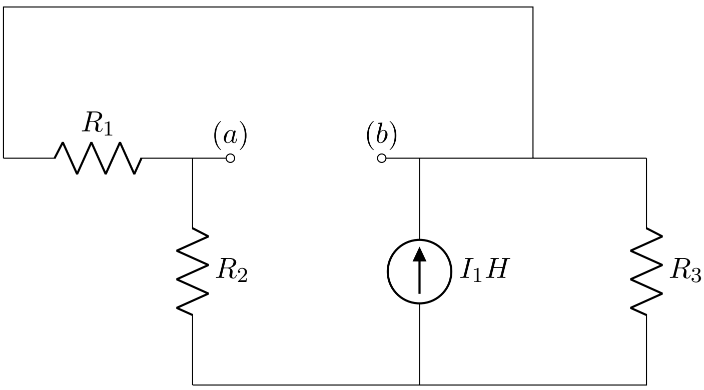
Lösningsförslag
Vi tittar på strömmen vid $t = 0^-$ (som kommer att bli vårt begynnelsevilkor senare) sen vi beräknar Thevenin-ekvivalenten av kretsen som spolen ser och använder detta för att lösa den ODE som uppkommer. Vid $t = 0^-$ har vi:



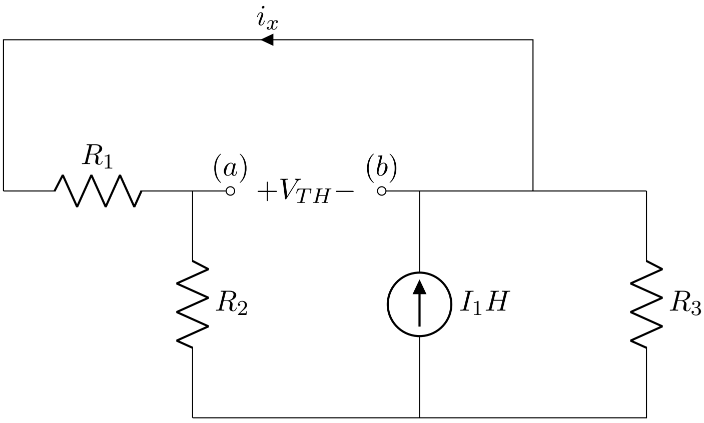
En källtransformation på V_1 och R_1 (där spänningskällan i serie med R_1 blir en strömkälla parallellt med R_1) följt av en strömdelning ger att:

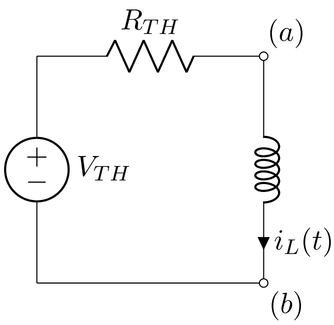
$$i_L(0^-) = \frac{V_1}{R_1}\left(\frac{\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}}{R_3 + \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}}\right) = \frac{V_1}{3R} \tag{36}$$

$t = 0^+$, nu slår brytarna om samt I_1 kopplas på. Kretsen som blir, förutom spolen, ser ut som: ——————-



Det är denna krets som driver nu strömmen genom spolen (förtum begynnelsevärdet). Vi analyserar detta lättast genom att gör om det till en Thevenin-ekvivalent (alternativ kan vi också göra nodanalys i (a) och (b)). Vi börjar med R_{TH} som vi, här, kan få genom att nollställa I_1 (dvs "öppen"). Sett in i porten $(a-b)$ har vi då resistansen $R_{TH} = R_1//(R_2+R_3) = \frac{R_1(R_2+R_3)}{R_1+R_2+R_3}$. Nu behöver vi VTH (eller I_N om vi vill det istället) som sätts efter passiv tecken konvention för strömmen genom spolen. Vi får fram V_{TH} genom en strömdelning för att få strömmen, i_x genom R_1 eftersom $V_{TH} = -R_1 i_x$ (på grund av strömriktningen som är vald). En strömdelning ger oss $i_x = I_1 \frac{R_3}{R_3+(R_1+R_2)}$ som ger oss då $V_{TH} = -R_1 i_x = -\frac{1}{3} R I_1$.





Nu kan vi enklare studera hur $i_L(t)$ utvecklas med tiden. Vi gör en KVL och får:

$$+V_{TH} - i_L(t)R_{TH} - L\frac{di_L}{dt} = 0 \rightarrow \tag{37}$$

$$\frac{di_L(t)}{dt} + i_l(t)\frac{R_{TH}}{L} = \frac{V_{TH}}{L} \tag{38}$$

Detta är på samma form som $\dot{y} + ay = b$ vilket vi vet löses av $y(t) = \frac{b}{a} + Ke^{-at}$ där i vårt fall $a = \frac{R_{TH}}{L}$, $b = \frac{V_{TH}}{L}$ och K går att få mha initialvilkoret $i_L(0^+) = i_L(0^-) = \frac{V_1}{3R}$. Vi får då:

$$i_L(0) = \frac{V_1}{3R} = \frac{V_{TH}}{R_{TH}} + Ke^0 \rightarrow K = V_1\frac{1}{3R} + \frac{1}{2}I_1 \rightarrow \tag{39}$$

$$i_L(t) = \frac{V_{TH}}{R_{TH}} + \left(V_1\frac{1}{3R} + \frac{1}{2}I_1\right)e^{-\frac{R_{TH}}{L}t} \tag{40}$$

Vi kanske minns också att man kan skriva lösnigen på ODE'n som uppkommer på formen:

$$x(t) = x(\infty) + (x(0) - x(\infty))e^{-at} \tag{41}$$