KTH ei1110 Elkretsanalys (utökad kurs) CELTE, omtentamen TEN1 2020-12-15 kl 08–13.

Hjälpmedel: Inga extra hjälpmedel är tillåtna.

Alla källor ska antas vara likströmskällor och beteckningar såsom V_0, I_1 etc. beskriver amplituden hos dessa. Om ingen annan information ges ska komponenter antas vara ideala. Angivna värden hos komponenter (t.ex. R för ett motstånd, V för en spänningskälla) ska antas vara kända storheter och andra markerade storheter (t.ex. strömmen genom, eller spänningen över, ett motstånd) ska antas vara okända storheter. Om inget annat framgår, antag stationärt tillstånd, dvs. lång tid efter att alla komponenter har kopplats ihop.
Några viktiga saker för att kunna få maximalt antal poäng:

- **Endast ett problem per sida** och text på baksidan kommer inte att beaktas.
- Tänk på att er handstil måste vara tydlig för att lösningen ska kunna bedömas. **Kan vi inte läsa, kan vi inte ge poäng!** Använd **inte rödpenna**.
- Lösningarna bör som oftast uttryckas i de kända storheterna och förenklas **innan** eventuella värden används. Därmed visas förståelse för problemet.
- **Ge alltid din krets** och var tydlig med diagram och definitioner av variabler. Tänk på hur du definierar polariteten och riktningen på de spänningar och strömmar du använder. **Använd passiv teckenkonvention**. Om det fattas figur med definierade variabler utsatta kan det bli **avdrag** vid tvetydighet.
- Därtill, dela tiden mellan talen och kontrollera svarens rimlighet genom t.ex. dimensionsanalys eller alternativ lösningsmetod.

Betygsgränserna är: 50% (E), 60% (D), 70% (C), 80% (B), 90% (A).
För (Fx) krävs $> 45\%$ samt att inte mer än ett tal har poängen x sådan att $0 < x < 50\%$. (Med detta menas att för att få Fx får endast ett tal dra ner resultatet under godkänt.)

Examinator: Daniel Månsson (08 790 9044)

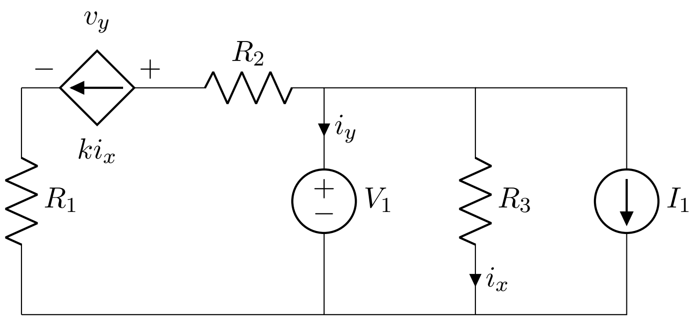
Lycka till och ta det lugnt!

Uppgift 1 [8 p.]

För kretsen nedan:

(a) [2 p.] Bestäm i_y och v_y uttryckt i de kända storheterna[1].

(b) [6 p.] Beräkna effekten som utvecklas i varje komponent. Du *måste* använda passiv teckenkonvention och vara tydlig, i din krets, med hur dina strömmar och spänningar definieras. Antag här att $k = 1$, $R_1 = 1\ \Omega$, $R_2 = R_3 = 2\ \Omega$, $V_1 = 2$ V, $I_1 = 1$ A samt att $i_y = -3$ A och $v_y = -1$ V. Effekterna **ska** först uttryckas i de kända storheterna och förenklas **innan** eventuella värden används. Därmed visas förståelse för problemet. (Kontrollera att din lösning stämmer genom att kontrollera att $\sum P = 0$.)



Lösningsförslag
(1a)

$$i_x = \frac{V_1}{R_3} \tag{1}$$

$$\text{KVL:}\ +V_1 - R_2 k i_x - v_y - R_1 k i_x = 0 \to v_y = V_1 - k\left(\frac{V_1}{R_3}\right)(R_1 + R_2) \tag{2}$$

$$\text{KCL:}\ +i_y + k i_x + i_x + I_1 = 0 \to i_y = -\left(I_1 + \frac{V_1}{R_3}(k+1)\right) \tag{3}$$

(1b)
Här är ett bra exempel på när man råkar definierar sina strömmar så att strömmarna, om man följer passiv teckenkonvention, alltid lämnar "-" terminalen på det spänningsfall man definierat och där sen värdena på visa storheter är negativa så att riktningen eller polariteten egentligen är omvänd i kretsen. Som kan ses om man gör rätt så ordnar alla

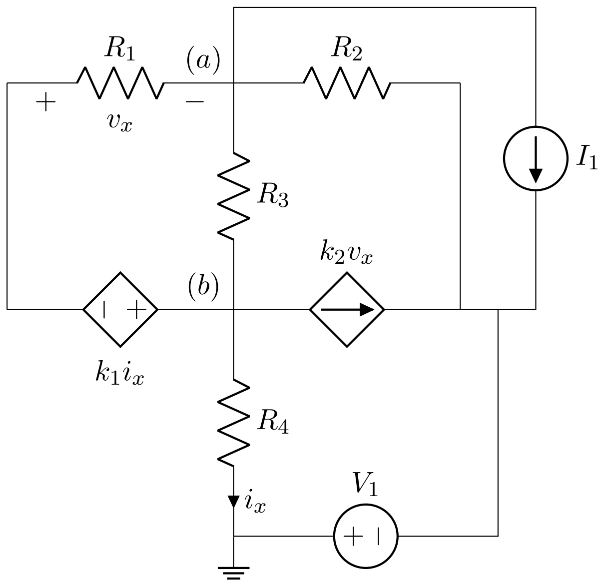
[1] Se framsidan för vilka dessa kan vara.

minustecken sig ändå.

$$P_{R_1} = R_1(ki_x)^2 = 1 \tag{4}$$
$$P_{R_2} = R_2(ki_x)^2 = 2 \tag{5}$$
$$P_{R_3} = V_1^2/R_3 = 2 \tag{6}$$
$$P_{I_1} = V_1 I_1 = 2 \tag{7}$$
$$P_{ki_x} = v_y(ki_x) = -1 \tag{8}$$
$$P_{V_1} = V_1 i_y = -6 \tag{9}$$
$$\sum P = 1 + 2 + 2 + 2 + (-1) + (-6) = 0, \text{ ok} \tag{10}$$

Uppgift 2 [6 p.]

För kretsen här nedan, använd nodanalys och sätt upp ekvationssystemet (där termerna är samlade) för de angivna noderna a och b. Ekvationssystemet ska endast innehålla kända storheter samt nodpotentialerna men behöver inte lösas för nodpotentialerna.



Lösningsförslag

Vi definierar en nod till, "c", som sitter på andra sidan den beroende strömkällan.

$$KCL_a: \quad \frac{v_a + k_1 i_x - v_b}{R_1} + \frac{v_a - v_b}{R_3} + \frac{v_a - v_c}{R_2} + I_1 = 0 \tag{11}$$

$$KCL_b: \quad \frac{v_b - k_1 i_x - v_a}{R_1} + k_2 v_x + \frac{v_b}{R_4} + \frac{v_b - v_a}{R_3} = 0 \tag{12}$$

$$i_x = \frac{v_b}{R_4} \tag{13}$$

$$KVL: \quad + v_a + v_x + k_1 i_x - v_b = 0 \rightarrow v_x = v_b \left(1 - \frac{k_1}{R_4}\right) - v_a \tag{14}$$

$$KVL: \quad 0 - V_1 - v_c = 0 \rightarrow v_c = -V_1 \tag{15}$$

$$\tag{16}$$

Samlar vi nu detta får vi ett ekvationssystem:

$$KCL_a: \; v_a \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) + v_b \left(-\frac{1}{R_1} + k_1 \frac{1}{R_1} \frac{1}{R_4} - \frac{1}{R_3}\right) = -V_1 \frac{1}{R_2} - I_1 \tag{17}$$

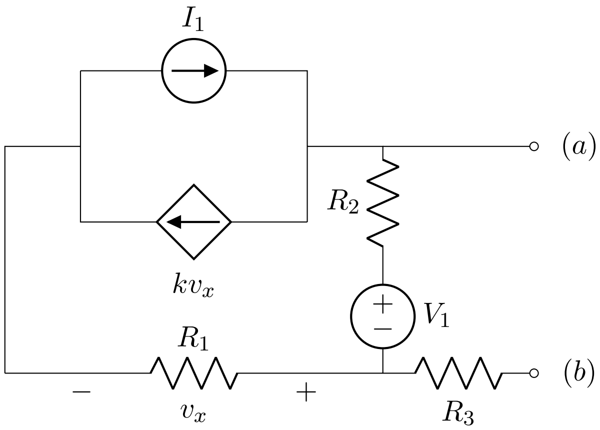
$$KCL_b: \; v_a \left(-\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_3} - k_2\right) + v_b \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_3} - k_1 \frac{1}{R_1} \frac{1}{R_4} + k_2 \left(1 - \frac{k_1}{R_4}\right)\right) = 0 \tag{18}$$

Uppgift 3 [9 p.]

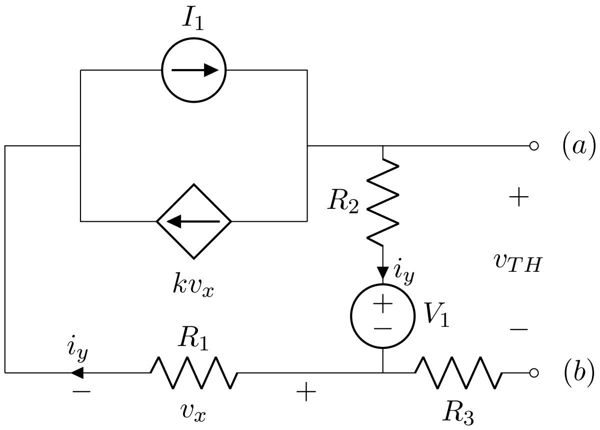
För kretsen här nedan:

(a) [8 p.] Bestäm Theveninekvivalenten, uttryckt i de kända storheterna, sett in i porten (a-b). Antag att $R_1 = R_2 = R_3 = R$ men dellösningarna **ska** först uttryckas i de kända storheterna och förenklas **innan** eventuella värden används. Därmed visas förståelse för problemet.

(b) [1 p.] Om en last ansluts till porten (a-b), vilket värde ska den då ha för att maximalt med effekt ska utvecklas i lasten.



Lösningsförslag
(3a)



Vi har både oberoende och beroende källor så vi behöver beräkna $V_{TH} = v_{oc}$ från spänningen i porten (a-b) när den är öppen samt $I_N = I_{sc}$ när porten är kortsluten. Vi börjar med Theveninspänningen:

$$KVL: \quad +V_{TH} - R_2 i_y - V_1 = 0 \tag{19}$$

$$KCL: \quad -I_1 + kv_x + i_y = 0 \tag{20}$$

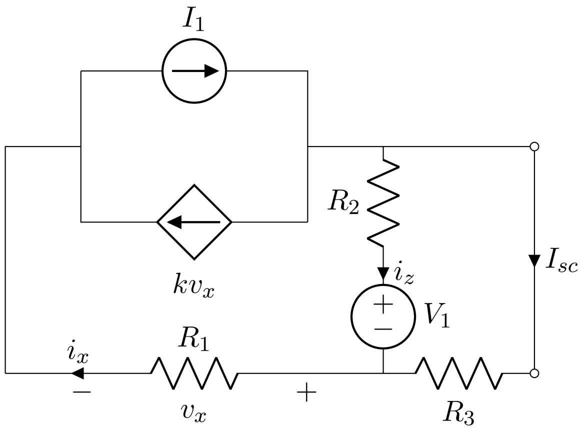
$$v_x = i_y R_1 \rightarrow \tag{21}$$

$$i_y = \frac{I_1}{1 + kR_1} \rightarrow \tag{22}$$

$$V_{TH} = V_1 + R_2 \frac{I_1}{1 + kR_1} = V_1 + I_1 \frac{R}{1 + kR} \tag{23}$$

Dimensionsanalys (k $[\frac{1}{[\Omega]}]$) ger att svaret har rätt dimensioner:

$$[V] = [V] + \frac{[A][\Omega]}{[\frac{1}{[\Omega]}][\Omega]} = [V] + [V],\ ok \tag{24}$$



Nu kortsluter vi porten och det är sannolikt att nodpotentialerna, spänningsfallen och strömmarna är annorlunda jämfört med ovan, därmed måste vi räkna om flera steg.

$$KCL: \quad -I_1 + kv_x + I_{sc} + i_z = 0 \tag{25}$$

$$KVL: \quad +V_1 + i_z R_2 - I_{sc}R_3 \rightarrow i_z = \frac{1}{R_2}(I_{sc}R_3 - V_1) \tag{26}$$

$$KCL: \ i_x - i_z - I_{sc} = 0 \rightarrow i_x = i_z + I_{sc} \tag{27}$$

$$v_x = R_1 i_x = R_1(i_z + I_{sc}) \tag{28}$$

$$\tag{29}$$

$$KCL: \quad -I_1 + k(R_1(\frac{1}{R_2}(I_{sc}R_3 - V_1) + I_{sc}) + I_{sc} + \frac{1}{R_2}(I_{sc}R_3 - V_1) = 0 \tag{30}$$

Här är det rimligt att man sätter in $R_1 = R_2 = R_3 = R$ och förenklar. Vi får:

$$I_{sc} = \frac{I_1 + V_1\left(\frac{1}{R} + k\right)}{2 + 2kR} \tag{31}$$

Dimensionsanalys (k $[\frac{1}{[\Omega]}]$) ger att svaret har rätt dimensioner:

$$[A] = \frac{[A] + [V]([\frac{1}{[\Omega]}] + [\frac{1}{[\Omega]}])}{[\frac{1}{[\Omega]}][\Omega]} = [A] + [A],\ ok \tag{32}$$

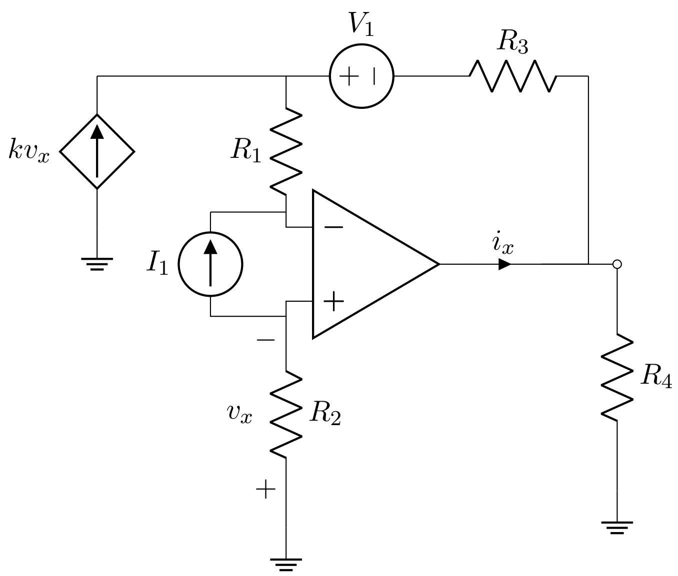
Nu får vi tillsist:

$$R_{TH} = V_{TH}/I_N = \frac{V_1 + I_1 \frac{R}{1+kR}}{\frac{I_1 + V_1\left(\frac{1}{R}+k\right)}{2+2kR}} = 2R \tag{33}$$

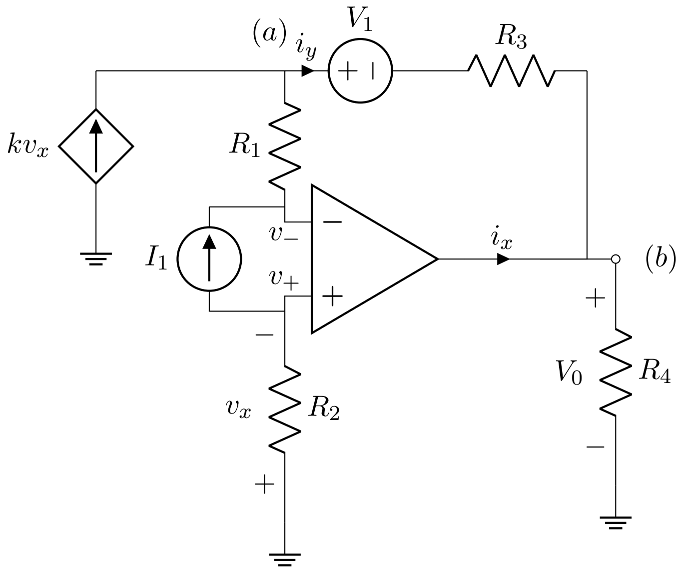
(3b)
$R_{last} = R_{TH} \rightarrow P_{max} = \frac{V_{TH}^2}{4R_{TH}}$

Uppgift 4 [5 p.]

Bestäm, uttryckt i de kända storheterna, i_x i kretsen nedan.



Lösningsförslag



Vi vet att ingen ström flödar in i operationsförstärkarens ingångar och att dessa är på samma potential. Vi får därmed (notera polariteten på v_x och riktningen på I_1):

$$v_x = R_2 I_1 \tag{34}$$

$$(\rightarrow v_+ = v_- = -v_x = -R_2 I_1) \tag{35}$$

$$KCL_a : \quad -kv_x - I_1 + i_y = 0 \tag{36}$$

$$\rightarrow i_y = kR_2 I_1 + I_1 \tag{37}$$

$$KVL : \quad -v_x - R_1 I_1 - V_1 - R_3 i_y - V_0 = 0 \rightarrow \tag{38}$$

$$V_0 = -R_2 I_1 - R_1 I_1 - V_1 - R_3(kR_2 + 1)I_1 \tag{39}$$

$$KCL_b : \quad -i_y - i_x + \frac{V_0}{R_4} = 0 \rightarrow \tag{40}$$

$$i_x = -i_y + \frac{V_0}{R_4} \rightarrow \tag{41}$$

$$i_x = -I_1(kR_2 + 1) + \frac{1}{R_4}(-R_2 I_1 - R_1 I_1 - V_1 - R_3 I_1(kR_2 + 1)) \tag{42}$$

Uppgift 5 [6 p.]

Kretsen nedan befinner sig i jämviktstillstånd men vid $t = 0$ nollställs[2] I_1, V_1 sätts på och brytaren stängs. Rita kretsen för $t = 0^-$ samt $t = 0^+$ och bestäm sen (som funktion av de kända storheterna):

[2] $H(t)$ är Heavisides stegfunktion vid $t = 0$.

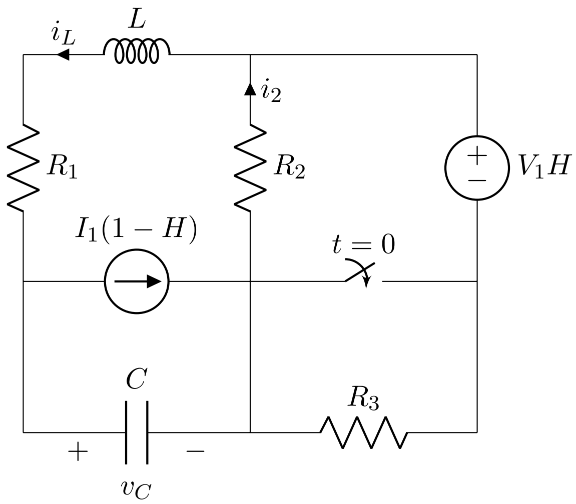
(a) [1 p.] $i_2(0^-)$

(b) [2 p.] $v_c(0^-)$

(c) [1 p.] $v_c(0^+)$

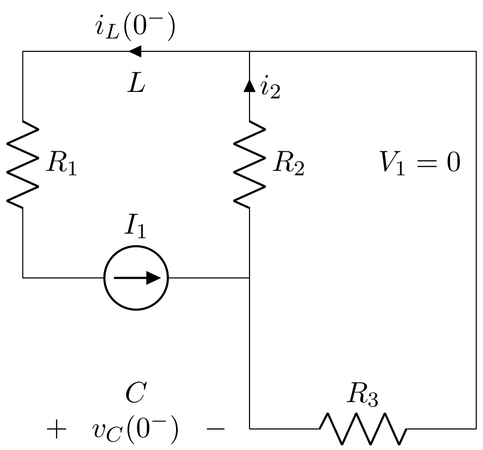
(d) [1 p.] $i_2(0^+)$

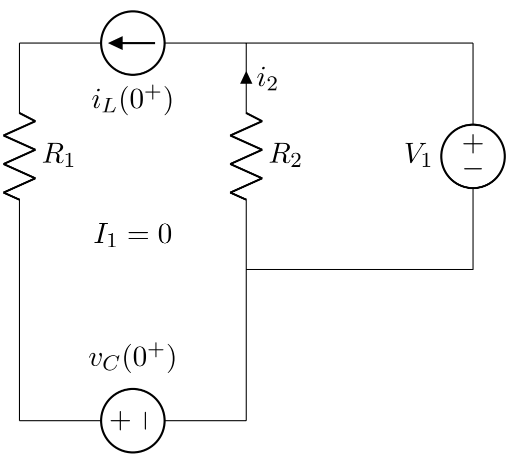
(e) [1 p.] $i_L(0^+)$



Lösningsförslag

$(t=0^-)$ och $(t=0^+)$





(a) $i_2(0^-) = I_1 \frac{R_3}{R_2+R_3}$, genom strömdelning.

(b) $v_c(0^-)$, KVL ger oss:

$$-v_c(0^-) - R_2 i_{R_2}(0^-) - R_1 I_1 = 0 \rightarrow \tag{43}$$

$$v_c(0^-) = -R_2\left(I_1 \frac{R_3}{R_2 + R_3}\right) - R_1 I_1 \tag{44}$$

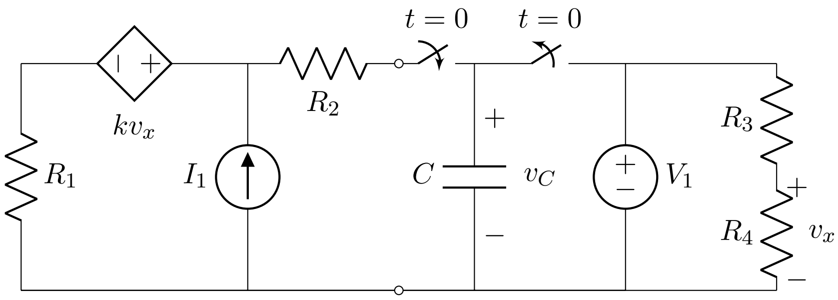
(c) $v_c(0^+) = v_c(0^-)$, kondensatorer är spänningströga

(d) $i_2(0^+) = -V_1/R_2$, enligt passiv teckenkonvenrtion och hur strömmen är definierar i relation till V_1.

(e) $i_L(0^+) = i_L(0^+) = I_1$, spolar är strömtröga.

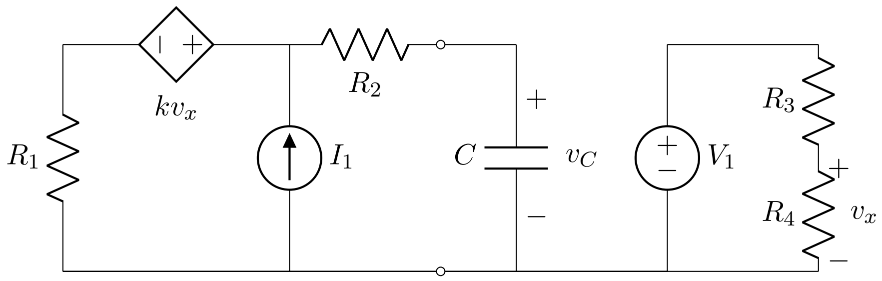
Uppgift 6 [6 p.]

Kretsen nedan befinner sig i jämviktstillstånd men vid $t = 0$ slås brytarna om. Bestäm, som funktion av tiden, och de kända storheterna, $v_C(t > 0)$. Lösningen **ska** uttryckas i de kända storheterna och förenklas **innan** eventuella värden används. Därmed visas förståelse för problemet.

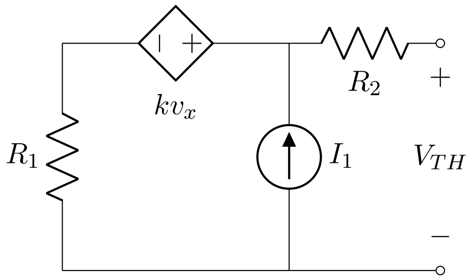


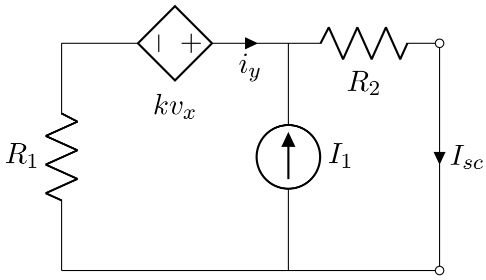
Lösningsförslag
Vi ser[3] att $v_x = V_1 \frac{R_4}{R_4+R_3}$ och även att vi kommer behöver lösa en ODE så vi börjar med att bestämma initialvilkoret, $v_C(0^-) = V_1$. Efter brytarna slagits om har vi en situation såsom:

[3] Denna krets är intressant, den beroende spänningskälla styrs av en signal (här v_x) från den högra delen av kretsen. Dock kommer denna inte påverkas av vänstra sidan pga hur brytarna är konfigurerade. Därmed styrs den "beroende källan" av en signal som inte ändras eller påverkas av den beroende källan eller den vänstra delen av kretsen (t.ex. vid kortslutning av porten). Därmed kan vi se kv_x som en oberoende källa (kanske borde man kalla den "pseudo-oberoende") med ett konstant värde som är $v_x = V_1 \frac{R_4}{R_4+R_4}$ (eftersom V_1, R_3 och R_4 inte ändras). Vi kan få samma R_{TH} som ovan genom att nollställa källorna och bara titta på distansen som fås då.



Lättast är att sen ta fram Theveninekvivalenten sett in i porten där C sitter.





Vi får för V_{TH}:

$$KVL: \quad +V_{TH} - kv_x - R_1 I_1 = 0 \rightarrow \tag{45}$$

$$V_{TH} = R_1 I_1 + kV_1 \frac{R_4}{R_3 + R_4} \tag{46}$$

Vi får för $I_{sc} = I_N$:

$$KCL: \quad -i_y - I_1 + I_{sc} = 0 \tag{47}$$

$$KVL: \quad -R_1 i_y + kv_x - R_2 I_{sc} = 0 \rightarrow \tag{48}$$

$$-R_1(I_{sc} - I_1) + kv_x - R_2 I_{sc} = 0 \rightarrow \tag{49}$$

$$I_{sc} = I_N = \left(R_1 I_1 + kV_1 \frac{R_4}{R_3 + R_4} \right) \frac{1}{R_1 + R_2} \tag{50}$$

Ur detta får vi $R_{TH} = V_{TH}/I_N = R_1 + R_2$. Nu kan vi enklare studera hur $v_C(t)$ utvecklas med tiden. Vi gör en KVL på Theveninekvivalenten och får:

$$+V_{TH} - i_C(t) R_{TH} - v_C(t) = 0 \tag{51}$$

$$+V_{TH} - C \frac{dv_C(t)}{dt} R_{TH} - v_C(t) = 0 \rightarrow \tag{52}$$

$$\frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{v_C(t)}{R_{TH} C} = \frac{V_{TH}}{R_{TH} C} \tag{53}$$

Detta är på samma form som $\dot{y} + ay = b$ vilket vi vet löses av $y(t) = \frac{b}{a} + Ke^{-at}$ där i vårt fall $a = \frac{1}{R_{TH} C}$, $b = \frac{V_{TH}}{R_{TH} C}$ och K går att få mha initialvilkoret $v_C(0^+) = v_C(0^-) = V_1$. Vi får då:

$$v_C(0) = V_1 = V_{TH} + Ke^0 \rightarrow K = V_1 - V_{TH} \rightarrow \tag{54}$$

$$v_C(t) = V_{TH} + (V_1 - V_{TH})e^{-\frac{t}{R_{TH}C}} \tag{55}$$

Vi kanske minns också att man kan skriva lösningen på ODE'n som uppkommer på formen:

$$x(t) = x(\infty) + (x(0) - x(\infty))e^{-at} \tag{56}$$

Vi kan test och se:

$$v_C(0) = V_{TH} + (V_1 - V_{TH}) * 1 = V_1, \text{ ok.} \tag{57}$$

$$v_C(\infty) = V_{TH}, \text{ ok.} \tag{58}$$