# KTH ei1110 Elkretsanalys (utökad kurs) CELTE, examination (TEN1) 2021-10-29

- Var noga med hur du definierar dina strömmar och spänningar. Använd passiv teckenkonvention. Polariteten på spänningarna och riktningarna på strömmarna påverkar tecknen och man får lätt teckenfel om man inte är noga.
- Alla källor ska antas vara stationära likströmskällor om inget annat explicit anges.
- För vissa frågor är de numeriska värdena slumpade för varje student. Tänk på att skriva ner din krets (för dig själv) när du räknar innan du använder värdena. Avrunda och svara med en decimal.

**Hjälpmedel:** Miniräknaren i quizet i Canvas.

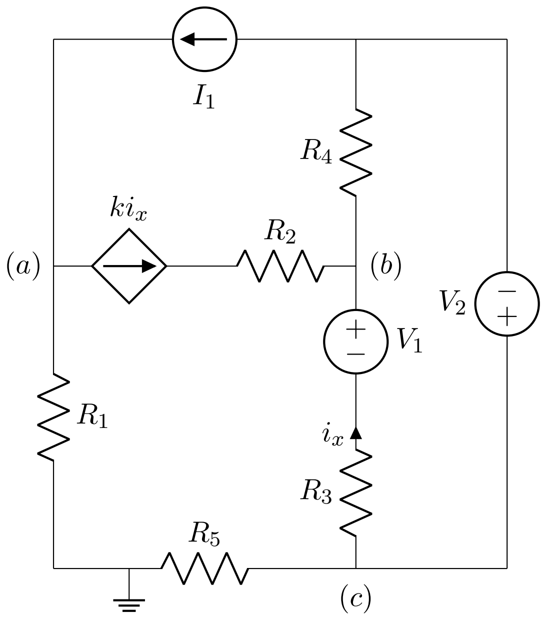
**Betygsgränserna är:** 50% (E), 60% (D), 70% (C), 80% (B), 90% (A).
För (Fx) krävs att maximalt 1 poäng drar ner resultatet under godkänt.
**Examinator:** Daniel Månsson (08 790 9044)

Lycka till och ta det lugnt!

---

## Uppgift Q1

*Ta fram nodekvationerna, för de angivna noderna, (a), (b) och (c), i kretsen nedan, uttryckt endast i de kända storheterna och nodpotentialerna. Du behöver inte lösa ut nodpotentialerna. Visa alla stegen i din lösning och var tydlig i din lösningsgång.*



$I_1$
$R_4$
$ki_x$
$R_2$
$(a)$
$(b)$
$V_2$
$V_1$
$R_1$
$i_x$
$R_3$
$R_5$
$(c)$

**Lösning:**

$$i_x = \frac{v_c - (v_b - V_1)}{R_3} \tag{1}$$

$$KCL_a\text{:}\ \frac{v_a - 0}{R_1} + ki_x - I_1 = 0 \tag{2}$$

$$KCL_b\text{:}\ -ki_x + \frac{v_b - V_1 - v_c}{R_3} + \frac{v_b - (v_c - V_2)}{R_4} = 0 \tag{3}$$

$$KCL_c\text{:}\ \frac{v_c - 0}{R_5} + i_x + \frac{v_c - V_2 - v_b}{R_4} + I_1 = 0 \tag{4}$$

$$\rightarrow \tag{5}$$

$$KCL_a\text{:}\ v_a\frac{1}{R_1} + k\left(\frac{v_c - v_b + V_1}{R_3}\right) - I_1 = 0 \tag{6}$$

$$KCL_b\text{:}\ -k\left(\frac{v_c - v_b + V_1}{R_3}\right) + \frac{v_b - v_c - V_1}{R_3} + \frac{v_b - v_c - V_2}{R_4} = 0 \tag{7}$$

$$KCL_c\text{:}\ \frac{v_c}{R_5} + \frac{v_c - v_b + V_1}{R_3} + \frac{v_c - V_2 - v_b}{R_4} + I_1 = 0 \tag{8}$$

$$\rightarrow \tag{9}$$

$$KCL_a\text{:}\ v_a\frac{1}{R_1} + v_b\left(\frac{-k}{R_3}\right) + v_c\frac{k}{R_3} = I_1 - V_1\frac{k}{R_3} \tag{10}$$

$$KCL_b\text{:}\ v_b\left(\frac{k+1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right) + v_c\left(\frac{-k}{R_3} - \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4}\right) = V_1\left(\frac{k}{R_3} + \frac{1}{R_3}\right) + V_2\frac{1}{R_4} \tag{11}$$

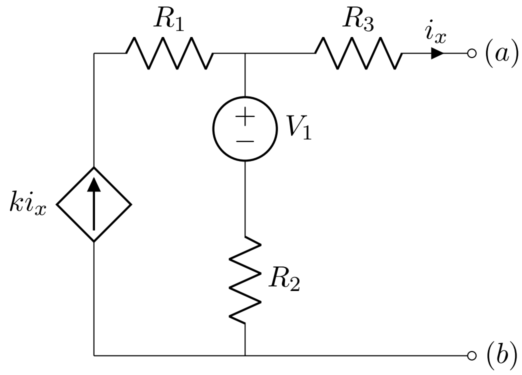
$$KCL_c\text{:}\ v_b\left(\frac{-1}{R_3} - \frac{1}{R_4}\right) + v_c\left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}\right) = \frac{-V_1}{R_3} + \frac{V_2}{R_4} \tag{12}$$

$$\tag{13}$$

---

## Uppgift Q2

*Ange Thevenin-resistansen $R_{TH}$ för kretsen nedan, sett in i porten (a-b), uttrycket endast i de kända storheterna.*




**Lösning:**
Vi börja med att sätta jord längst ner. Vid öppen ingång blir $i_x = 0$ (och $ki_x = 0$) så $V_{TH} = V_1$.
För Nortonströmmen kortsluter vi ingången och gör en KCL mellan $R_1$ och $R_3$ (vi kallar noden (c)) får vi:

$$I_N = i_x \tag{14}$$

$$KCL_c\colon\ -ki_x + \frac{v_c - V_1 - 0}{R_2} + I_N = 0 \tag{15}$$

$$KVL\colon\ +v_c - R_3 I_N = 0 \leftrightarrow v_c = R_3 I_N \rightarrow \tag{16}$$

$$-kI_N + \frac{R_3 I_N}{R_2} - \frac{V_1}{R_2} + I_N = 0 \leftrightarrow \tag{17}$$

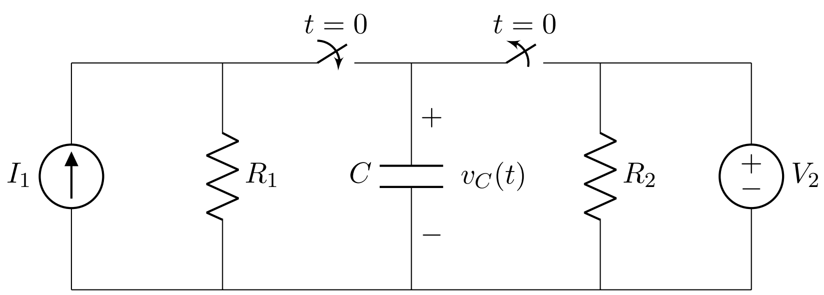
$$I_N = \frac{V_1}{R_2 - kR_2 + R_3} \tag{18}$$

Detta ger att $R_{TH} = \frac{V_{TH}}{I_N} = R_2 - kR_2 + R_3$

---

## Uppgift Q3

*Bestäm uttrycket för spänningen $v_C(t)$ för $t > 0$. Antag att kretsen befinner sig i ett stationärt tillstånd när brytarna ändras.*



**Lösning:**
Vid $t = 0^-$ har vi $v_c(0^-) = V_2 = v_c(0^+)$ vilket blir vårt begynnelsevilkor. En källtransformering och en KVL ger oss (tillsammans med $i_c(t) = C\frac{dv_c(t)}{dt}$) för $t = 0^-$:

$$+I_1R_1 - i_c(t)R_1 - v_c(t) = 0 \leftrightarrow \tag{19}$$

$$\frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{1}{R_1C}v_c(t) = \frac{I_1R_1}{R_1C} \rightarrow \tag{20}$$

$$v_c(t) = I_1R_1 + Ke^{-\frac{t}{R_1C}} \tag{21}$$

$$v_c(0^+) = v_c(0^-) = V_2 \rightarrow K = V_2 - I_1R_1 \tag{22}$$

$$v_c(t) = I_1R_1 + (V_2 - I_1R_1)e^{-\frac{t}{R_1C}} \tag{23}$$

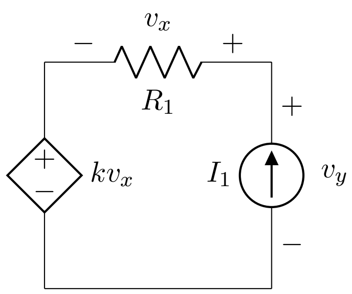
$$\tag{24}$$

Man kan kontroller att det är rimligt genom att sätta $v_c(t \rightarrow \infty) = I_1R_1$ vilket stämmer för vad vi får vid stationärt jämviktsläge.

---

## Uppgift Q4

*Ange spänningen $v_y$ i kretsen nedan.*




**Lösning:**

$$v_x = R_1I_1 \tag{25}$$

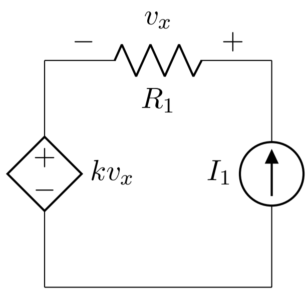
$$\textbf{KVL:} \; +v_y - v_x - kv_x = 0 \rightarrow \tag{26}$$

$$v_y = v_x(k+1) = R_1I_1(k+1) \tag{27}$$

---

## Uppgift Q5

*Ange effekten som utvecklas i den beroende spänningskällan.*



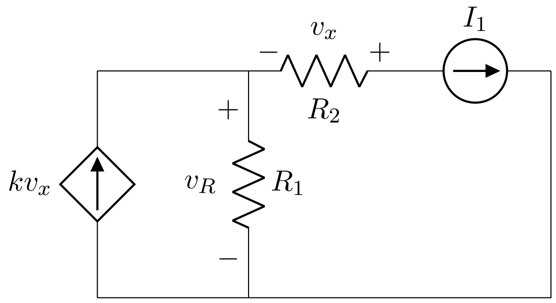

**Lösning:**

$$P_k = kv_xI_1 = kR_1I_1^2 \tag{28}$$

---

## Uppgift Q6

*Ange spänningen $v_R$ i kretsen nedan.*




**Lösning:**

$$v_x = -R_2I_1 \tag{29}$$

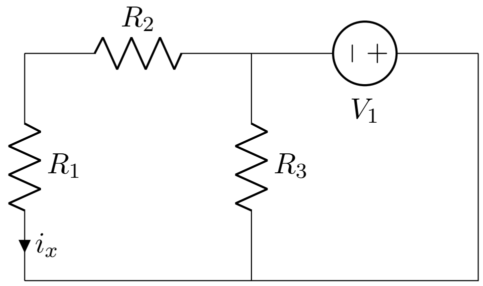
$$\textbf{KCL:} \ -kv_x + \frac{v_R}{R_1} + I_1 = 0+ \leftrightarrow \tag{30}$$

$$v_R = R_1(kv_x - I_1) = -R_1I_1(kR_2 + 1) \tag{31}$$

---

## Uppgift Q7

*Ange strömmen $i_x$ i kretsen nedan.*



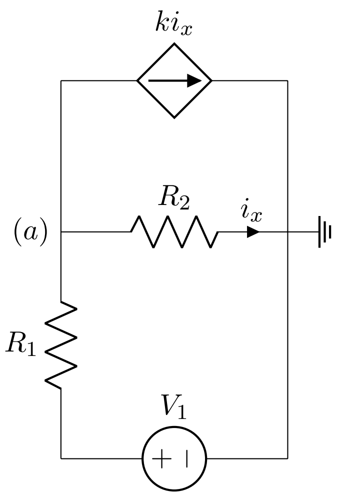

**Lösning:**

$$i_x = \frac{-V_1}{R_1 + R_2} \tag{32}$$

---

## Uppgift Q8

*Ange nodpotentialen $v_a$ i kretsen nedan.*



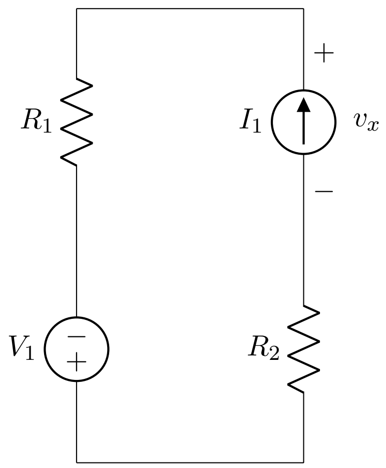
**Lösning:**

$$KCL_a\textbf{:}\quad +ki_x + i_x + i_{R_1} = 0 \tag{33}$$
$$i_x = \frac{v_a}{R_2} \rightarrow \tag{34}$$
$$\frac{v_a}{R_2}(k+1) + \frac{v_a - V_1 - 0}{R_1} = 0 \leftrightarrow \tag{35}$$
$$v_a\left(\frac{k+1}{R_2} + \frac{1}{R_1}\right) = \frac{V_1}{R_1} \leftrightarrow \tag{36}$$
$$v_a = \frac{V_1 R_2}{(k+1)R_1 + R_2} \tag{37}$$

---

## Uppgift Q9

*Ange spänningen $v_x$ i kretsen nedan. Antag att effekterna som utvecklas i $R_1$ och $R_2$ är kända.*



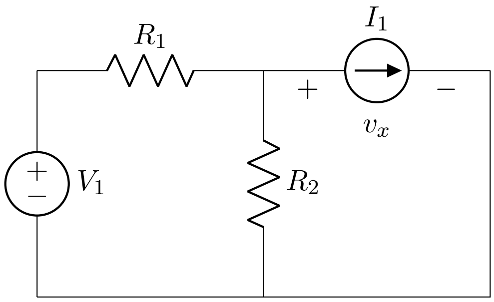

**Lösning:**

$$\sum P = 0 \tag{38}$$
$$P_{R_1} + P_{R_1} + V_1(-I_1) + v_x(-I_1) = 0 \leftrightarrow \tag{39}$$
$$v_x = \frac{P_{R_1} + P_{R_1} + V_1(-I_1)}{I_1} \tag{40}$$

---

## Uppgift Q10

*Ange spänningen över strömkällan, $v_x$, i kretsen nedan.*




**Lösning:**
Vi sätter jord längst ner och kallar noden mellan $R_1$, $R_2$ och $I_1$ för $(a)$. Vi får då att $v_x = v_a - 0$.

$$KCL_a\textbf{:}\ \frac{v_a - V_1}{R_1} + \frac{v_a}{R_2} + I_1 = 0 \tag{41}$$

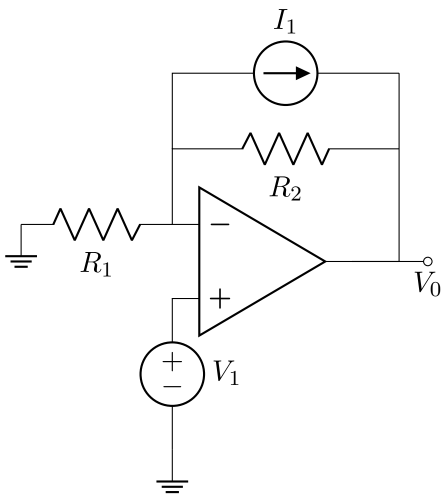
$$v_a\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{V_1}{R_1} - I_1 \tag{42}$$

$$v_a = \frac{V_1R_2 - I_1R_1R_2}{R_1 + R_2} = v_x \tag{43}$$

---

## Uppgift Q11

*Ange $V_0$ för kretsen nedan*



**Lösning:**
Vi använder det vi vet om operationsförstärkare (att $v_+ = v_-$ samt att $I_+ = I_- = 0$) och gör en KCL i $v_-$:

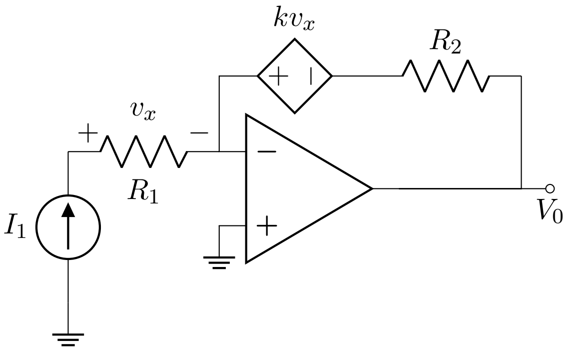
$$\frac{V_1 - 0}{R_1} + \frac{V_1 - V_0}{R_2} + I_1 = 0 \leftrightarrow \tag{44}$$

$$V_0 = V_1 \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) + R_2 I_1 \tag{45}$$

---

## Uppgift Q12

*Ange $V_0$ för kretsen nedan*




**Lösning:**
Vi använder det vi vet om operationsförstärkare (att $v_+ = v_-$ samt att $I_+ = I_- = 0$) och gör en KCL i $v_-$:

$$-I_1 + \frac{0 - kv_x - V_0}{R_2} = 0 \tag{46}$$

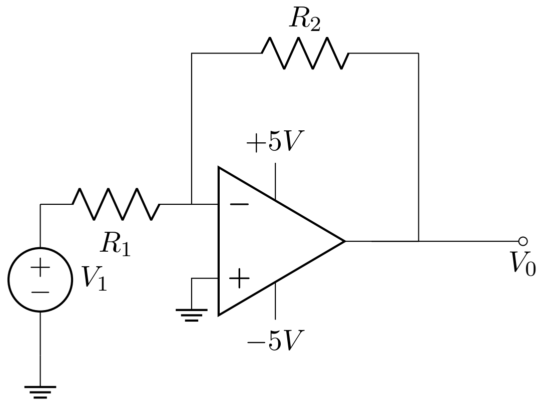
$$v_x = R_1 I_1 \rightarrow \tag{47}$$

$$V_0 = -I_1 R_2 - kR_1 I1 \tag{48}$$

---

## Uppgift Q13

*Ange $V_0$ för kretsen nedan*




**Lösning:**
Vi använder det vi vet om operationsförstärkare (att $v_+ = v_-$ samt att $I_+ = I_- = 0$) och gör en KCL i $v_-$:

$$\frac{0 - V_1}{R_1} + \frac{0 - V_0}{R_2} = 0 \tag{49}$$

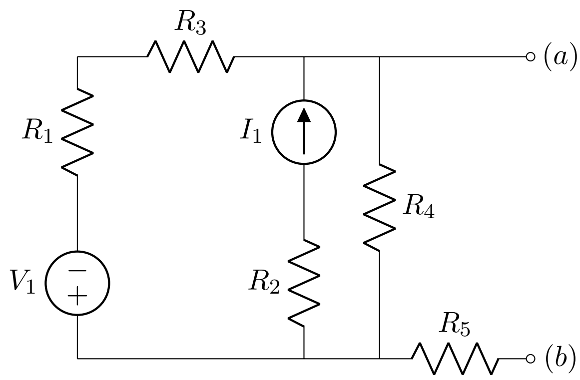
$$V_0 = -V_1 \frac{R_2}{R_1} \tag{50}$$

Här får man vara försiktig eftersom beroende på värdena så kan operationsförstärkaren mätas och eftersom begränsningen är $|V_0| < |V_s|$ begränsas vi till matningsspänningen.

---

## Uppgift Q14

*Ange Thevenin-resistansen för kretsen nedan, sett in i porten (a-b).*

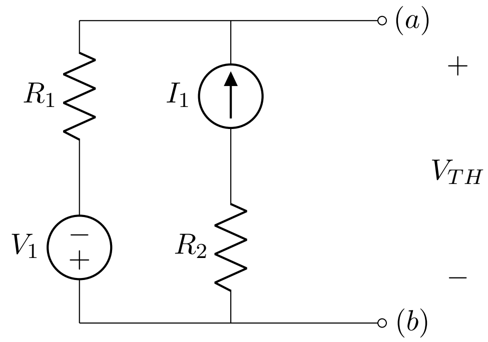



**Lösning:**
Vi kan nollställa källorna då alla dessa är oberoende och vi får $R_{TH} = \frac{(R_1+R_3)R_4}{R_1+R_3+R_4} + R_5$

---

## Uppgift Q15

*Ange Thevenin-spänningen för kretsen nedan.*

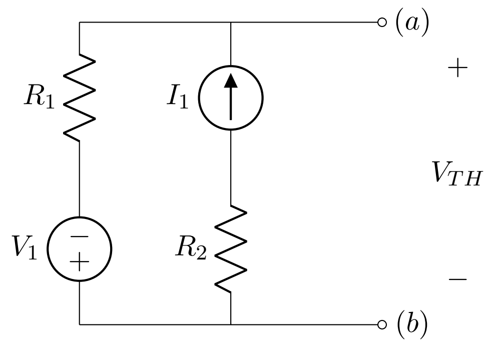



**Lösning:**
Om vi sätter vår referens i (b) får vi $V_{TH} = v_a - v_b = v_a$. En KCL i (a) ger oss: $-I_1 + \frac{V_a+V_1-0}{R_1} = 0 \to V_{TH} = v_a = I_1 R_1 - V_1$

---

## Uppgift Q16

*Ange Norton-strömmen $I_N$ för kretsen nedan, sett in i porten (a-b) och med riktning som stämmer överens med $V_{TH}$.*

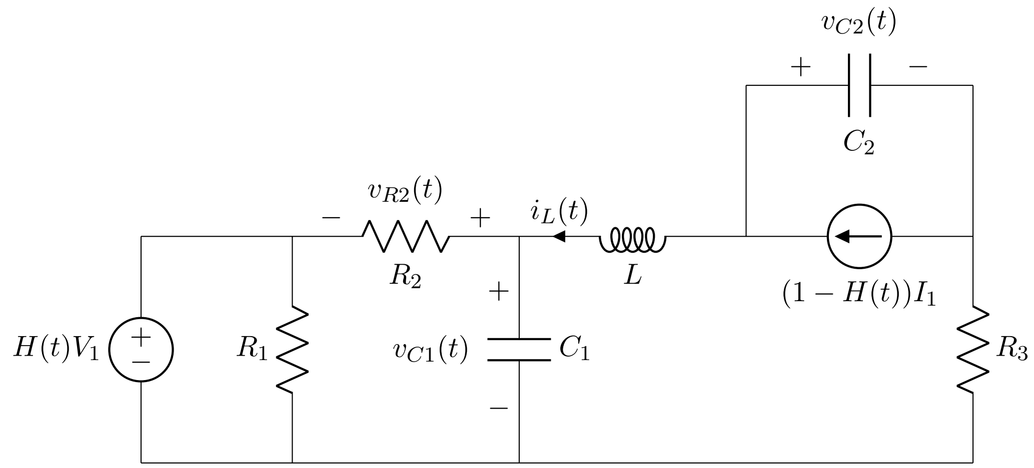



**Lösning:**
Om vi kortsluter porten och gör en KCL i (a) får vi: $-I_1 + I_N + \frac{0+V_1-0}{R_1} = 0 \to I_N = I_1 - \frac{V_1}{R_1}$. Om vi jämför med svaret för $V_{TH}$ ovan ser vi att $R_{TH} = R_1$ vilket stämmer med det om vi nollställer källorna (som vi kan göra eftersom det inte finns några beroende källor).

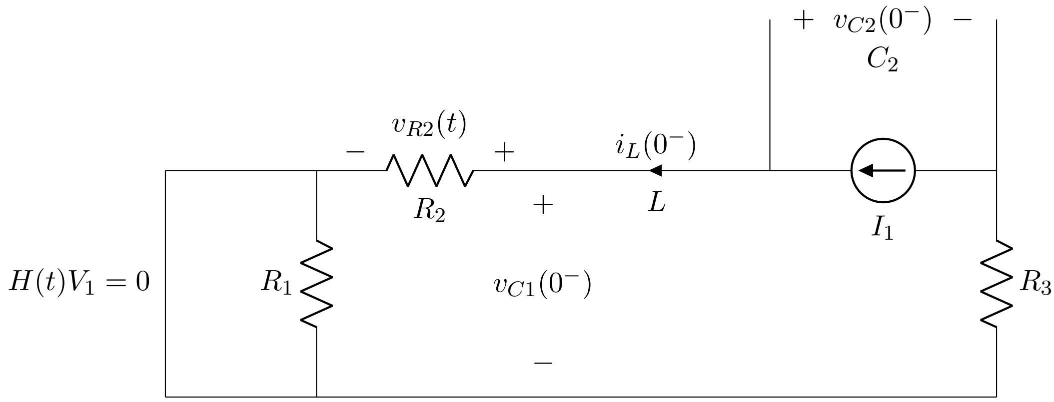
---

## Uppgift Q17 - Q20

*Antag att kretsen befinner sig i ett stationärt jämviktstillstånd men vid* $t = 0$ *sätts* $V_1$ *på och* $I_1$ *stängs av. ("H(t)" är Heavisides stegfunktion vid* $t = 0$*. Bestäm* $v_{C1}(0^-)$*,* $v_{C2}(0^-)$*,* $v_{R2}(0^+)$ *samt* $P_{C2}(0^+)$*.*

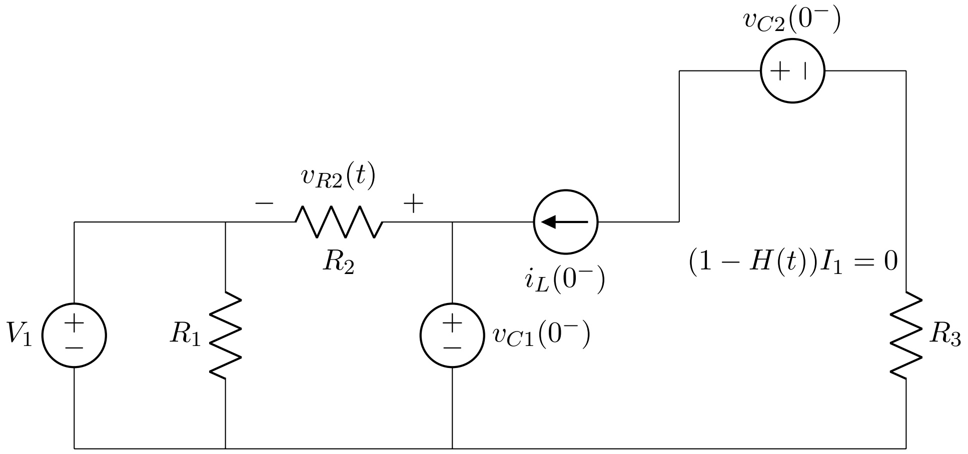



**Lösning:**
$(t = 0^-)$




- KVL: $+v_{C1}(0^-) - I_1R_2 = 0 \to v_{C1}(0^-) = I_1R_2$.
- KVL: $-v_{C1}(0^-) - I_1R_3 + v_{C2}(0^-) = 0 \to v_{C2}(0^-) = I_1R_2 + I_1R_3$.

$(t = 0^+)$

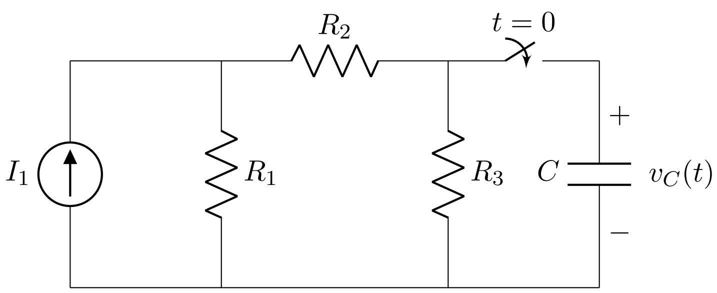



- KVL: $+v_{C1}(0^+) - v_{R2}(0^-) - V_1 = 0$ tillsammans med $v_{C1}(0^+) = v_{C1}(0^-) \rightarrow v_{R2}(0^-) = I_1R_2 - V_1$.
- KVL: $P_{C2}(0^+) = v_{C2}(0^+)(-i_L(0^+)) = v_{C2}(0^-)(-i_L(0^-)) = (I_1R_2 + I_1R_3)(-I_1) = -I_1^2(R_2 + R_3)$.

---

## Uppgift Q21

*Ange tidskonstanten för $v_C(t)$ i kretsen nedan. Antag att kretsen befinner sig i ett stationärt jämviktstillstånd innan $t = 0$.*

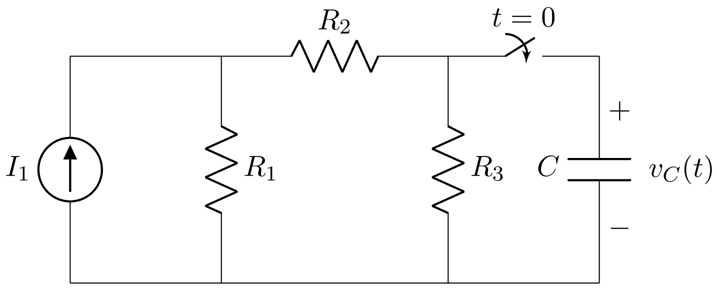



**Lösning:**
Tidskonstanten, $\tau$, fås enklast genom att ta fram Theveninresistansen för kretsen till vänster om kondensatorn. Denna är $R_{TH} = \frac{(R_1+R_2)R_3}{R_1+R_2+R_3}$ och $\tau = R_{TH} * C$.

---

## Uppgift Q22

*Ange $v_C(t \rightarrow \infty)$, i kretsen nedan. Antag att kretsen befinner sig i ett stationärt jämviktstillstånd innan $t = 0$.*

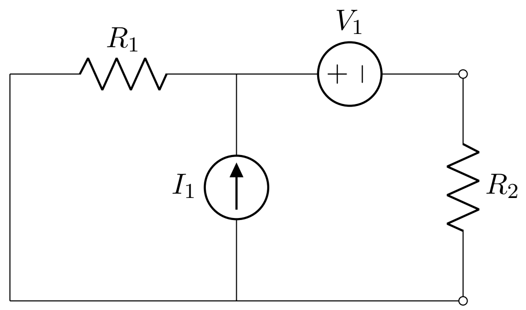



**Lösning:**
När långtid har förlupit kommer återigen ett stationärt jämviktstillstånd att infinna sig. Kondensatorn kommer då inte att leda någon ström och över den kommer det att ligga en spänning som är samma som Theveninspänningen som till den vänstar delen av kretsen. Om vi gör en källtransformering av parrallelkoppling $I_1$ och $R_1$ så kan vi sen m.h.a en spänningsdelning få: $V_{TH} = I_1 R_1 \frac{R_3}{R_1+R_2+R_3}$.

---

## Uppgift Q23

*Antag att $R_2$ kan väljas fritt, vilken effekt kan då, som mest, utvecklas i den i kretsen nedan.*

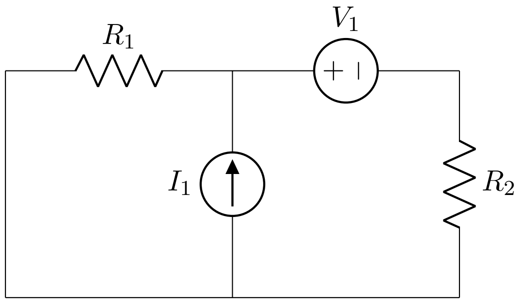



**Lösning:**
Vi bestämmer Theveninekvivalenten för delen av kretsen till vänster om $R_2$ och vi vet att $R_2$ ska väljas såsom $R_2 = R_{TH}$ för att det ska utvecklas maximalt med effekt i $R_2$. Vi får därmed här $P_{R2_{max}} = \frac{V_{TH}^2}{4R_{TH}} = \frac{(I_1 R_1 - V_1)^2}{4R_1}$.

---

## Uppgift Q24

*Ange effekten som utvecklas i strömkällan nedan?*




**Lösning:**
Vi sätter jord längst ner och kallar noden där $R_1$, $I_1$ och $V_1$ möts för (a) och gör en KCL där, vilket ger oss:

$$\frac{v_a}{R_1} - I_1 + \frac{v_a - V_1 - 0}{R_2} = 0 \rightarrow \tag{51}$$

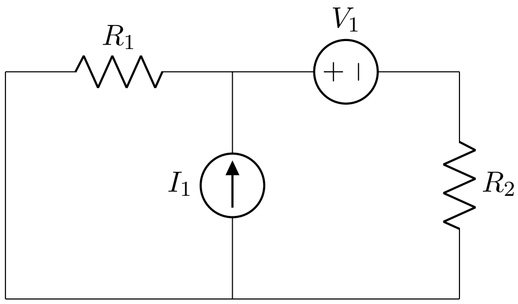
$$v_a = \frac{I_1 R_1 R_2 + V_1 R_1}{R_1 + R_2} \tag{52}$$

Pga hur $v_a$ är definierad får vi nu $P_{I_1} = v_a(-I_1)$

---

## Uppgift Q25

*Ange effekten som utvecklas i $R_1$ i kretsen nedan?*




**Lösning:**
Vi sätter jord längst ner och kallar noden där $R_1$, $I_1$ och $V_1$ möts för (a) och gör en KCL där, vilket ger oss:

$$\frac{v_a}{R_1} - I_1 + \frac{v_a - V_1 - 0}{R_2} = 0 \rightarrow \tag{53}$$

$$v_a = \frac{I_1 R_1 R_2 + V_1 R_1}{R_1 + R_2} \tag{54}$$

Pga hur $v_a$ är definierad får vi nu $P_{R_1} = v_a^2/R_1$.

---