KTH ei1110 Elkretsanalys (utökad kurs) CELTE, examination (TEN1) 2022-10-27

- Var noga med hur du definierar dina strömmar och spänningar. Använd passiv teckenkonvention. Polariteten på spänningarna och riktningarna på strömmarna påverkar tecknen och man får lätt teckenfel om man inte är noga.
- Alla källor ska antas vara stationära likströmskällor om inget annat explicit anges.
- För vissa frågor är de numeriska värdena slumpade för varje student. Tänk på att skriva ner din krets (för dig själv) när du räknar innan du använder värdena. Avrunda och svara med en decimal.

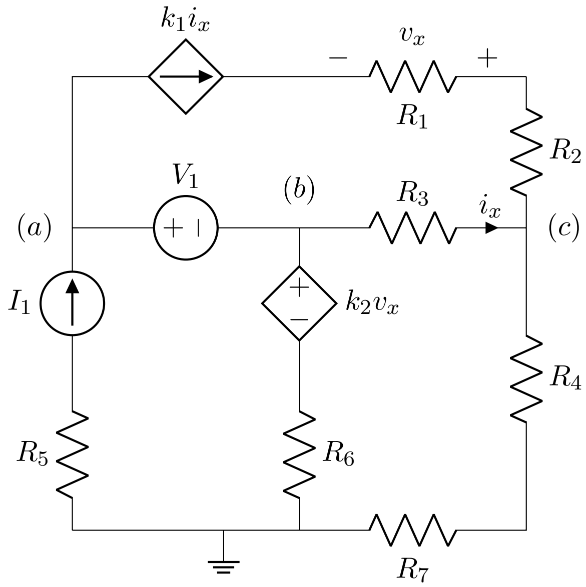
Hjälpmedel: Miniräknaren i quizet i Canvas.

Betygsgränserna är: 50% (E), 60% (D), 70% (C), 80% (B), 90% (A).
För (Fx) krävs att maximalt 1 poäng drar ner resultatet under godkänt samt att ingen av de uppgifter där man behöver lämna hela sin lösning har mindre än 50%.
Examinator: Daniel Månsson (08 790 9044)

Lycka till och ta det lugnt!

Uppgift Q1

Ta fram nodekvationerna, för de angivna noderna, (a), (b) och (c), i kretsen nedan, uttryckt endast i de kända storheterna och nodpotentialerna. Du behöver inte lösa ut nodpotentialerna. Visa alla stegen i din lösning och var tydlig i din lösningsgång.



Lösning:
Vi definierar en ström i_y som går igenom V_1 från (a) till (b) och ställer upp vår nodanalys.

$$\text{KCL.a:} \quad -I_1 + k_1 i_x + i_y = 0 \tag{1}$$

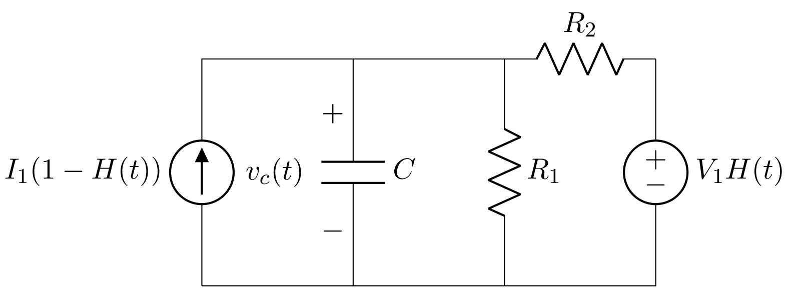
$$\text{KCL.b:} \quad -i_y + \frac{v_b - k_2 v_x}{R_6} + \frac{v_b - v_c}{R_3} = 0 \tag{2}$$

$$\text{KCL.c:} \quad -k_1 i_x + \frac{v_c - v_b}{R_3} + \frac{v_c - 0}{R_4 + R_7} = 0 \tag{3}$$

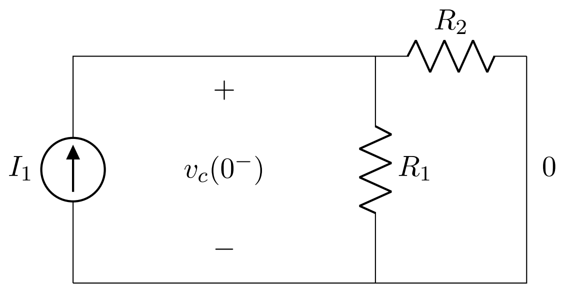
Till dessa har vi även att $i_x = \frac{v_b - v_c}{R_3}$ samt att $v_x = -R_1 k_1 i_x$.

Uppgift Q2

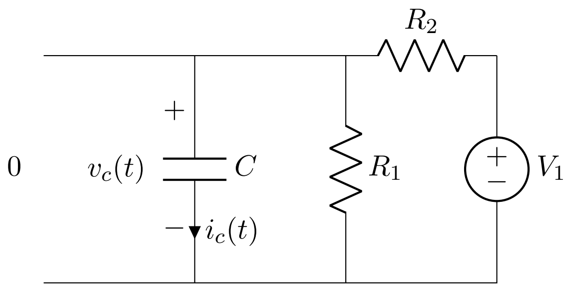
Bestäm uttrycket för $v_c(t)$ för $t > 0$. Antag att kretsen befinner sig i ett stationärt tillstånd innan $t = 0$. Visa alla stegen i din lösning och var tydlig i din lösningsgång. "H(t)" är Heavisides stegfunktion vid $t = 0$.



Lösning:
Vid $t = 0^-$ får vi $v_c(0^-) = I_1 \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}$ som kommer blir vårt initial villkor.



Vid $t \geq 0^+$ får vi:



$$\text{KCL: } + i_c(t) + \frac{v_c(t)}{R_1} + \frac{v_c(t) - V_1}{R_2} = 0 \tag{4}$$

$$\frac{dv_c(t)}{dt} + v_c \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{1}{C} = \frac{V_1}{CR_2} \tag{5}$$

Vi ser att detta kan skrivas såsom $\dot{y}(t) + ay(t) = b$ som vi vet har lösningen $y(t) = \frac{b}{a} + ke^{-at}$. Med detta och vårt initial villkor ovan, $v_c(0^-) = v_c(0^+)$ får vi då:

$$\frac{b}{a} = \frac{V_1}{CR_2} \frac{R_1 R_2 C}{R_1 + R_2} = \frac{V_1 R_1}{R_1 + R_2} \rightarrow \tag{6}$$

$$v_c(t) = \frac{V_1 R_1}{R_1 + R_2} + ke^{-\frac{R_1+R_2}{R_1 R_2 C} t} \tag{7}$$

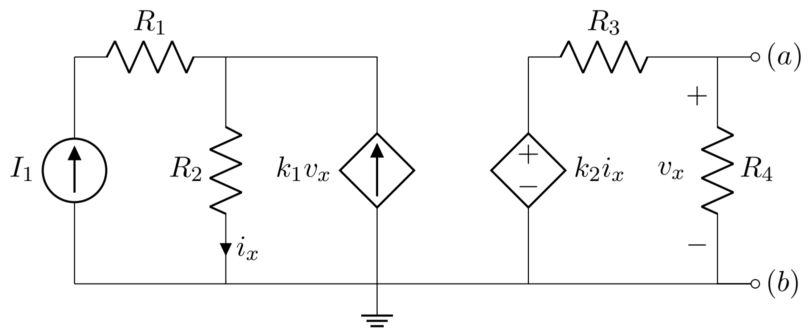
$$v_c(0^-) = v_c(0^+) = I_1 \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{V_1 R_1}{R_1 + R_2} + k * 1 \tag{8}$$

$$v_c(t) = \frac{V_1 R_1}{R_1 + R_2} + \frac{R_1}{R_1 + R_2} (R_2 I_1 - V_1) e^{-\frac{R_1+R_2}{R_1 R_2 C} t} \tag{9}$$

$$\tag{10}$$

Uppgift Q3a

För kretsen nedan, bestäm Thevenin-spänningen, V_{TH}, sett in i porten (a-b), uttrycket endast i de kända storheterna. Visa alla stegen i din lösning och var tydlig i din lösningsgång.



Lösning:
$V_{TH} = v_a - v_b = v_x$. Vi tittar på högra sidan och får, t.ex., genom spänningsdelning att:

$$\text{KVL: } v_x = k_2 i_x \frac{R_4}{R_3 + R_4} \rightarrow \tag{11}$$

$$i_x = \frac{v_x(R_3 + R_4)}{k_2 R_4} \tag{12}$$

Vi behöver koppla detta till ett uttryck med i_x och får i noden mellan R_1, R_2 och $k_1 v_x$ på vänstra sidan:

$$\text{KCL: } -I_1 + i_x - k_1 v_x = 0 \rightarrow \tag{13}$$

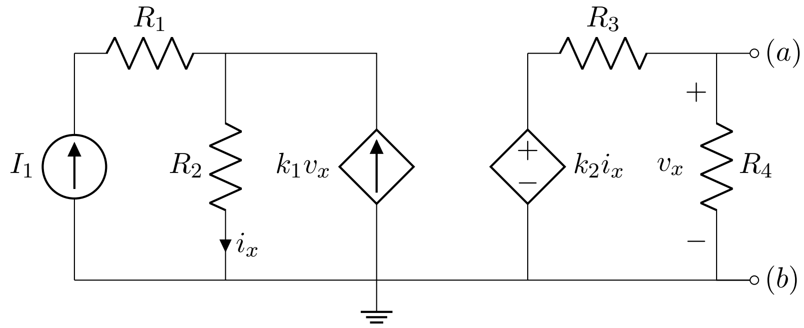
$$-I_1 + \left(\frac{v_x(R_3 + R_4)}{k_2 R_4} \right) - k_1 v_x = 0 \rightarrow \tag{14}$$

$$v_x \left(\frac{R_3 + R_4}{k_2 R_4} - k_1 \right) = I_1 \tag{15}$$

$$v_x = \frac{I_1 k_2 R_4}{R_3 + R_4 - k_1 k_2 R_4} = \frac{I_1 k_2 R_4}{R_3 + R_4(1 - k_1 k_2)} = V_{TH} \tag{16}$$

Uppgift Q3b

För kretsen nedan, bestäm Norton-strömmen, I_N, sett in i porten (a-b), uttrycket endast i de kända storheterna. Visa alla stegen i din lösning och var tydlig i din lösningsgång.



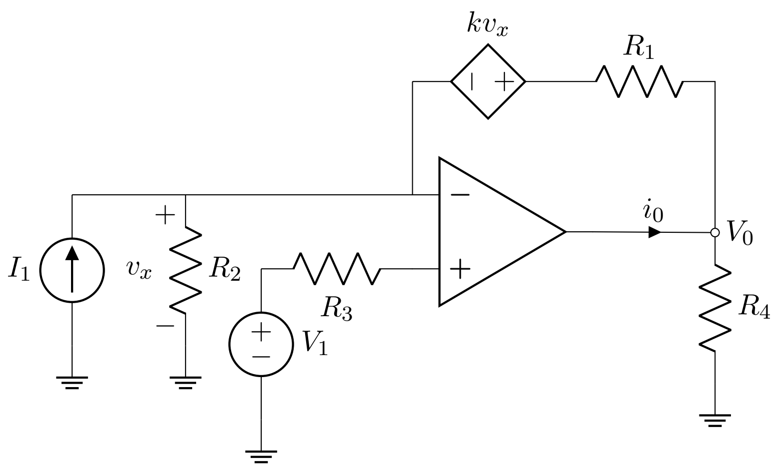
Lösning:
När vi kortsluter porten kommer I_N, med definitionen $V_{TH} = v_a - v_b$, att gå nedåt från (a) till (b). Även R_4 kortsluts då vilket gör att $v_x = 0$. Detta gör att vi får ett avbrott på vänstra sidan då $k_1 v_x = 0$ (strömkällan nollställs). Därmed blir $i_x = I_1$ och vi får på högra sidan av kretsen:

$$\text{KVL: } +k_2 I_1 - R_3 I_N = 0 \rightarrow \tag{17}$$

$$I_N = \frac{k_2}{R_3} I_1 \tag{18}$$

Uppgift Q4

Bestäm i_0 för kretsen nedan. Visa alla stegen i din lösning och var tydlig i din lösningsgång.



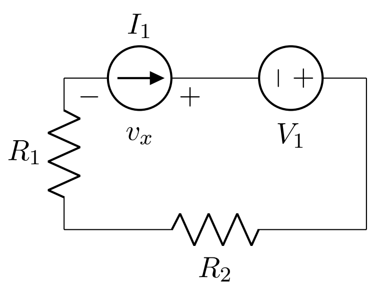
Lösning:
Vi vet att för operationsförstärkaren har vi att $v_n = v_p$ samt att ingen ström går in i operationsförstärkaren på ingångssidan. Vi definierar strömmen i_x som går upp (från noden (n) som är vid operationsförstärkarens inverterande ingång och genom kv_x och

R_1). Vi får nu:

$$v_p = v_n = V_1 \tag{19}$$
$$v_x = V_1 \tag{20}$$
$$\text{KCL.n:} \ -I_1 + \frac{V_1}{R_2} + i_x = 0 \tag{21}$$
$$-I_1 + \frac{V_1}{R_2} + \frac{V_1 + kV_1 - V_0}{R_1} = 0 \rightarrow \tag{22}$$
$$v_0 = V_1\left(\frac{R_1}{R_2} + 1 + k\right) - I_1 R_1 \tag{23}$$
$$\text{KCL.o:} \ -i_0 + \frac{V_0}{R_4} - i_x = 0 \tag{24}$$
$$i_x = I_1 - \frac{V_1}{R_2} \tag{25}$$
$$i_0 = \frac{V_0}{R_4} - I_1 + \frac{V_1}{R_2} \tag{26}$$
$$i_0 = \frac{1}{R_4}\left(V_1\left(\frac{R_1}{R_2} + 1 + k\right) - I_1 R_1\right) - I_1 + \frac{V_1}{R_2} \tag{27}$$

Uppgift q5

Bestäm v_x.

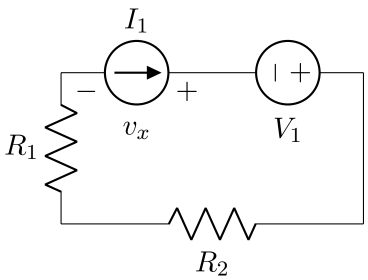


Lösning:

$$\text{KVL:} \ +V_1 - I_1(R_1 + R_2) + v_x = 0 \tag{28}$$
$$v_x = -V_1 + I_1(R_1 + R_2) \tag{29}$$

Uppgift q6

Bestäm effekten som utvecklas i V_1.

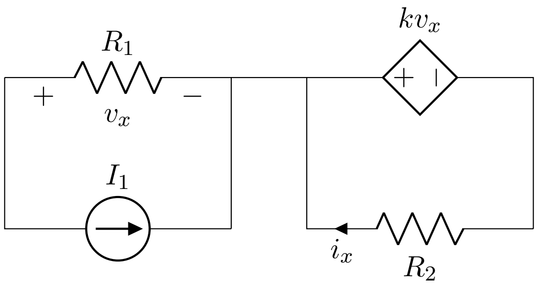


Lösning:
Med passiv teckenkonvention får vi:

$$P_{V_1} = -V_1 I_1 \tag{30}$$

Uppgift q7

Bestäm i_x.



Lösning:

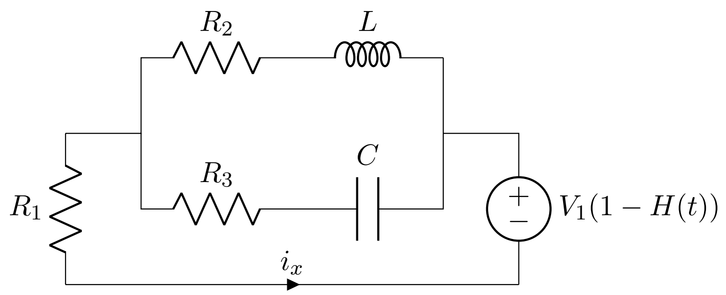
$$v_x = -R_1 I_1 \tag{31}$$

$$\text{KVL: } + kV_x + i_x R_2 = 0 \rightarrow \tag{32}$$

$$i_x = \frac{kR_1 I_1}{R_2} \tag{33}$$

Uppgift q8

Bestäm $i_x(0^-)$. Antag att kretsen befinner sig i ett stationärt tillstånd (jämviktsläge) innan $t = 0$. "H(t)" är Heavisides stegfunktion vid $t = 0$.



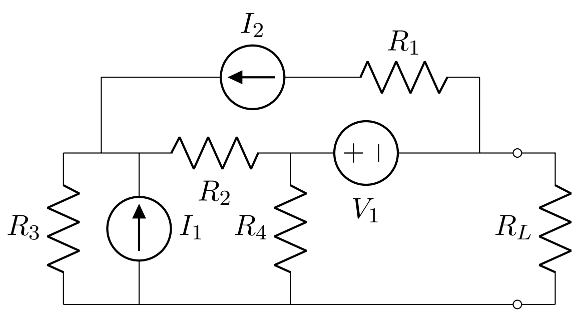
Lösning:
Vid $t = 0^-$ så har vi jämviktsläget så att spolen ser ut som en kortslutning och kondensatorn ser ut som ett avbrott. Vår spänningskälla är påslagen och vi får:

$$\text{KVL: } +V_1 - i_x(0^-)R_2 - i_x(0^-)R_1 = 0 \tag{34}$$

$$i_x(0^-) = \frac{V_1}{R_1 + R_2} \tag{35}$$

Uppgift q9

Bestäm R_L så att effekten som utvecklas i R_L maximeras.

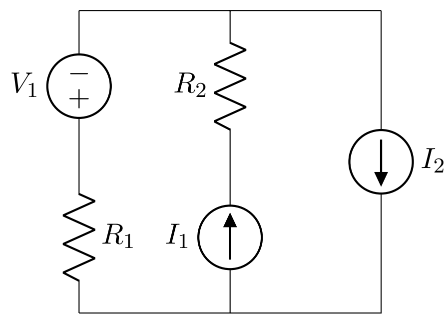


Lösning:
Vi vet att om vi tar fram Theveninresistansen, sett in i porten där R_L sitter, så ska $R_L = R_{TH}$ för att maximalt med effekt ska utvecklas i R_L. Eftersom vi bara har oberoende källor kan vi nollställa dem (dvs. spänningskällor ersätts med kortslutningar och strömkällor med avbrott). Om vi tittar in i porten (utan R_L) och tar fram ersättningsresistansen (som är R_{TH}) får vi (R_1 kommer inte med vara med för i den grenen flyter ingen ström).

$$R_{TH} = \frac{(R_2 + R_3)R_4}{R_2 + R_3 + R_4} \tag{36}$$

Uppgift q10

Bestäm effekten som utvecklas i R_1.



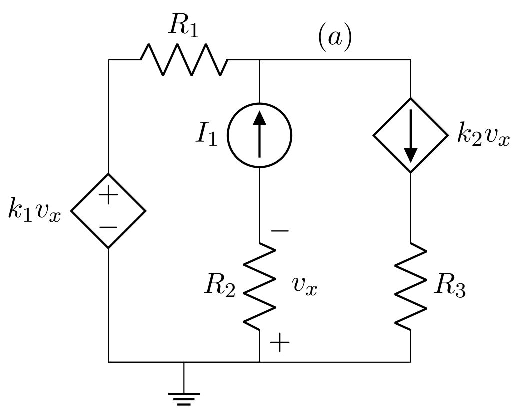
Lösning:
Vi gör en KCL i noden som är gemensam för V_1, R_2 och I_2. Vi definierar strömmen i_x som går ner genom grenen med V_1 och R_1 och får:

$$\text{KCL: } i_x - I_1 + I_2 = 0 \rightarrow \tag{37}$$

$$P_{R_1} = i_x^2 R_1 = (I_1 - I_2)^2 R_1 \tag{38}$$

Uppgift q11

Bestäm nodpotentialen v_a.



Lösning:

$$\text{KCL.a: } \frac{v_a - k_1 v_x}{R_1} - I_1 + k_2 v_x = 0 \quad (39)$$

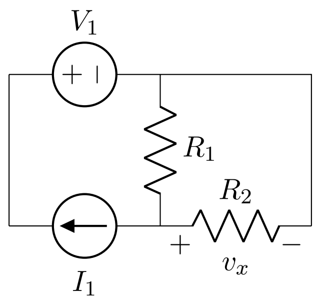
$$v_x = I_1 R_2 \rightarrow \quad (40)$$

$$\frac{v_a - k_1(I_1 R_2)}{R_1} - I_1 + k_2(I_1 R_2) = 0 \rightarrow \quad (41)$$

$$v_a = I_1(1 - k_2 R_2)R_1 + k_1 I_1 R_2 \quad (42)$$

Uppgift q12

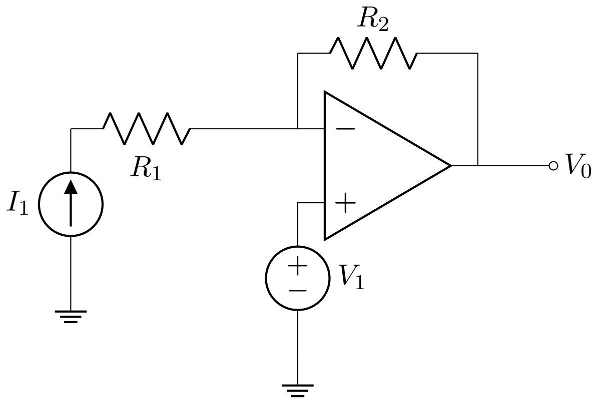
Bestäm v_x.



Lösning:
R_1 och R_2 är parallellkopplade och v_x är därmed spänningsfallet över båda. Vi kan ersätta dem med $R_1||R_2$ och med Ohms lag får man att $v_x = -I_1 \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$.

Uppgift q13

Bestäm V_0.



Lösning:
Vi vet att för operationsförstärkaren har vi att $v_n = v_p$ samt att ingen ström går in i den. Här får vi att $v_p = v_n = V_1$ och en KCL i noden (n) som är vid operationsförstärkarens inverterande ingång ger oss:

$$\text{KCL: } -I_1 + \frac{V_1 - V_0}{R_2} = 0 \rightarrow \tag{43}$$

$$V_0 = V_1 - I_1 R_2 \tag{44}$$
